O ESTRANHO MUNDO DA TOPOLOGIA

O QUE É TOPOLOGIA ?

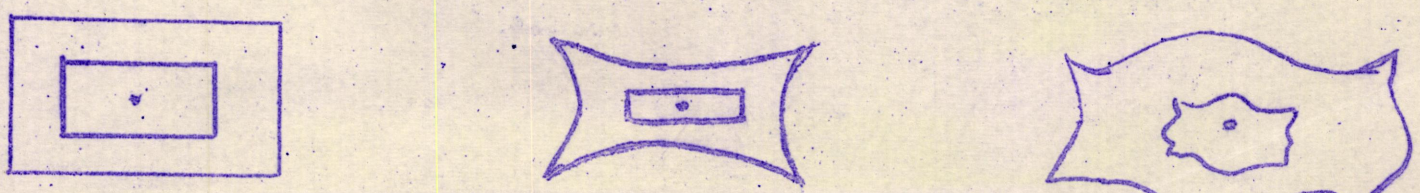
Você já ouviu falar de uma fôlha de papel sòmente com uma face ? Porquê os matemáticos dizem que uma rosquinha e um pote de flôres são mais semelhantes que uma rosquinha e uma castanha ? Quando um triângulo é o mesmo que um círculo ? É possível mudar o sapato esquerdo no sapato direito dando uma volta circular no espaço ? Estas são os tipos de perguntas que a topologia responde. A topologia é um dos mais novos e excitantes campos de matemática. Desde que se fale de coisas familiares como o interior de uma luva ou a diferença entre o sapato esquerdo e o direito, a topologia não parecerá estranha. A topologia é cheia de impossibilidades, truques e enigmas.

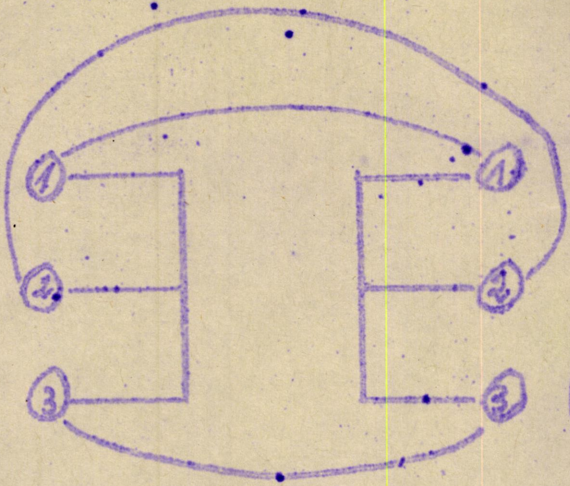
A topologia é a parte da matemática que decide o que é possível. Falamos se é possível transformar um "inner tube inside out". Pode parecer um problema fácil. Topologistas dizem que o problema é possível, mas nenhum disse como fazer com um real.

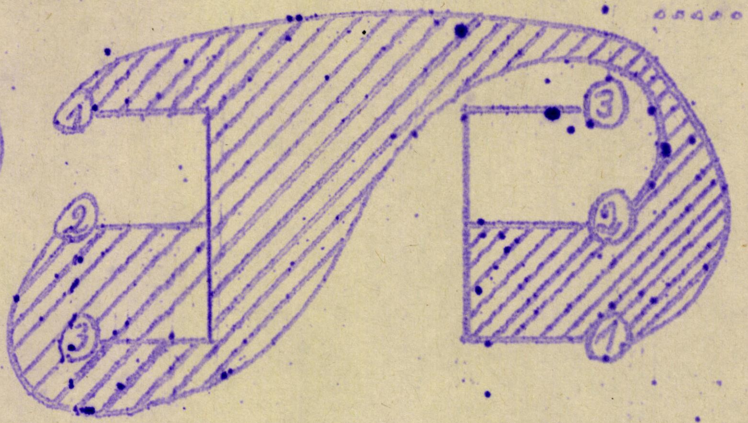
Em topologia nunca perguntamos, "qual o comprimento ?", "qual a distância ?", "qual o tamanho ?", perguntamos "onde ?", "entre o que ?", "no interior ou no exterior ?" – Um viajante numa estrada desconhecida, não perguntaria "qual a distância à Bachester ?" se não conhecesse a direção. Preferentemente perguntaria "como se vai à Bachester ?". Então a resposta "seguindo esta estrada, você encontrará uma encruzilhada, tome o caminho da esquerda". – Esta resposta não é matemática, pois não fala em distância nem descreve se o caminho é reto ou curvo. É o tipo de resposta que a topologia nos dá.

TOPOLOGIA E GEOMETRIA

A topologia tem alguma semelhança com a geometria, pois trata com linhas pontos e figuras. Mas as figuras topológicas são muito diferentes das geométricas, pois podem mudar a grandeza e a forma. A topologia é chamada, a "geometria da fôlha de borracha". A topologia se interessa com as propriedades da posição que não são afetadas por mudanças na forma ou no tamanho. Por exemplo, desenhando um quadrado numa fôlha de borracha com um ponto no seu interior. Por mais que alonguemos a fôlha de borracha, o ponto permanecerá no interior do quadrado. Topologia é o estudo das propriedades que não variam apesar de um alongamento ou curvamento.



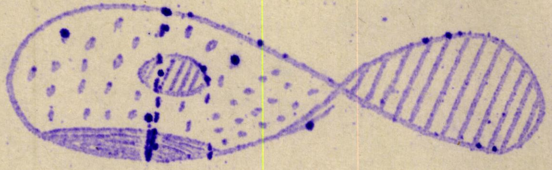




1ª solução

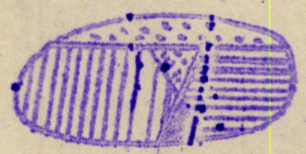
Dizem que a filha do Califa morreu donzela.

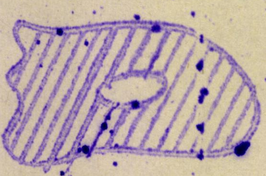
Nesse problema trabalhamos com uma curva fechada simples tendo um interior e um exterior. Existem curvas fechadas que são simples, estas curvas possuem mais de um interior. A Curva seguinte possui 5 regiões (4 interiores).



Quantas regiões interiores tem as curvas seguintes?

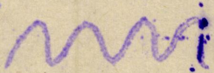
Em Quantas regiões elas dividem o plano ?



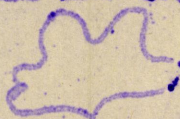
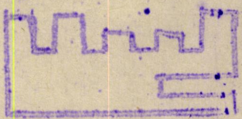
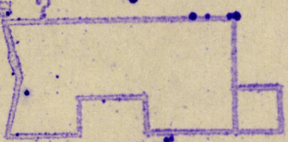


EXERCÍCIOS :

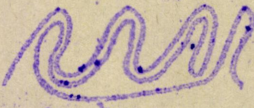
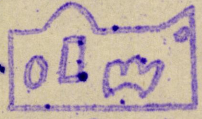
1. Quais das figuras seguintes são topologicamente linhas ?

a)  b)  c)  d) 

2. Quais das figuras seguintes são curvas fechadas simples ?

a)  b)  c)  d) 

3. Quantas regiões interiores tem cada uma das figuras seguintes ?

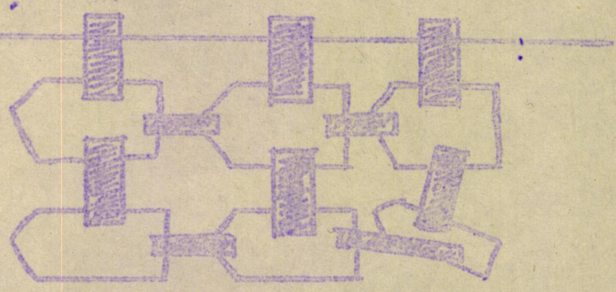
a)  b)  c)  d) 

RESPOSTAS : 1. – a, c 2. – a, b 3. – a : 2 b : 3 c : 0 d : 5

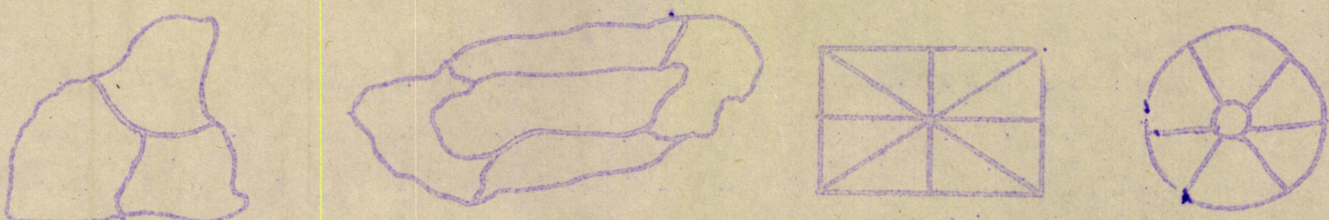
BRINCADEIRAS COM A FAIXA DE MOEBIUS

Tôdas as superfícies fechadas sôbre as quais temos falado são como a superfície de uma fôlha. Tôdas as fôlhas que conhecemos, tais como uma fôlha de papel, tem duas superfícies : a da frente e a de trás. Você já viu um pedaço de papel com apenas uma superfície ? Há realmente tal fôlha. É chamada faixa de Moebius e tem sido usada por muitos mágicos para entreter o povo. Tem sido um brinquedo para os matemáticos desde que foi descoberta por August Ferdinand Moebius, matemático –

6 . O diagrama seguinte mostra uma frota de botes que estão amarrados pró ximos a uma doca. Os botes estão ligados por pranchas como está indicado. Mostre usando o gráfico se é ou não possível fazer uma jornada e cruzar tôdas as pranchas sòmente uma vez. Se não, qual é o menor número de caminhos ?



