Número e origem
de sua
Contagem.

198[illegible]

IV O número e a origem de sua notação.

a) O nível de abstração do número.

O número é uma propriedade dos conjuntos.

Depois de estar familiarizados com os conjuntos, as crianças não encontrarão dificuldade de dizer ~~qualquer~~ alguma coisa sôbre conjuntos e a organizar na mesma classe todos os conjuntos dos quais se pode dizer a mesma coisa. É preciso lembrar-se que qdo se passa dos conjuntos aos números, troca-se de universo: passa-se do universo dos objetos ~~aquêle~~ ao dos conjuntos. "Amarelo" é uma propriedade ligada a certos objetos do universo dos objetos coloridos. "Três" é uma propriedade ligada a um conj. de tais objetos, por exemplo ao conjunto dos triângulos grandes delgados ou ao dos círculos pequenos espêssos. "Dois" é uma propriedade ligada a conjuntos como aos dos círculos azuis espessos ou ao dos retângulos amarelos pequenos.

"Quatro" é uma propriedade dos conjuntos como aos dos quadrados vermelhos ou aos dos triângulos azuis. Poder-se-á empregar a letra N como abreviação para designar "o número de elementos do conjunto"...; ~~não~~ há muito poucos riscos de confundi-la com o N da negação. Aliás, é muito útil ensinar às crianças o mais cêdo possível que o mesmo símbolo pode representar coisas diferentes, assim como símbolos diferentes podem representar a mesma coisa. Importa ~~be~~ compreender ~~bem~~ que os símbolos não são de maneira nenhuma propriedades das coisas simbolizadas, mas simples convenções destinadas a evocar aquilo que é simbolizado.

O símbolo N{círculos ~~pequenos~~ pequenos espessos} representa assim o número de elementos que formam o conjunto de todos os círculos pequenos espessos. Vê-se que é a mesma propriedade

```
000   000   000
000   000   000   000  0
000   000   000

000000000
000000000        000  0
000000000
```

Passar-se-á em seguida para o "jôgo a quatro", ao "jôgo a 5", ao "jôgo a seis", etc... Por ex, no jôgo a 4, o agrupamento se acabará desde o 2º dia, assim:

```
0000  0000  0000  0000  0000  0000  0000  000

0000   0000
0000   0000
0000   0000   000
0000
```

um grupo do 2º dia, 3 grupos do 1º dia; um ~~grupo~~ do dia de abertura (isolado).

No jôgo a 5, o agrupamento será:

```
00000  00000  00000  00000  00000  00000  0

00000
00000
00000
00000   00000   0
00000
```

e assim por diante. Pode-se ir até o "jôgo a dez", o que dará:

0000000000 0000000000 0000000000 0

Êstes jogos proporcionam as 1as experiências conduzindo à noção matemática de potência de uma base dada. Há lugar então para introduzir um simbolismo, o que pode se fazer de diferentes maneiras. Por exemplo, uma espécie de simbolismo bastante "doce" (fácil?) poderia ser o seguinte:

	Grupos do 4º dia	Grupos do 3º dia	Grupos do 2º dia	Grupos do 1º dia	Grupos do dia de abertura
Jôgo a 2	1	1	1	1	1
Jôgo a 3		1	0	1	1
Jôgo a 4			1	3	3
Jôgo a 5			1	1	1
Jôgo a 10				3	1
Jôgo a 11				2	9

utilizar as cifras simultâneamente de diversas maneiras diferentes, porque para conhecer o número de pessôas presentes num grupo tem-se necessidade de saber 2 coisas:

1º Qual é o jôgo que se joga: a 2, a 5, a 4, etc...

2º Qual o dia em que o grupo foi formado: grupo do 1º dia, do 2º dia, do 3º dia, etc...

Convirá descrever a magnitude de um grupo escrevendo os 2 dados acima: 1º o número que caracteriza a natureza do jôgo, depois ao alto, à direita o número do dia em que o grupo se formou. Por ex:

2^4 significa: o número de pessôas num grupo do 4º dia para um jôgo a 2.

4^2 significa: o número de pessôas num grupo do 2º dia, para um jôgo a 4.

Êstes dois números valem 16; mas isto é um acidente matemático; reconhece-se fàcilmente que 2^3 (8) é diferente de 3^2 (9).

Vê-se que o mesmo número se escreve de duas maneiras diferentes como 2^3 e 8; fica à intuição do professor escolher qual o símbolo que deve ser introduzido primeiro, e de decidir em que momento convém introduzi-lo; nós não temos sôbre êste ponto indicações válidas científicamente.

