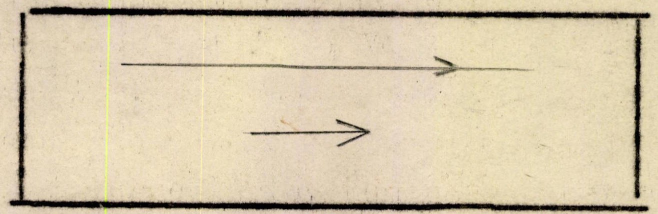
VECTORES

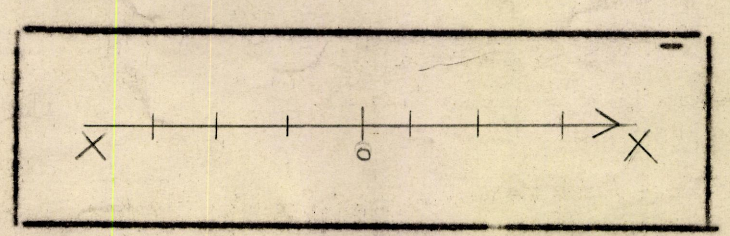
Noções preliminares.- Recordemos que, associando a qualquer recta o sentido em que deva ser percorrida por um móvel que nela se desloque, obtemos a recta orientada.



O sentido assim fixado chama-se sentido positivo e o que lhe é oposto, sentido neg ativo.

O se ntido positivo pode ser indicado por uma flecha , colocada sobre a recta, ou por uma flecha paralela à recta, figura acima.

Por outro lado, se marcamos sobre a recta orientada x'x um ponto arbitrário O e escolhemos a unidade de comprimento obteremos um eixo.



O ponto O, denominado origem, divide o eixo em dois semi-eixos, um / positivos e outro negativo.

O semi-eixo positivo é aquele que tem a orientação positivo do eixo, e o negativo é o que tem a orientação contrária.

Grandezas escalares e vectoriais.- Como vimos no primeiro ciclo deste curso, as grandezas científicas podem ser classificadas em escalares e vectoriais.

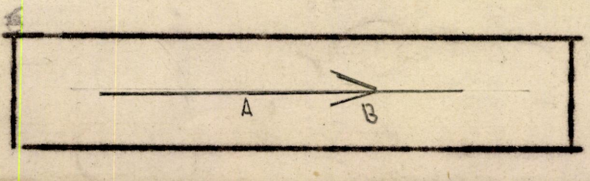
Grandeza escalar é toda grandeza que pode ser definida independentemente do conceito de orientação.

Como exemplo de grandezas escalares, citemos as seguintes: a distância/ de dois pontos a massa ou o volume de um corpo, a quantidade de calor de um corpo, etc.

Grandeza vectorial é toda grandeza cuja definiçãp não podem prescindir / dos conceitos de direção e sentido.

O deslocament o rectilíneo de um ponto, a velocidade de um móvel, a acaleração, etc., são grandezas vectoriais.

A cada grandeza escalar associamos um número real e a cada grandeza vectorial um elemento abstrato, denominado vector.



Noção de vector. - Vector é o ente matemático constituído de um número real qualquer, de uma direção e de um sentido.

O vector é apresentável por um segmento orientado.

No vector AB, o ponto A é chamado origem e o ponto B extremidade.

Caracteriza-se o vector AB pelos elementos seguintes:

a) módulo ou valor absoluto, número que mede a distância de A e B;

b) suporte, recta que contém o vector;

c) sentido, o do móvel que percorra o vector da origem à extremidade.

Indica-se o sentido de um vector com uma flecha e representa-se o vector de origem A e extremidade B pela notação

$$\overrightarrow{AB}$$

Classificação. - Do ponto de vista das aplicações, classificam-se os vectores do modo seguinte: vectores livres, vectores localizados em um ponto e vectores deslizantes.

Diz-se que um vector é livre quando a sua origem pode ser um ponto qualquer do espaço.

O vector é localizado em um ponto quando a sua origem é um ponto fixo do espaço.

Vector deslizante é aquele que pode deslizar sôbre o seu suporte. É também chamado vector localizado em um eixo.