7 . Mostre que a fórmula de Euler para vértices, arcos e regiões é satisfeita para cada uma das figuras seguintes.



(a) (b) (c) (d)

RESPOSTAS:

1. a.
b.
c.
d.
e.

2. a, b, c
3. a, b, c
4. UM
5. ALGUM VERTICE ÍMPAR
6. DOIS

7.

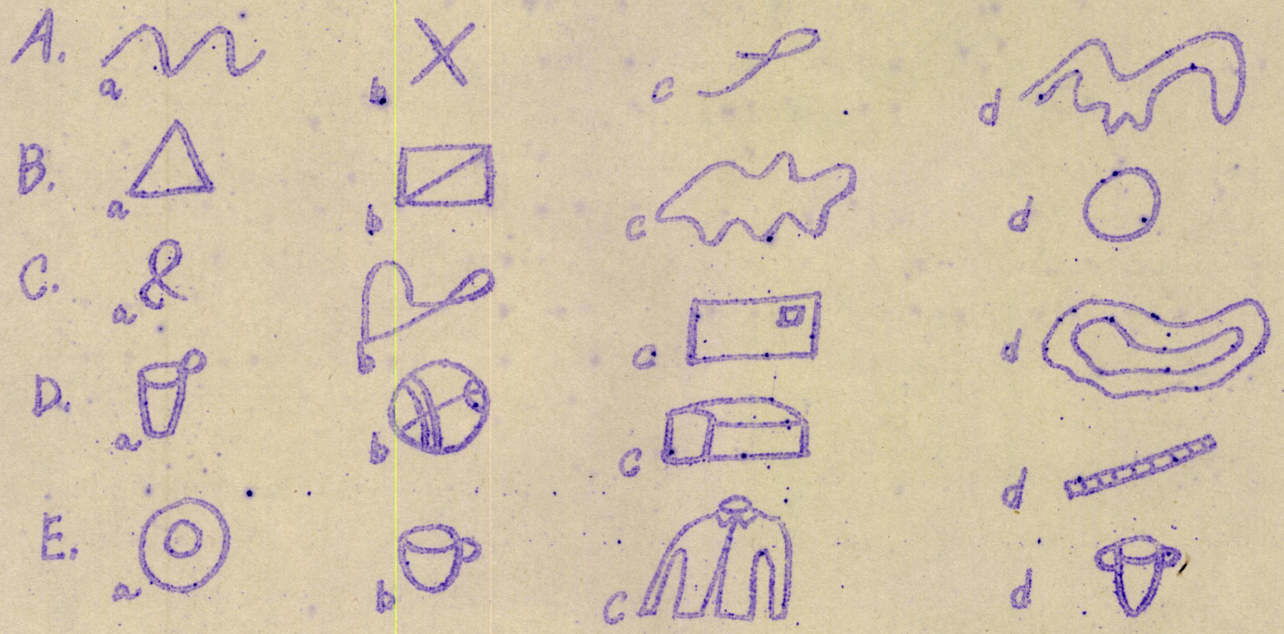
V	A	R
4	6	4
8	12	6
9	16	9
12	18	8
12	12	2

EXERCÍCIOS :

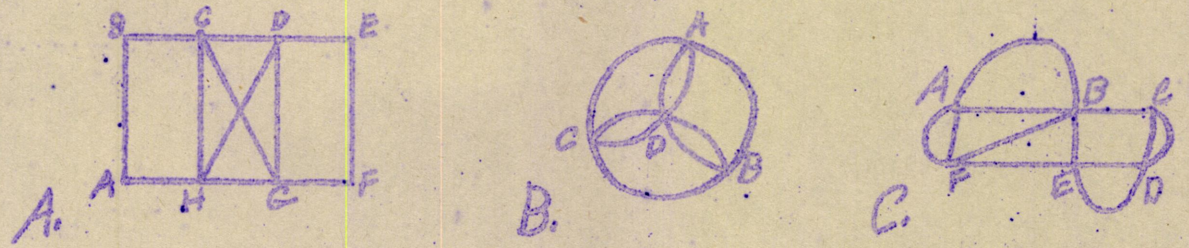
Teste de revisão de topologia.

Faça êste teste para ver o quanto você recorda sôbre as idéias encontradas atrvés dêste livro.

1. Quais figuras em cada conjunto de quatro não pertencem a mesma classificação das restantes ?



2. Quais dos seguintes gráficos podem ser atravessados em uma jornada ?



3. Quais dos elementos seguintes são invariantes numa transformação topológica ?

a. O número de regiões na figura

b. O valôr de (V mais R - A) no gráfico

c. O comprimento de uma linha

d. Continuidade

e. A forma da figura.

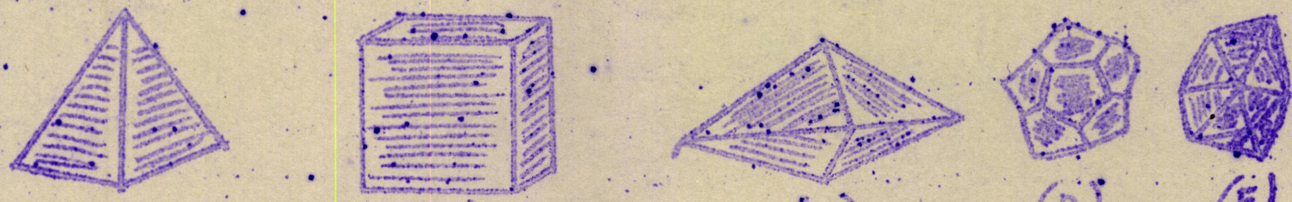
4. Qual é o menor número de caminhos (traços) necessários para traçar êste gráfico ?

5. Nomeie todos os vértices onde você pode partir para traçar o gráfico acima com menor número de caminhos (traços).

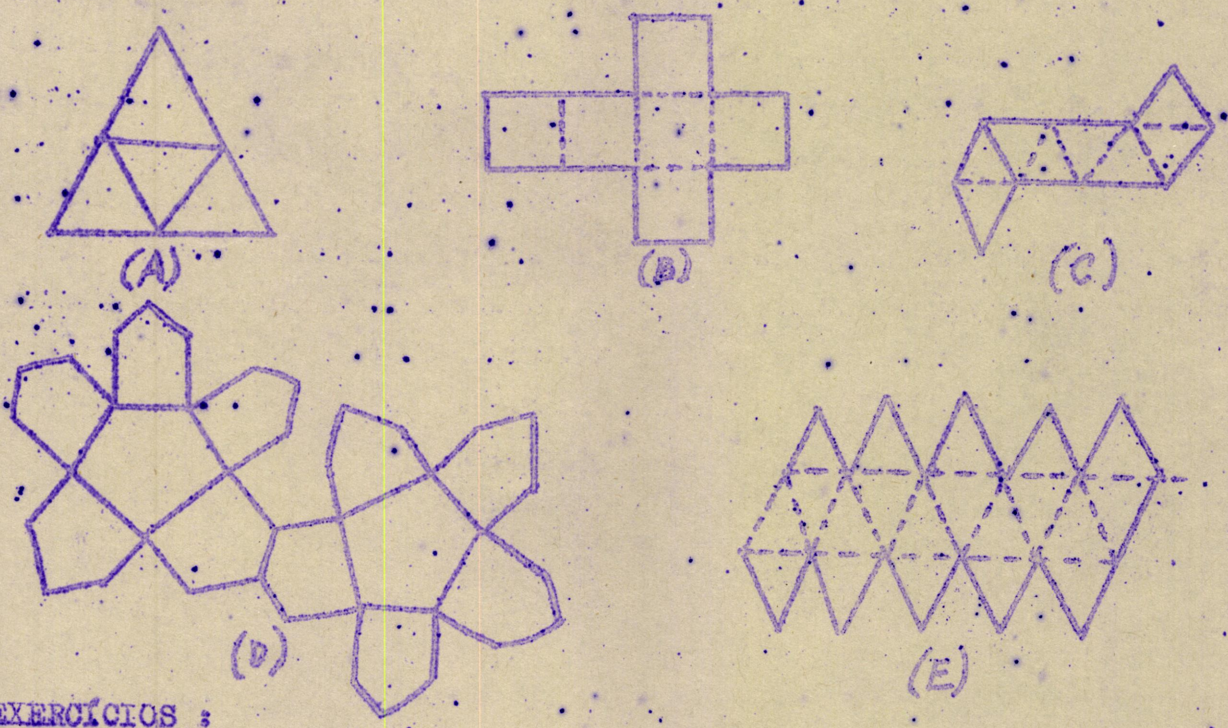
tôdas as faces tem a mesma forma e tamanho (são congruentes), e os ângulos das faces podem ser postos em coincidência.