Cada vez que se decide um jôgo, escolhe-se o número segundo o qual se farão os agrupamentos; êste número é a base do jôgo. O jôgo a 2 utiliza a base 2, o jôgo a 3 a base 3, etc.. A numeração ordinária se fundamenta sôbre o agrupamento por dez, pois sôbre a base dez; a maneira de escrever êste número, (ou a "figura" dêste número) a saber o símbolo ~~dez~~ 10, exprime que no jôgo a dez, dez pessôas ou objetos formam, um grupo do 1º dia, (dezena) e zero o grupo do dia de abertura (unidades); os grupos do 2º dia, ou dezenas de dezenas, formam centenas e assim ~~por~~ diante.

N{ quadrados grandes ~~espessos~~ } = 3

N{ quadrados azuis delgados } = 2

a reunião dêstes dois conj. é formada de quadrados delgados que são grandes ou azuis, o que faz 4 elementos sòmente; os números "não se adicionam". Mas, se se toma {quadrados grandes delgados} reunidos com {quadrados grandes espessos}

obtém-se

N{ quadrados grandes delgados } + N{ quadrados grandes espessos } = 3 + 3 = N{ quadrados grandes } = 6.

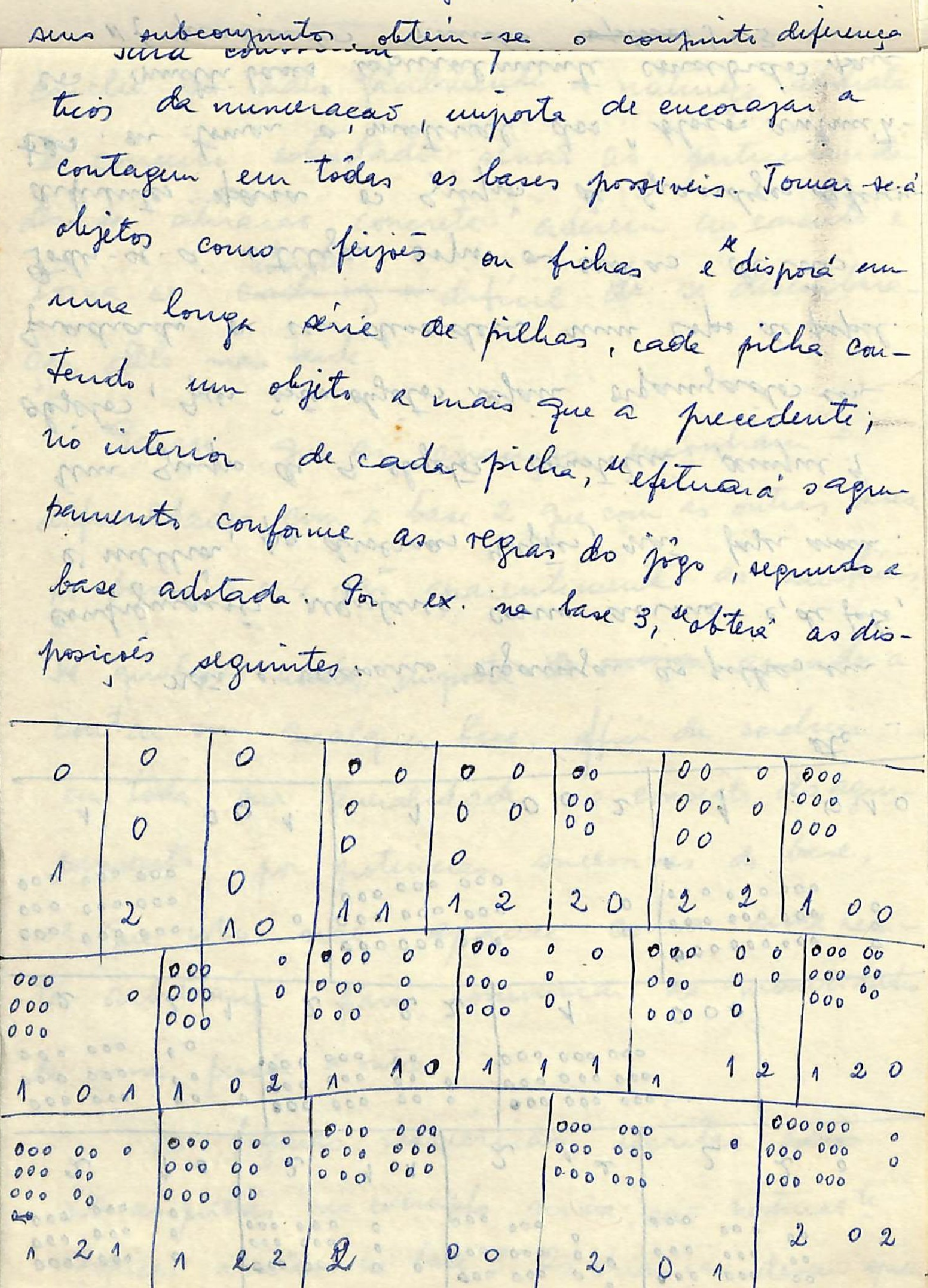
Neste caso os números "se adicionam".