Vector unitário.- Dá-se a denominação de vector unitário a um vector de módulo igual à unidade.

Vector unitário de um eixo é o vector unitário que tem por suporte esse eixo e cujo sentido é o sentido positivo do eixo.

Vector nulo.- Em particular, pode-se considerar um vector nulo, o vector cujo modulo e nulo.

No vector nulo, a extremidade confunde-se com a origem, sendo o seu suporte indeterminado.

Com efeito, o suporte de um vector nulo é uma recta qualquer que passa pelo ponto a que fica reduzido o vector.

Ademais, a noção de sentido deixa de existir no vector nulo.

Valor algébrico de um vector.- Valor algébrico de um vector deslizante é o número relativo que exprime o módulo do vector, precedido do sinal + quando o sentido do vector e o sentido positivo do eixo, e do sinal - no caso contrario.

O valor algébrico do vector

$$\overrightarrow{AB}$$

representa-se pela notação

$$\overline{AB}$$

e o seu módulo simplesmente por

AB.

VECTORES COLINEARES E VECTORES COMPLANARES.-

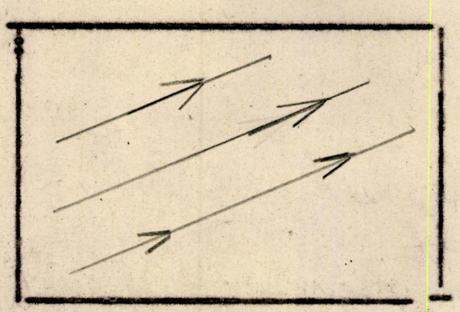
Dois vectores livres dizem-se colineares quando os seus suportes são paralelos a mesma recta.

Três ou mais vectores livres são complanares quando os seus paralelos ao mesmo plano.

Evidentemente, o vector nulo pode ser considerado paralelo a qualquer outro vector.

Vectores equipolentes. - Dois ou mais vectores são equipolentes quando têm os seus suportes paralelos ou confundidos, o mesmo sentido e o mesmo módulo.

Para indicar a equipolência de dois vectores emprega-se o sinal de dois/ vectores, emprega-se o sinal de igualdades.



$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

Estas igualdades recebem a denominação de equipolências e estão sobordinadas às mesmas leis das igualdades numéricas. Assim:

I. Todo vector é equipolente a si mesmo. - Exemplo:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.$$

II . Sendo um vector equipolente a outro, êste é equipolente ao primeiro.

Exemplo: dados os vectores

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD},$$

temos

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.$$

III. Dois vectores equipolentes a um terceiro são equipolentes entre si.

Exemplo: dados os vectores

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD},$$
$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{EF},$$

temos

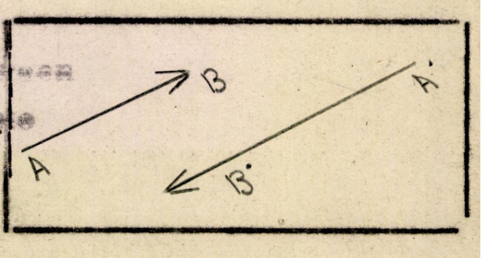
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EF},$$

Vectores simétricos.- Dois vectores dizem-se simétricos ou opostos quando são paralelos, têm módulo iguais e sentidos contrários.

Sendo AB e AB' vectores opostos temos

AB= A'B.

Dados dois vectores opostos, dizemos que todo vector equipolente ao primeiro é oposto a todo vector equipolent e ao segundo.



Quando os suportes de dois vectores opostos se confundem, caso em que ficam localizados no mesmo eixo, dizemos que os vectores são directamente opostos.

Acentuemos, ainda, que dois vectores opostos a um mesmo terceiro são equipolentes.

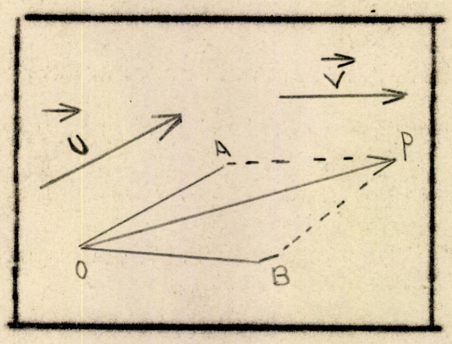
Adição de vectores livres.- I. Consideremos, preliminarmente, o caso da soma de dois vectores livres

Sejam $\overrightarrow{U}$ e $\overrightarrow{V}$

dois vectores não colineares.