Há sòmente cinco poliedros regulares. Mencionamos o cubo como exemplo de poliedro regular. Um poliedro com seis faces é chamado hexaedro. Como o cubo é um poliedro regular com seis faces, é chamado hexaedro regular. Os outros poliedros que podem ser regulares são os que possuem quatro faces (tetraedro), oito faces (octaedro), doze faces (dodecaedro) e vinte faces (icosaedro). Os poliedros regulares são desenhados a seguir. Procure modê los dêstes poliedros. Você próprio pode construir êstes modêlos usando car tolina e os modêlos seguintes.

Quando a fórmula de Euler é aplicada para os poliedros, mudamos o sím bolo A para E para representar o número de arestas (edges) do poliedro e o símbolo R por F para representar o número de faces. Você vê que um poliedro é realmente um gráfico tri-dimensional?



(A) (B) (C) (D) (E)



EXERCÍCIOS :

Poliedros e a fórmula de Euler.

Copie e preencha a tabela.

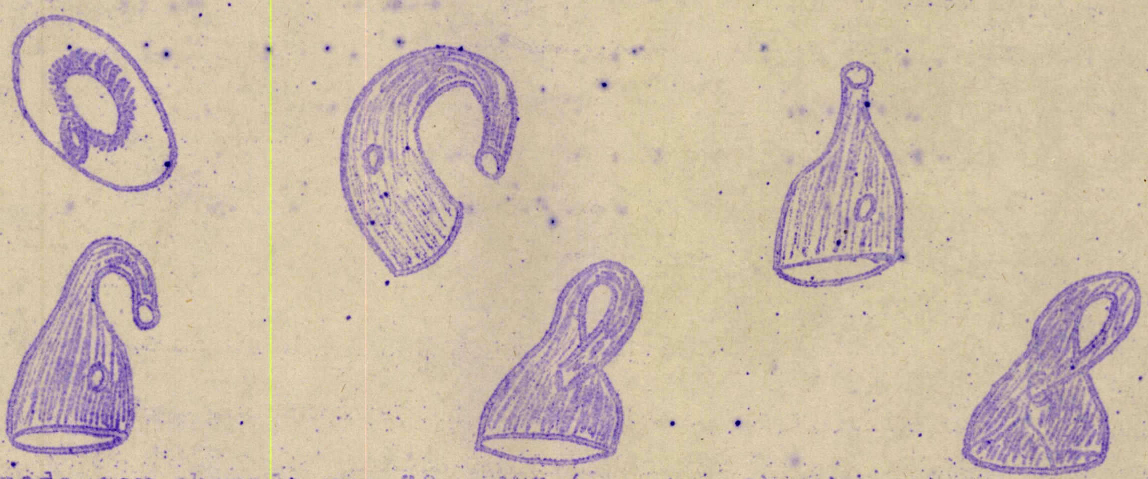
NOME	Nº DE FA-CES (F)	Nº DE ARES-TAS (E)	Nº DE VER-TICES (V)	V+F=E+2
1. TETRAEDRO	4	6	4	8 8
2. HEXAEDRO	6	12	8	14 14
3. HOCTAEDRO	8	12	6	14 14
4. DODECAEDRO	12	30	20	32 32
5. ICOSAEDRO	20	30	12	32 32

RESPOSTAS:

X

A FAMOSA RARA GARRAFA DOS MATEMÁTICOS .

Um tri-dimensional semelhante a faixa de Moebius é a"garrafa de Klein" inventada em 1882 pelo grande matemático germânico, Félix Klein. O modo mais fácil de visualizar esta garrafa é imaginar que um (inner tube) é cortado e alongado como um cilindro. Uma extremidade é esticada para fazer a base, e a outra apertada como gargalo de uma garrafa . A extremidade apertada é torcida e enfiada através do buraco ao lado do tubo. Finalmente, esta extremidade é esticada/ e ligada com a extremidade aberta na base.



Isto pode ser chamado uma "furada" (punctured) garrafa de Klein, o buraco do tubo sendo o furo na garrafa. Em topologia, usualmente supomos que atualmente nenhum buraco existe; assim a única face da superfície passa através dela própria. Naturalmente é impossível fazer isto com um tubo (inner tube), mas em topologia usamos livremente qualquer possibilidade. A garrafa de Klein pode ser construida com um par de faixas de Moebius com as bordas coladas juntas. Estas propriedades da faixa de Moebius e garrafas de Klein foram resumidas em um par de limericks :

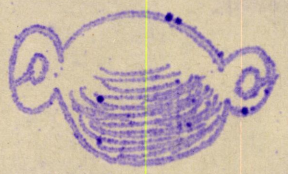
" Um matemático confiou
Que a faixa de Moebius tem uma só face.
Se você dividí-la longitudinalmente
Se seu corte fôr no meio da faixa
Resultará uma peça quando dividida

Um matemático chamado Klein
Pensou que a faixa de Moebius era divina
Disse êle : "Se você colar as bordas de duas.,
Terá uma encantara (mágica) garrafa
como a minha. "

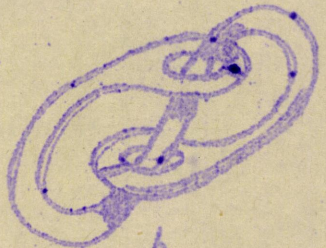
A FÓRMULA DE EULER VISTA NA TERCEIRA DIMENSÃO

A fórmula de Euler para os gráficos, $V-A+R=2$ pode ser aplicada para certas figuras tri-dimensionais chamadas poliedros. Um poliedro é um sólido formado por superfícies planas, chamadas faces do poliedro. Um é um exemplo de poliedro. Nos poliedros regulares, como o cubo, as faces são figuras geométricas com todos os lados e todos os ângulos iguais.

triplamente conecta, pois dois cortes são necessários para transformar-los em uma superfície fechada simples, e logo um terceiro corte ou furo é necessário para transformar a superfície fechada em uma curva fechada simples.



a



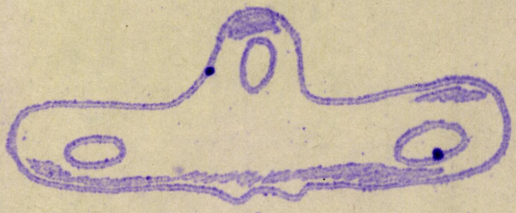
b

EXERCÍCIOS :

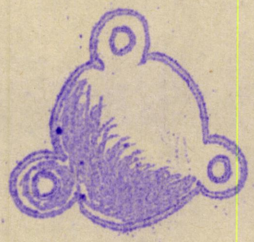
SUPERFÍCIES TRI-DIMENSIONAIS

1. Quantos cortes são necessários para transfoimar êstes sólidos em superfícies fechadas simples ?

a



b



2. Classifique , estas superfícies como singulamenteduplamente ou triplamente conectas, ou como superfícies simples.

a- uma bola
b- uma mangueira
c- um casaco
d- um pulover de mangas compridas
e- um (inner tube)
f- um prato de papel
g- um copo de papel sem handles

3. Devido as diferenças em conectividade, alguns enigmas que não podem ser solucionados numa superfície fechada simples como um plano ou uma esfera - podem ser solucionados numa superfície mais complexa como o toro(nome técnico das superfícies como a rosquinha).

Você deve ter encontrado como impossível o problema das 3 casas ligadas ao gaz água e eletricidade, no plano. Veja se pode resolver êste problema sôbre uma rosquinha.