Por um ponto arbitrário do espaço, O, conduzamos o vector OA, equipolente a U, e depois AP, equipolente a V.

O vector OP, que tem para origem a do vector U e para extremidade a do vector V, é a soma geométrica ou resultante dos vectores U e V.



Escrevemos, então,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}.$$

Por outro lado, é fácil verificar que a resultante obtida independe da ordem em que se tomam os dois vectores dados.

Com efeito, conduzindo OB, equipolente a V, e depois, pela extremidade desse vector, o vector equipolente a U, a extremidade coincidirá com o ponto P, em consequência das propriedades do paralelogramo.

Temos então

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}.$$

Assim, a adição de dois vectores é comutativa.

Observemos, ademais, que o vector soma obtido é a diagonal do paralelogramo construído com o lados OA e OB.

Além disso, no triângulo OAP, temos conforme a conhecida propriedade,

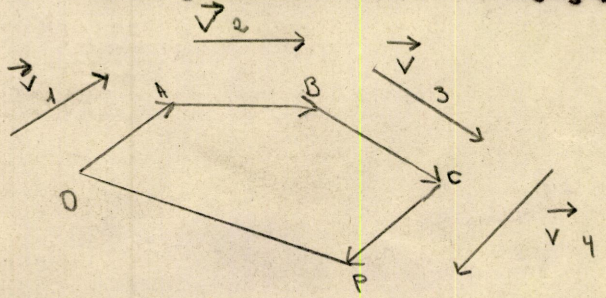
$$OP < OA + AP$$
$$OP > OA - AP.$$

Assim, o módulo da resultante de dois vectores não colineares é menor que a soma dos dos módulos dos vectores dados e maior que a sua diferença.

II. Consideremos, agora, o caso de mais dois vectores livres: sejam os vectores

$$\overrightarrow{V1}, \overrightarrow{V2}, \overrightarrow{V3}, \ldots$$

Por um ponto arbitrário do espaço, O, conduzamos o vector OA, equipolente a V1; depois, pelo ponto A, tracemos AB, equipolente a V2,; pelo ponto B, tracemos BC, equipolente a V3, e assim por diante.



O vector, que tem como origem a do vector equipolente ao primeiro vector dado e como extremidade a do vector equipolente ao último, é a resultante ou soma geométrica dos vectores considerados.

Designando por S o vector soma, temos, então

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{S} = \overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2} + \overrightarrow{V3} + \ldots$$

O contorno poligonal OABC...P denomina-se polígno dos vectores.

Como é fácil imaginar, pode suceder que o ponto P coincinda com O, caso em que a resultante é nula e o polígno se diz fechado.

Notando que qualquer lado de um polígno é menor que a soma de todos os outros, temos

$$OP < OA + AB + BC + CP.$$

Assim, o módulo da resultante ou soma geométrica de três ou mais vectores não colineares é menor que a soma dos módulos desses vectores.

Propriedades da adição de vectores. - I. A adição de vectores é uma operação unívoca.

Com efeito, dados vários vectores, só existe um vector que seja a soma desses vectores.

II. A adição de vectores é uma operação comutativa.

Consideremos a soma de vectores livres

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{X} + \vec{T}.$$

Como vimos no parágrafo precedente, a adição de dois vectores livres é comutativa.

Assim, permutando, sucessivamente, dois vectores consecutivos, podemos escrever

$$\vec{U} + \vec{V} + \vec{X} + \vec{T} = \vec{U} + \vec{V} = \vec{T} + \vec{X} = \vec{U} + \vec{T} + \vec{V} + \vec{V} + \vec{X},$$

e assim por diante

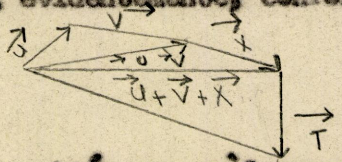
III. A adição de vectores é uma operação associativa.