<u>RESPOSTAS</u> :

1 - a - 2 ; b - ; c - 3 ; d - 6

2 - a - singulamente ; b - singulamente ; c - duplamente
d - triplamente ; e : duplamente ; f : simples ; g simples .

O anel da figura não uma curva fechada simples. Divide a fôlha em três regiões A, B e C . Mas se cortarmos o anel uma vez como na figura 2, torna-se uma curva fechada simples. A e C são agora ambas o exterior.

A topologia classifica os objetos ou figuras pelo número de cortes necessários para simplificar a figura ou superfície. Um anel como o da figura anterior é classificado como uma superfície singularmente(singly) conecta, porque necessita-se um corte para transformá-la numa curva fechada simples. Notamos que as palavras singular e simples (singly e simple) tem significados diferentes na classificação das figuras.

Em três dimensões, a topologia classifica um objeto de acôrdo com o número de cortes necessários para transformá-lo numa superfície simples fechada como a esfera. Por exemplo, a rosquinha é algo semelhante ao anel que descrevemos anteriormente. Se cortarmos uma rosquinha como mostra a figura B , êle torna-se uma superfície simples fechada, que pode ser transformada numa esfera. Note que um único corte através de uma superfície fechada simples poderia produzir duas peças. O resultado produzido por um único corte é a primeira distinção topológica entre uma rosquinha e uma esfera. Dizemos que a esfera e a rosquinha diferem em conectividade.

E sôbre o furo da rosquinha ? É êle interior ou exterior ? Em topologia, dizemos que é exterior, não interior. Atualmente, o buraco na rosquinha tem somente uma pequena parte nas classificações topológicas.

Olhemos para os limites (bordas)das figuras topológicas. Uma fôlha de papel ou um cartão redondo têm duas superfícies e uma borda. Um toro (inner tube) tem 2 superfícies mas não tem borda. Um cilindro aberto tem duas bordas e duas superfícies. Um modo de classificar os objetos é contando o número de cortes que podemos fazer na superfície sem dividí-la em mais que uma peça. O corte (cros-cut) pode ser feito por uma tesoura, o corte deve iniciar e terminar numa borda.

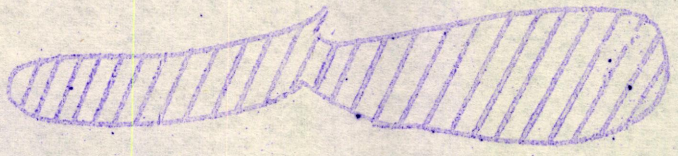
Se fazemos um corte de uma margem de um cartão quadrado para outra, dividiremos o cartão em duas partes distintas. Se fizermos isto com um tubo de cartão, o reduziremos a uma superfície equivalente a um quadrado. Naturalmente, se cortarmos o cilindro por uma linha paralela a ambas as bordas teremos dois cilindros. O quadrado é denominado uma superfície simples, o cilindro uma superfície singularmente conecta. Um balão poderia ser esticado e transformado numa fôlha se seu furo pudesse ser suficientemente esticado. Assim a esfera é também uma superfície singularmente conecta. Cada um dos objetos tri-dimensionais da figura seguinte é

Do mesmo modo, quando cortamos o arco de um círculo, mudamos a curva fe - chada numa linha.

Estas mudanças não são transformações, novas figuras topológicas são for madas.

Em geometria estuda-se as propriedades de tamanho, forma, área e grande - za de ângulos. Duas figuras são congruentes, quando superpostas tem a mesma - forma e tamanho, com tôdas as partes em correspondência. As transformações - topológicas nos dão figuras chamadas EQUIVALENTES. Em topologia o círculo e - o quadrado são equivalentes ainda que tenham diferentes tamanhos. Ambos pos - suem um interior e um exterior. Para passar de uma região para outra temos que cruzar a curva.

Sombreando o interior de uma figura, vemos fàcilmente que ela divide - a superfície em duas regiões.



O CALIFA PERSA E OS PRETENDENTES DE SUA FILHA

A idéia de interior e exterior auxilia a solução de interessantes proble- mas como a do Califa Persa que usou a topologia para selecionar um noivo pa - ra sua belíssima filha.

Aos pretendentes à filha do Califa foram dados dois problemas. O candida- to que resolvesse o primeiro poderia falar com a môça, mas para casar seria necessário resolver o segundo problema.

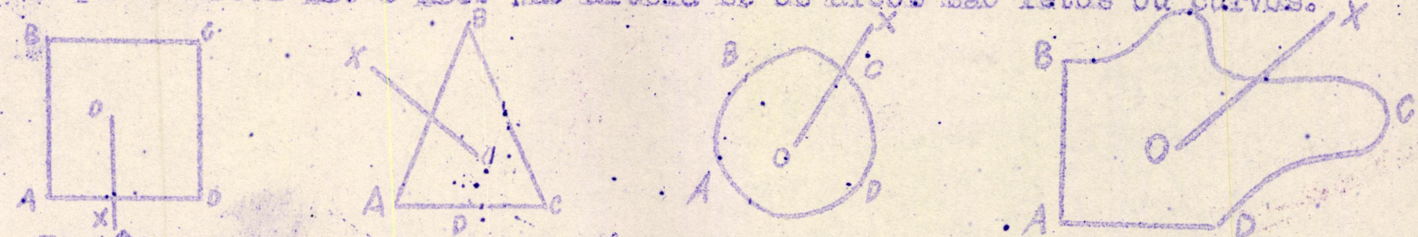
Os problemas consistiam em ligar os números iguais nas figuras abaixo;por linhas que não se cruzassem, nem cruzassem qualquer outra linha do desenho.

A solução do primeiro problema é simples. Para resolver o segundo pro - blema, devemos desenhar linhas de 1 para 1 e de 2 para 2, teremos uma curva simples fechada. O ponto 3 está no interior e o outro 3 no exterior. A topo- logia nos diz que é impossível ligar estas regiões sem cruzar a curva.

.....

Se partimos de C passaremos atrvés de BAD e retornaremos a C. Em topologia todas essas figuras são chamadas "curvas simples fechadas" ou "circuitos fechados". Cada uma delas éformada por dois arcos ABC e ADC que tem sòmente os pontos A e C em comum.

As figuras geométricas seguintes são tôdas curvas fechadas simples, formadas pelos arcos ABC e ADC. Não altera se os arcos são retos ou curvos.



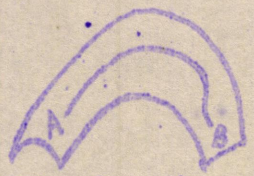
Em tôdas as figuras o ponto O é interior à curva fechada e o ponto X exterior. A linha OX cruza um arco da curva fechada. Por mais que essas figurafiguras possam ser mudadas por alongamentos OX cruzará um arco da curva. O arco fechado ABCDA não tem furos, OX passa através do arco.

A idéia de "não ter furos" é muito simples e importante, é chamada CONTINUIDADE. Atualmente não se sabe se a linha tem ou não buracos, mas vamos assumir que a linha é contínua.

Uma curva fechada divide o plano em duas partes, uma interior outra exterior. Para passar de uma parte para outra temos que cruzar a curva. Isto continua verdadeiro ainda que mudemos a forma da curva fechada. Isto é, sempre cruzamos a curva para ir de seu interior para seu exterior, mesmo que deformemos a figura, êste cruzamento é chamado INVARIANTE. Uma situação em topologia que não muda através de uma distorção é chamada INVARIANTE. Quando deformamos uma figura por exemplo, uma linha reta numa curva, ou um quadrado num círculo, fizemos uma MUDANÇA TOPOLÓGICA ou uma TRANSFORMAÇÃO TOPOLÓGICA. Estas transformações mudam o tamanho ou a forma da figura mas não formam uma nova figura topológica. Se cortamos, rompemos ou dobramos uma linha ou superfície, mudamos a linha ou superfície, que terá uma nova feição. Assim uma transformação topológica é feita sem cortar, romper, dobrar ou perfurar buracos.

No círculo ABCD, outra propriedade invariante é a ordem dos pontos A, B, C, D, -- Vimos que alongamento de uma linha AB, conserva-se o caminho de A para B, sem cruzar-se. - Em topologia um círculo pode ser transformado numa elipse ou num quadrado e uma reta pode tornar-se curva. Quando juntamos as extremidades de uma linha AB teremos uma nova figura, uma curva fechada.

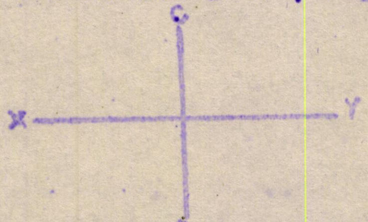
A distância não tem significado em topologia. Dois pontos distantes de uma polegada podem fàcilmente, por um alongamento, ficarem distantes de duas polegadas. Do mesmo modo à grandeza de um ângulo é insignificante, espichando uma fôlha de borracha podemos transformar um ângulo de 15º. A linha reta também não tem significado em topologia, porque uma linha reta AB pode ser transformada numa curva por um alongamento da fôlha.