Com efeito, vejamos que a resultante de três ou mais vectores não se modifica quando substituímos um grupo qualquer de vectores pela sua soma geométrica parcial.

Seja a soma

$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{X} + \vec{T}.$$

Substituindo os vectores U e V pela sua soma, temos, evidentemente, conforme a definição de adição de vectores,



$$\vec{S} = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{X}\ \vec{T}.$$

Substituindo os três primeiros vectores pela sua soma, obtém-se, analogamente

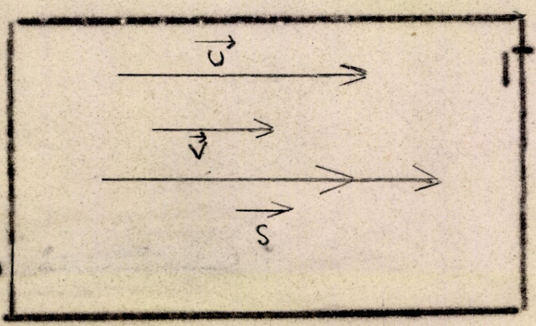
$$\vec{S} = (\vec{U} + \vec{V} + \vec{X}) + \vec{T},$$

e assim por diante.

A adição de vectores colineares. - I. Consideremos primeiramente, a adição de dois vectores colineares, isto é, vectores cujos suportes são paralelos ou se confundem.

Notando que o paralelogramo dos vectores se reduz, nesse caso, a um segmento de recta, consideremos dois vectores colineares e do mesmo sentido. Sejam

$$\vec{U} \text{ e } \vec{V}.$$

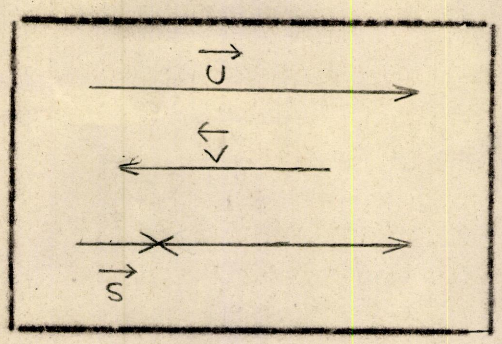


Evidentemente, o vector soma tem o sentido comum dos vectores dados e o seu módulo é igual à soma dos módulos dos mesmos.

Temos então,

$$S = U + V.$$

Sejam, agora, de sentidos contrários os vectores considerados, figura a seguir. Nesse caso, o sentido do vector soma é o mesmo do vector que tem o módulo maior, e o seu módulo é igual a diferença dos módulos dos vectores dados.



Na soma de dois vectores colineares contrários temos, então,

$$S = U - V.$$

Ademais, observemos que, no caso particular de soma de dois vectores opostos, o vector soma é nulo.

Temos, então, tomando os valores algébricos de dois vectores opostos

$$\overline{V} + (-\overline{V}) = 0$$

II. Consideremos, agora, o caso de três ou mais vectores colineares. Seja a soma

$$\vec{S} = \vec{U} + \vec{V} + \vec{T} + \ldots + \vec{X}.$$

Admitindo que esses vectores estejam situados no mesmo eixo, e bem assim que a extremidade de cada um coincida com a origem do seguinte, temos, evidentemente, que o valor algébrico da resultante é igual à soma dos valores algébricos dos vectores dados, a saber,

$$\overline{S} = \overline{U} + \overline{V} + \overline{T} + \ldots + \overline{X}.$$

Subtração de vectores- Dá-se a denominação de diferença de dois vectores a um terceiro vector que, somado ao segundo, reproduza o primeiro.