A reta não só tornou-se curva, como também alterou o comprimento.

Usualmente pensamos os objetos como duros e rígidos. Êles conservam sua forma por anos e anos, não consideramos o fato de terem sido movimentados. Quando um aeroplano vôa ao longe, êle nos parece menor. Mas, sabemos que conserva seu tamanho onde está. A Geometria Euclidiana é o estudo dos objetos que conservam a grandeza. Topologia é o estudo dos objetos que podem mudar em tamanho e forma quando movimentados. Parte da idéia que há corpos não rígidos, as coisas podem mudar em grandeza, forma e posição.

Podemos pensar uma linha como sendo um cordel (fio, barbante). Se um ponto pertence a linha, êle permanecerá na linha, ainda que esta seja torcida, espichada ou curvada de muitos modos diferentes. Também dizemos que a linha é contínua, não há "furos". Quando uma linha cruza outra, passa através de um ponto da outra. Por exemplo, a linha CD passa através de um ponto de XY.

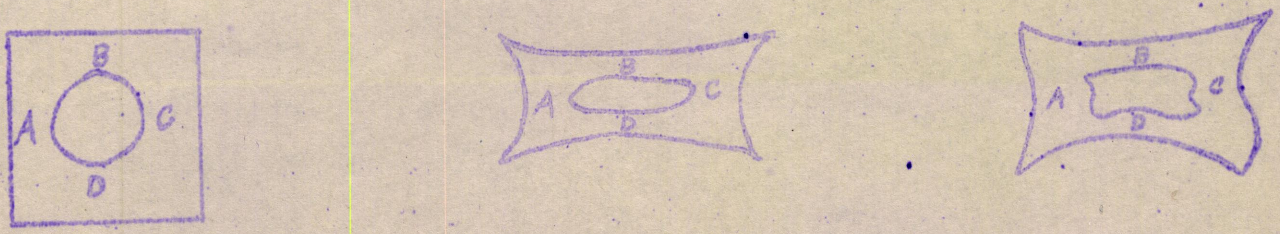


Muitas das propriedades das linhas e figuras mudam na "geometria" da fôlha de borracha, o que nos leva a pensar que nada permanece. Isto não é verdade, consideramos a linha AB (pag. anterior). Por mais que alongamos ou curvamos a fôlha, o caminho de A para B conservou-se, sem cruzar a si próprio. A linha pode tomar-se curva ou alongada, mas conserva-se a linha ou caminho de A para B. Em topologia uma linha ou caminho dêsse tipo é chamado arco AB.

COMO AS FIGURAS GEOMÉTRICAS MUDAM EM TOPOLOGIA

O que dissemos sôbre linhas simples como AB, também se aplica à linhas que formam figuras geométricas, como círculos ou triângulos.

Vejamos o que acontece com o círculo numa fôlha de borracha. Alongando a fôlha o círculo muda sua forma e tamanho. No entanto, quando espichamos a fôlha conserva-se o caminho ABCDA. Vemos também que nesse caminho, partindo de um ponto retornaremos ao mesmo ponto.

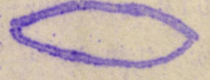
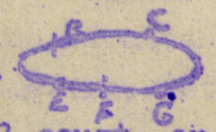


De fato, as quatro descobertas de Euler mostram que são necessárias

exatamente duas viagens. Quando Euler estava trabalhando com o problema das pontes de Koenigsberg, percebeu que estava trabalhando com um nôvo tipo de geometria. Viu que os modêlos não dependiam do tamanho nem da forma da figura. Estas idéias cresceram e tornaram-se um nôvo ramo da matemática, chamado topologia. Os gráficos que temos estudado não tem sido contados com comprimento, área, ângulo ou forma. Em lugar dessas idéias, têm sido importante os lugares, e como êsses lugares são ligados por arcos. Em geometria, estudamos as propriedades das figuras que permanecem ás mesmas, quando movemos a figura sem alterar sua forma. Por exemplo, um círculo tem um certo raio, diâmetro e circunferência, sua área não muda se movemoso círculo de um lugar para outro. Em <u>geometria</u> quando movimentamos figuras o movimento é rígido; isto é não alteramos a forma da figura. Em <u>topologia</u> podemos mover figuras e mudar sua forma torcendo ou alongando, esquecendo o comprimento ou a distância, ângulos e arcos. Em topologia, estudamos as propriedades das figuras que se conservam (propriedades invariantes) sob uma distorção.

Apliquemos o que vimos para os gráficos ás curvas estudadas anteriormente. O mais simples de todos os gráficos, é um arco como AB

A ____________ B . A e B são os vértices do arco. Outro gráfico simples é a curva fechada AB com 2 vértices e dois arcos. No entanto, podemos localizar outros pontos sôbre AB

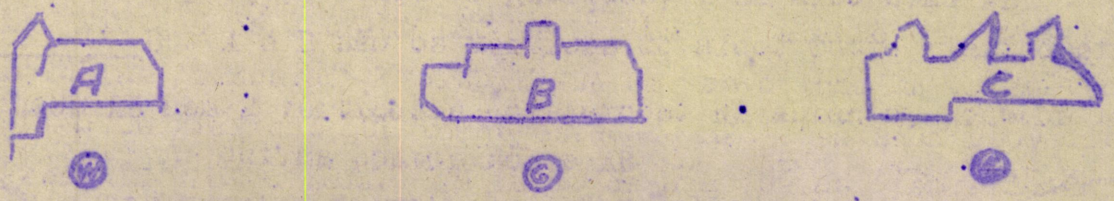
A  B assim a curva pode ter muitos vértices: A  D

Exemplos de gráficos complexos são as linhas sôbre um basketball court, ou as cidades e estradas sôbre um mapa rodoviário.

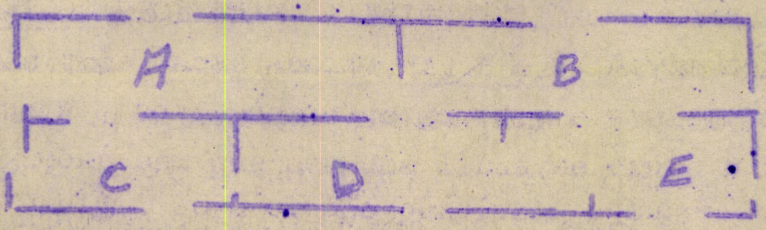
EXERCÍCIOS :

GRÁFICOS PROBLEMAS E ENIGMAS.

1. As três casas abaixo, A, B e C, devem ser ligadas ao depósito principal de água W , ao depósito de gaz G , e a eletricidade; E . É possível fazer as ligações sem que nenhuma linha se cruze ? Desenhe o gráfico para auxiliá-lo a decidir se é ou não possível. Sombreie o desenho como no problema do Califa, isto o auxiliará a encontrar a resposta do enigma.



2. É possível percorrer em uma única viagem , a casa cuja planta baixa é mostrada na figura seguinte e passar uma e sòmente uma vez por cada porta ? Tente desenhar o gráfico correspondente a esta figura. As salas serão os vértices e as portas os arcos.

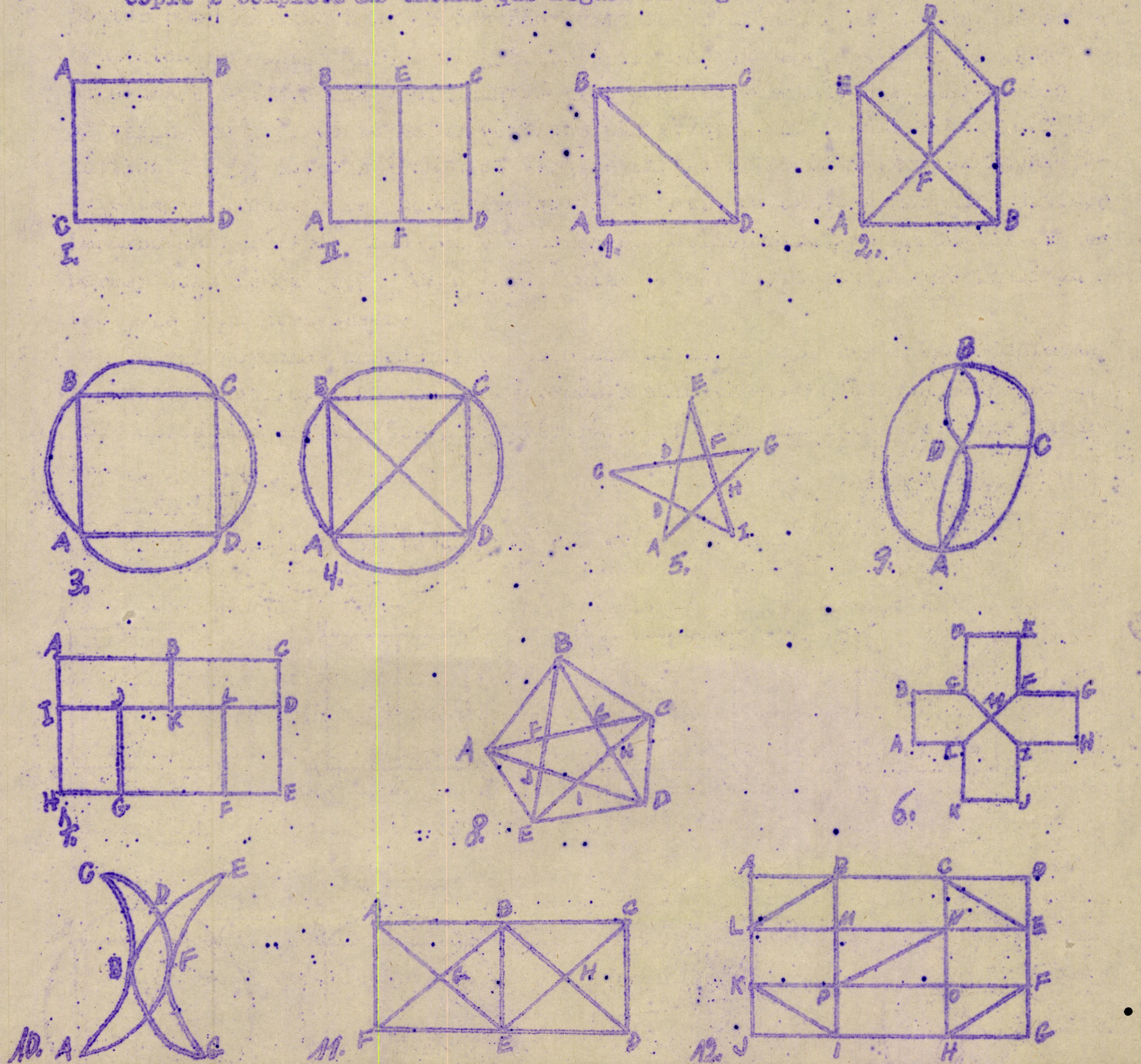


O diagrama do problema das pontes de Koenigsberg é chamado GRÁFICO. Os pontos onde as linhas se cruzam são chamados vértices, e as linhas que representam as pontes ARCOS. Um gráfico é traçado passando através de cada arco uma e sòmente uma vez. Cada vértice pode ser cruzado qualquer número de vêzes. No gráfico acima os vértices são A, B, C, D. O número de arcos do vértice A é 3; então A é chamado vértice IMPAR. B também é vértice ímpar, pois tem 5 arcos. Euler descobriu que deve haver um certo número de vértices ímpares num gráfico, para que êle possa ser atravessado uma única vez sem passar duas vêzes pelo mesmo arco. Euler tambem descobriu outras importantes leis para atravessar.

Talvez possamos descobrir o mesmo com os exercícios seguintes. Copie as figuras geométricas. Estude os vértices e atravésse os gráficos para ver se pode descobrir as relações entre vértices dos gráficos fechados, como Euler fez.

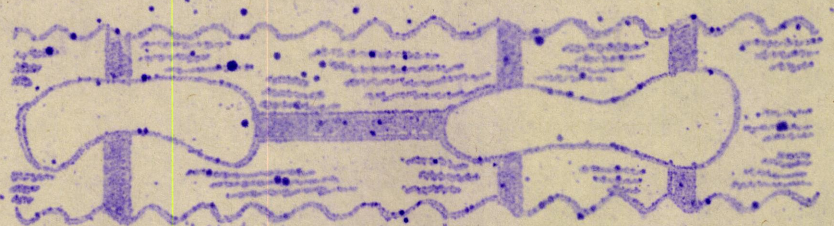
EXERCÍCIO :

Copie e complete as tábuas que seguem as figuras.



à margem do Rio Preger, que atravessava a cidade e era cruzado por sete pontes. Estas pontes ligavam as margens do Rio às duas pontes, e também ligavam as pontes entre si.

Um dia, um morador da cidade, fez a seu vizinho a pergunta : "Poderia você fazer seu passeio dominical cruzando cada uma de nossas sete pontes, e passando por cada ponte sòmente uma vez ? - O problema intrigou ao vizinho e a muitas outras pessoas de Koenigsberg. Pensaram seriamente na questão, mas ninguém a solucionou.



O problema chamou a atenção de um matemático suíço chamado Zeonhard Euler, que servia na côrte da imperatriz da Russia Catherine a Grande, em St. Petersburg. Euler focalizou seu estilo matemático no problema, e deu a solução : As pontes não poderiam ser cruzadas da maneira proposta pelo problema. Tálvez o homem que o propôs ficasse desapontado, mas teria ficado menos desagradado se tivesse sabido que solucionando o problema de Euler fundou o ramo da matemática que estamos examinando : topologia.

ATRAVESSANDO GRÁFICOS (networks)

Para solucionar o problema das pontes de Koenigsberg, Euler não teve necessidade de ir a Koegnisberg. Permaneceu em Petersburg e faz o que os matemáticos comumente fazem : desenhou o diagrama do problema. Neste diagrama a terra foi representada por pontos, e as pontes por linhas ligando êstes pontos. Agora podemos trabalhar no problema com um lápis, como Euler fez. Vemos que não é possível desenhar a figura b , partindo de qualquer ponto e retornando a êste ponto sem cruzar nenhuma linha nem levantar o lápis do papel. Com êste desenho Euler inventou networks e descobriu relações que tem sido muito valiosas em topologia.

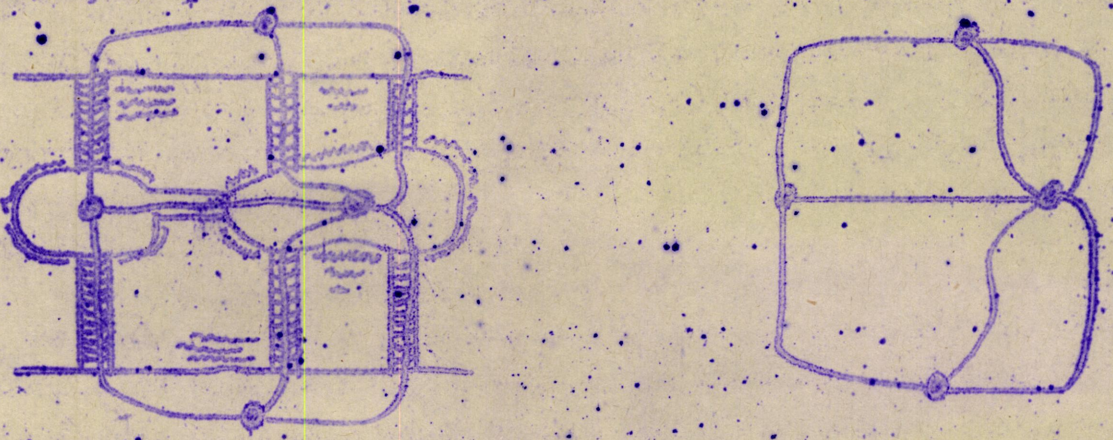


figura B

"Como poderia você cortar alguma coisa em duas partes e obter uma única peça ?" perguntou F. F.

Paul era modesto. Nunca tinha discutido. "Vamos tentar", disse. foram para o escritório de Paul. Êste tomou uma faixa de papel, e colocou as extremidades dando uma meia torção numa delas do modo mesmo que no cabo condutor.

"Isto é uma faixa de Moebius" disse Paul. Tomou uma tesoura marcou um ponto no centro da faixa e cortou-a longitudinalmente em duas. Resultou uma faixa com o dôbro do comprimento e a metade da largura, e duas meias torções.

Ford Fordsen convenceu-se. Foi cortar o cabo em dois. Nesse ponto um homem chamado Loud Month Jonhson chegou para ver qual a solução que ocorrera a Paul, fez uma crítica destrutiva sôbre o assunto.

"Se você corta a corrêia em dois longitudinalmente, no final terá dois cabos com a metade da largura e o mesmo comprimento."

"Não," disse F. F. "esta é uma faixa especial chamadafaixa de Moebius."

"Quer apostar ?" disse Loud Month jonhson.

"Seguramente," disse F. F.