Assim, se tivermos

$$\vec{V} + \vec{D} = \vec{U}, \quad (1)$$

dizemos que

$$\vec{U} - \vec{V} = \vec{D} \quad (2)$$

Ademais, aplicando à equipolência (1) a propriedade comutativa da adição, vem

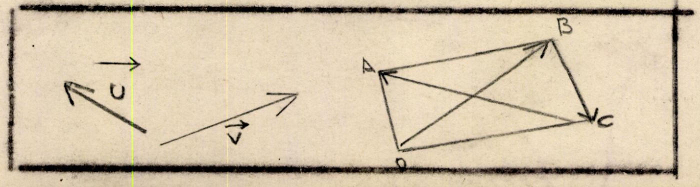
$$\vec{D} + \vec{V} = \vec{U}.$$

Temos, então, também

$$\vec{U} - \vec{D} = \vec{V}. \quad (3)$$

Sendo as equipolências (2) e (3) equipolentes à equipolência (1) podemos dizer que a subtração geométrica de vectores é a operação inversa da adição.

Construamos, agora, o paralelogramos dos vectores U e V, figura a seguir.



Como vimos (nº 268) OB é a soma geométrica dos vectores dados:

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{OB}$$

Por outro lado, dizemos que a diagonal que liga a extremidade de U à extremidade de V é a diferença dos vectores considerados, isto é, que

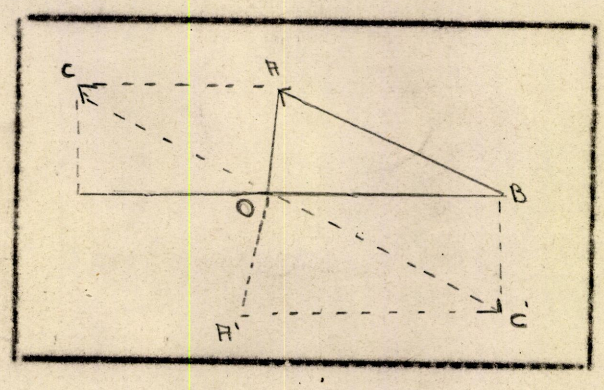
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}.$$

Com efeito, temos, de acordo com as propriedades do paralelogramo,

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U}.$$

Observação - Dados os vectores OA e OB, temos

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA},$$



equipolência que nos permite afirmar, conforme a definição (nº 271), que BA é a seguinte diferença geométrica:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

Observemos, entretanto, que o vector diferença BA também pode ser obtido de outro modo. Com efeito, de acôrdo com a figura, temos

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + (- \overrightarrow{OB}). \qquad (2)$$

Comparando as equipolências (1) e (2), vem

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + (- \overrightarrow{OB}).$$

De modo geral, considerando dois vectores U e V, temos

$$\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} + (- \overrightarrow{V}).$$

Assim, para subtrair um vector de outro, basta somar ao primeiro o oposto do segundo.

Somas e diferenças de vectores. - As propriedades da adição e a definição de diferença de vectores permitem-nos estabelecer as seguintes regras de cálculo relativas às somas e diferenças de vectores:

I: Pode-se passar um vector de um membro para outro de uma equipolência, trocando-lhe o sinal.

Exemplo: dada a equipolência

$$\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2} + \overrightarrow{V3} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2},$$

podemos escrever

$$\overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2} - \overrightarrow{V3}.$$

II. Para somar uma soma de vectores, pode-se somar sucessivamente os seus diferentes termos.

Exemplo: dadas as somas

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2} + \overrightarrow{U3}$$

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2},$$

~~III.~~

temos

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U1}, + \overrightarrow{U2} = \overrightarrow{U3} + \overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2}.$$

III. Para subtrair uma soma de vectores, pode-se subtrair sucessivamente os seus diferentes termos.

Exemplo: dadas as equipolências

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2} + \overrightarrow{U3}$$

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V1} + \overrightarrow{V2},$$

temos

$$\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2} + \overrightarrow{U3} - \overrightarrow{V1} - \overrightarrow{V2}.$$

IV. Para somar uma diferença de vectores, pode-se somar o termo aditivo e subtrair o termo subtractivo.

Exemplo: dadas as equipolências

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2}$$

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V1} - \overrightarrow{V2},$$

temos

$$\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2} + \overrightarrow{V1} - \overrightarrow{V2}.$$

V. Para subtrair uma diferença, pode-se somar o termo subtractivo e subtrair o termos aditivo.

Exemplo: dadas as equipolências

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U1} + \overrightarrow{U2}$$

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V1} - \overrightarrow{V2},$$

temos

Verificamos, assim que a adição e subtração de vectores seguem as mesmas regras relativas ao cálculo algébrico de polinômios.