Apostaram mil dólares e lògicamente F. F. ganhou. Jonhson ficou tão espantado que por seis meses. Quando finalmente retornou encontrou Paul Bunyan preparando-se para cortar a corrêia em duas longitudinalmente pela segunda vez.

"Que idéia é essa ? perguntou Johnson.

Bunyan disse "O túnel tem progredido muito e o material a ser levado não é tão pesado como era. Assim cortarei novamente o cabo."

"Onde está Ford Fordsen ?"

Bunyan disse, "foi à cidade trazer material para costura do cabo, quando eu tiver efetuado o corte longetudinal terei dois cabos com o mesmo comprimento e a metade da largura. Assim terei que costurá-los".

Johnson não acreditou em seus ouvidos. Viu a chance de recuperar seus mil dólares "Quando você tiver cortado terá sòmente uma corrêia com o dôbro do comprimento e a metade da largura. Quer apostar ?

"Seguramente."

Apostaram mil dólares e Johnson perdeu novamente. Não era tanto que Paul fôsse brilhante, êle era metódico. Tinha tentado antes com a fita de papel colada e sabia que na segunda vez a faixa de Moebius iria ficar dividida em duas partes mas vinculadas como se fossem os elos de uma corrente.

A TOPOLOGIA SOLOCIONA PROBLEMAS INTERESSANTES

O PROBLEMA DA PONTE E TOPOLOGIA

No século dezoito, na pacata cidade germânica de Koenigsgberg (agora cidade russa de Kaliningrad), aos domingos as pessoas passeavam

Nº de meias torções	Nº de lados e bordos	tipo de corte	Resultado do corte (n. de faces e bordos, n.de cumpr. e larg., torções e voltas e nrs.
0	2	centro	2 faixas separadas
1	1	Centro	1 faixa com duas torções
1	1	1/3	2 faixas encadeadas
2	2	Centro	2 faixas encadeadas
2	2	1/3	2 faixas encadeadas
3	1	Centro	1 faixa, 1 nó (Knot)
3	1	1/3	2 faixas encadeadas, 1 nó (Knot)

A história legendária Paul Bunyen mostra que a faixa de Moebius tem alguma aplicação prática.

PAUL BUNYAN VERSUS A CORRÊIA CONDUTORA

Um dos mais brilhantes sucessos de Paul Bunyan não foi devido a seu pensamento brilhante, mas a sua cautela e cuidado. Foi o famoso negócio do cabo condutor.

Paul e seu mecânico, Ford Fordsen, trabalhavam em uma mina de urânio do Colorado. O minério era transportado continuamente por um cabo que corria meia milha para fora da mina e meia milha retornando a ela dando um total de uma milha de comprimento. Tinha quatro pés de largura. Corria sôbre uma série de roldanas, que eram dirigidas por um motor montado na transmissão de Paulo um grande caminhão "Babe". Os construtores do cabo, o tinham feito sem nenhuma costura e colocaram uma meia torção na parte do retôrno, assim o desgaste seria o mesmo em ambas as bordas.

Após vários mêses de trabalho, a galeria da mina tornou-se duas vêzes mais longa, mas a quantia do material a ser levado para fora era menor. Paulo decidiu que seria necessário um cabo com o dôbro de comprimento e a metade de largura. Falou a Ford Fordsen para cortar o cabo em dois, longitudinalmente.

"Isto nos dará dois cabos", disse F. F. "Teremos que cortá-los e costurá-los juntos. Você terá que ir à cidade buscar material para duas costuras de cabo".

"Não", Disse Paul, "Êste cabo tem uma meia torção - o que torna - é uma faixa de Moebius".

"Que diferença faz ?" perguntou F. F.

"A faixa de Moebius," disse P. B. , "tem sòmente uma face e um limite - se a cortarmos em duas longitudinalmente teremos uma única peça. O cabo resultante terá o dôbro do comprimento e a metade da largura".

GRÁFICO	VÉRTICES PARES	VÉRTICES IMPARES	PODE SER ATRAVESSADO
I	4	0	SIM
II	4	2	SIM
1.	2	2	S
2.	0	6	N
3.	4	0	S
4.	1	4	N
5.	10	0	S

GRÁFICO	VÉRTICES PARES	VÉRTICES IMPARES	PODE SER ATRAVESSADO
6.	9	4	N
7.	4	8	N
8.	10	0	S
9.	2	2	S
10.	8	0	S
11.	2	6	N
12.	14	2	S

RESPÓSTAS :

DESCOBERTAS DE EULER SÔBRE GRÁFICOS

Muitos dos problemas de topologia são resolvidos por gráficos. O estudo dos gráficos anteriores respondem as perguntas seguintes acêrca das relações entre vértices e arcos.

1. Têm sempre um arco origem e extremidade ?
2. Se dois arcos se encontram, o que é verdadeiro sôbre seus vértices ?
3. São tôdas as partes de um gráfico ligadas por arcos ?
4. Pode um gráfico ser percorrido em uma única jornada, se tem sòmente dois vértices ímpares ?
5. Pode um gráfico ser percorrido em uma jornada, se tem mais de dois vértices ímpares ?
6. Pode um gráfico ser percorrido em uma única jornada, se tem sòmente vértives ímpares ?
7. Pode um gráfico ser percorrido em uma única jornada se tem sòmente dois vértices pares ?
8. Pode um gráfico ser percorrido em uma única jornada se tem mais do que dois vértices pares ?
9. Pode um gráfico ser percorrido em uma única jornada se tem todos os vértices pares ?

Encontrando respostas para perguntas dêste tipo, Euler fez quatro descobertas gerais sôbre gráficos. Primeiro, mostrou que o número de vértices ímpares é sempre par se o gráfico pode ser percorrido em uma única jornada. Tente percorrer um gráfico com um número ímpar de vértices ímpares em apenas uma jornada. Se você conseguir, será um matemático famoso.

Depois, Euler mostrou que o gráfico que tem todos os vértices pares poderia ser atravessado em uma única jornada.

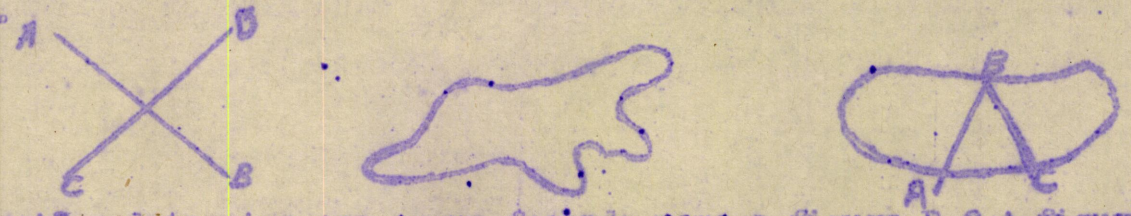
Voltemos ao problema das pontes de Koenigsberg. O gráfico possui 4 vérives ímpares, o que significa que é impossível percorrê-lo em uma viagem. De fato, as quatro descobertas de Euler mostram que são necessárias, Respostas :

1 - impossível

2 - impossível.

GRÁFICOS, REGIÕES E UMA FÓRMULA IMPORTANTE.

Uma das perguntas feitas sôbre os gráficos é o número de partes, ou regiões, em que o gráfico divide o plano. Por exemplo, na figura a há sòmente uma região. Podemos ir de um ponto para outro no plano sem cruzar o gráfico.



Quantas regiões determina uma curva fechada como a figura B ? A figura C determina quatro regiões no plano.

Que realacionamento existe entre regiões, arcos e vértices ? Estudando os gráficos do exercício 5 podemos descobrir as relações entre o número de vértices (V) , o número de arcos (A) e o número de regiões (R) do gráfico.

EXERCÍCIO:

EXPERIÊNCIAS COM GRÁFICOS E REGIÕES.

Copie e complete a tabela que segue as ilustrações, para cada gráfico, e veja se pode estabelecer a fórmula que relaciona as três variáveis V, A e R.

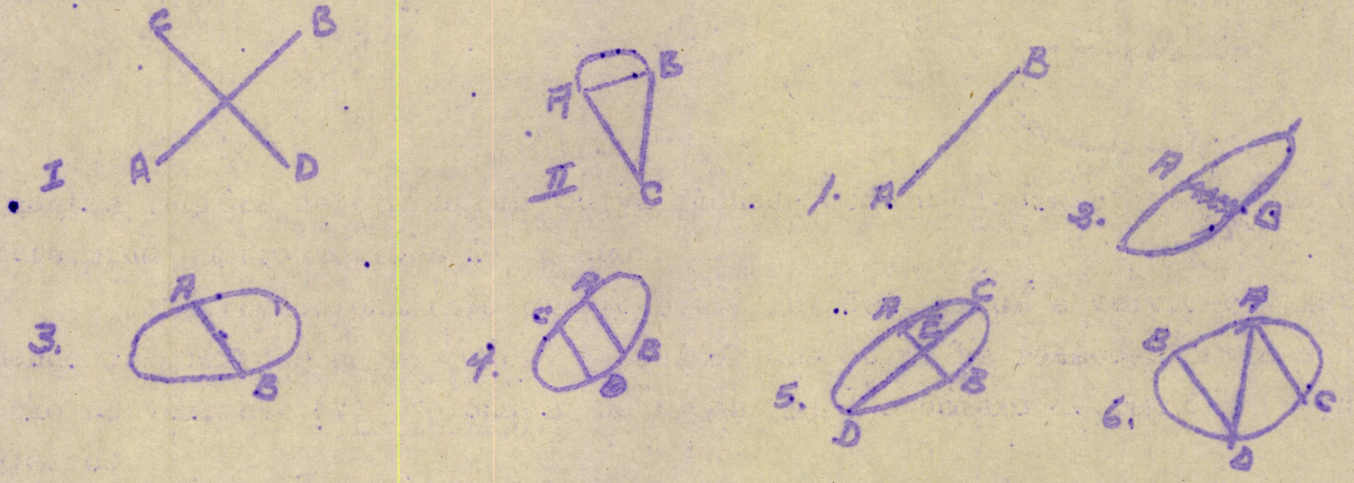
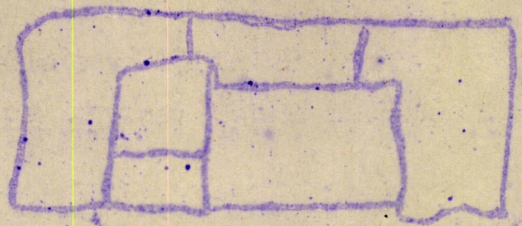


GRÁFICO	V= nº de VÉRTICES	A= nº de Arcos	R= nº de Regiões
I	5	4	1
II	3	4	3
1.	2	1	1
2.	2	2	2
3.	2	3	3
4.	4	6	4
5.	5	8	5
6.	4	7	5



3. Desenhe um mapa com 10 regiões que possa ser colorido com três côres -, de tal modo que duas regiões com o mesmo limite tenham côres diferentes.

4. Divida um círculo em regiões com linhas, tais que não passem 3 linhas pelo mesmo ponto. Qual é o maior número de regiões formadas por cada número de linhas ? Copie e preencha a tabela.

Nº DE LINHAS	Nº DE REGIÕES
1	
2	
3	
4	
5	

Qual a diferença do número de regiões para cada corte ? Quantas regiões você poderia predizer para seis linhas ?

RESPOSTAS:

2. São possíveis muitos arranjos distintos
3. ______
4. Número de regiões : 2, 4, 7, 11, 16
Diferenças : 2, 3 , 4 , 5
Com seis linhas : 22 regiões .

UM OLHAR TOPOLÓGICO AO NOSSO MUNDO TRI-DIMENSIONAL.

CLASSIFICANDO FIGURAS TOPOLÓGICAS.

Naturalmente, poderíamos considerar a topologia aplicada aos objetos tri-dimensionais, como as esferas, cubos, rosquinhas , e é objetos que ocupam o espaço.

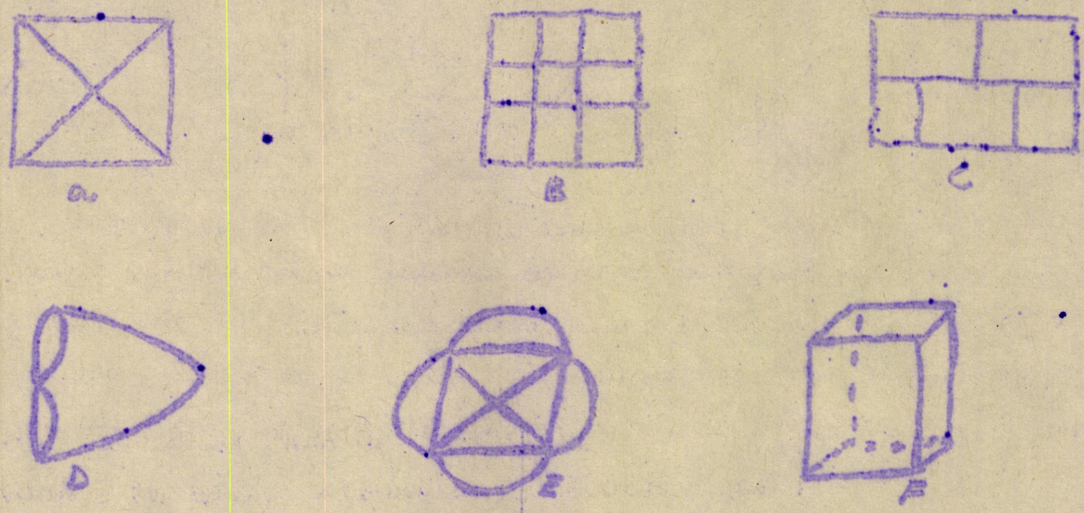
Em topologia, uma esfera é semelhante a um círculo. Pois, divide o espaço em uma região interior e outra exterior. Um cubo ou uma pirâmide fazem o mesmo. Para ir de um ponto interior , o caminho qu linha cruza a superfície do objeto em um ponto. Novamente dizemos que não há furos na superfície do objeto, do mesmo modo que não há furos na linha. Isto significa que a superfície é contínua. Uma superfície fechada que divide o espaço em duas regiões, uma exterior e outra interior, é uma superfície fechada simples . Assim a esfera, o cubo e a pirâmide são superfícies fechadas simples. Uma superfície fechada simples, como um cubo ou uma pirâmide, podem ser transformada numa esfera por distorção. Qual a diferença entre uma curva fechada simples e um anel ou entre uma esfera e uma rosquinha ? A topologia diz que a linha ou superfícies são conectas . E a topologia fala-nos que podemos mudar ou transformar uma figura ou objeto em outra diferente figura ou objeto. Por exemplo, consideremos um anel sôbre uma superfície chata, como na figura seguinte :

FÓRMULA DE EULER PARA OS GRÁFICOS.

Se você é um sábio matemático, descobria que :

$V - A + R = 2$.

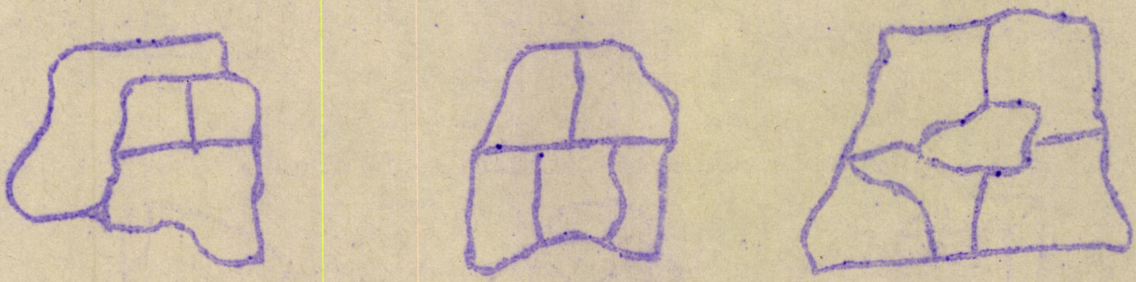
Esta é a fórmula de Euler para os gráficos que expressa uma das mais importantes propriedades de gráficos. Veja se é verdadeira para os seguintes gráficos.



O PROBLEMA DO MAPA DAS QUATRO CÔRES.

Um dos mais famosos problemas insolúveis em matemática relacionado com gráficos e regiões, é o problema do mapa das quatro côres.

Os desenhos seguintes ilustram alguns possíveis mapas. Copie êstes mapas e pinte-os de modo que o limite entre duas regiões tenham côres diferentes.



É possível colorir todos êsses mapas usando sòmente quatro côres distintas. No entanto, nunca foi matemàticamente provado que quatro côres são suficientes para todos os mapas. Foi provado que cinco côres são suficientes para colorir alguns mapas, e que são necessários pelo mínimo quatro côres para pintar outros mapas. Mas os matemáticos não provaram que quatro côres são necessárias e suficientes para colorir todos os mapas. Se você quer tornar-se famoso, encontre um mapa que necessite cinco côres para ser colorido dêsse modo, ou prove que quatro côres são suficientes.

EXERCÍCIO:

MAPAS E CÔRES

1 //

2. Copie o mapa seguinte. Pinte-o utilisando quatro côres, de tal modo que duas áreas que tenham o mesmo limite sejam coloridas com côres diferentes.