Multiplicação de vector por número real. - Dados um vector V não nulo e um número real n, chama-se produto de V por n um vector U, paralelo a V, cujo módulo é o produto de módulo de V por n e cujo sentido é o de V, se n, for positivo, e contrário ao de V, se n for negativo.

Escrevemos, então,

$$\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V} \times n.$$

~~Em~~ particular, para ~~n= 1~~, ~~temos~~

Em particular, para n = 1, temos

$$\vec{V} \times (+ L) = \vec{V}$$

Para n= 1, temos

$$\vec{V} \times (+1) = -\vec{V}.$$

Assim, quando n = - 1, o vector produto 'é o vector oposto a V.

Finalmente, para n = 0, vem

$$\vec{V} \times 0 = 0,$$

isto é, o produto de um vector por zero é o vector nulo.

Divisão de vector por número real. - Pela definição de produto de vector por número real, temos (nº 274)

$$\vec{U} = n \times \vec{V},$$

de onde se deduz

$$\vec{V} = \frac{\vec{U}}{n} = \vec{U} \times \frac{1}{n}.$$

Assim, dizemos que o quociente do vector U pelo número real ń é o produto de U pelo inverso de n.

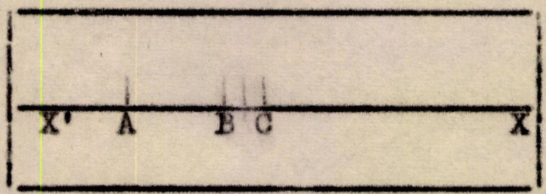
É claro que, para n = 0, a definição carece de significação, de vez que zero não tem inverso.

Teorema de Chasles. - Dados vários pontos A, B, C, ... K, L sobre uma recta, entre as medidas algébricas dos segmentos determinados por esses pontos existe sempre a relação

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KL} + \overline{LA} = 0.$$

I.Consideremos, primeiramente, o caso em que os dados são três.

Neste caso, é ividente que, em qualquer posição relativa em que se possam - encontrar os pontos A, B, e C, um deles estará situado entre os outros dois.



Assim,podemos sempre considerar três vectores positivos e tais que o valor algébrico de um deles seja igual á soma dos valores algébricos dos outros dois.

Na figura,temos

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

de onde se deduz

$$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC} = \overline{0}.$$

Mas, notando que

$$-\overline{AC} = \overline{CA}.$$

Segue-se que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

Anàlogamente, estando o pontp C situado entre a e B, temos

$$AC + CB = AB,$$

de onde se deduz

$$\overline{AB} - \overline{AC} - \overline{CB} = 0,$$
$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0.$$

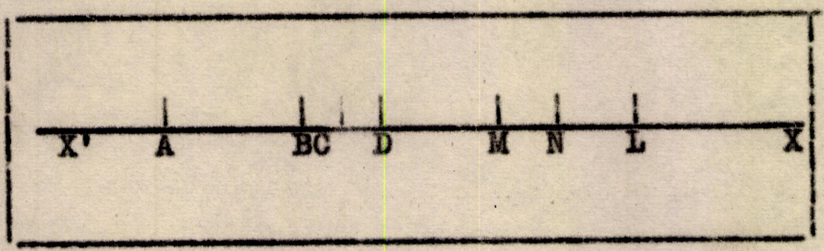
II . Consideremos agora n pontos situados sobre o eixo x'x, admitindo que a proposição seja verdadeira para n - 1 pntos.

De acordo com a hipótese, podemos escrever

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{MN} + \overline{NA} = 0. \qquad (1)$$

Por outro lado, considerando os pontos A, N e L, temos

$$\overline{AN} + \overline{NL} = \overline{LA} = 0.$$



Somando as igualdades (1) e(2), vem

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{AN} + \overline{NL} + \overline{NA} + \overline{LA} = 0.$$

Mas, notando que $\overline{AN} = -\overline{NA}$,

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \ldots + \overline{NL} + \overline{LA} = 0.$$