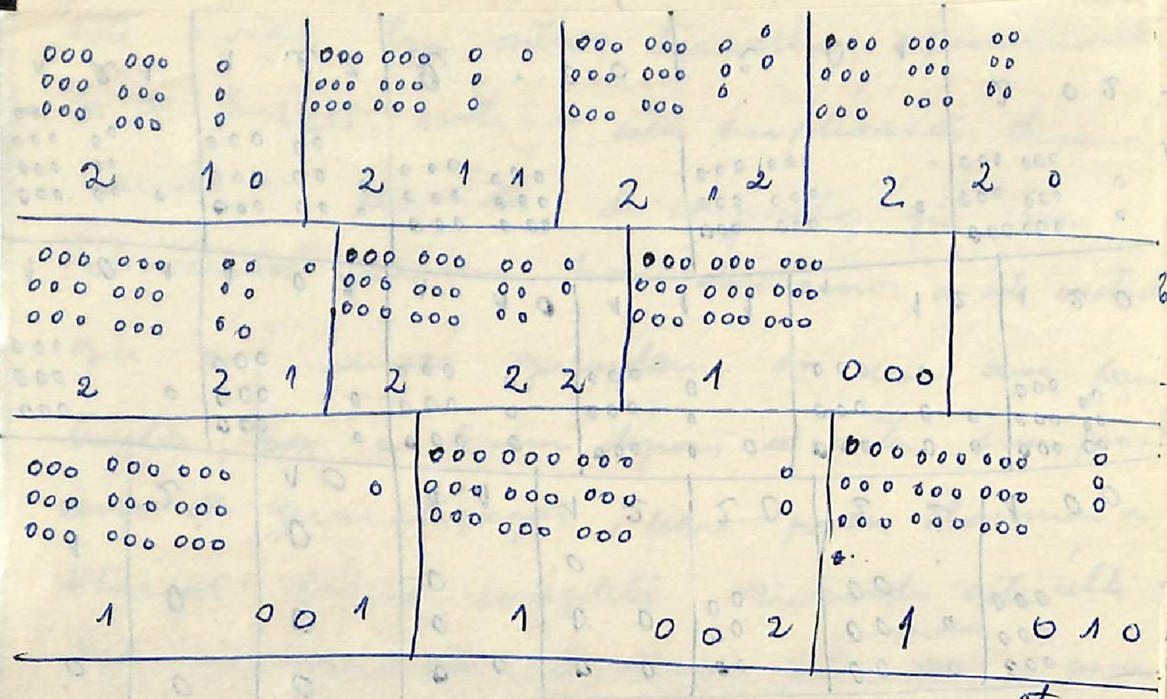
Em consequência a operação de adição dos números repousa sôbre a operação dos conjuntos que não têm elementos comuns, isto é, cuja intersecção é vazia. Será necessário muitos exercícios práticos para compreender este noção. Em outros trabalhos, especialmente os de Suppes, evita-se esta complicação eliminando a reunião de conjuntos que tem elementos comuns. Nós objetamos a êste método que as crianças aprendam 1º um caso particular, ~~pa~~ e devem depois executar um processo de generalização, para poder dominar a situação lógica completa quando esta última se apresenta. Diversos fatos ~~dão~~ levam a pensar que as crianças tem mais dificuldade de generalizar um conceito já formado, que formar de início um conceito mais geral.

c) A subtração dos números.

A operação que consiste em formar a diferença de 2 conjuntos conduz muito naturalmente à operação que consiste em encontrar a diferença de dois números, isto é, a subtração. Quando de um conjunto se retira um de seus subconjuntos obtem-se o conjunto diferença

tios da numeração, importa de encorajar a contagem em tôdas as bases possíveis. Tomar-se-á objetos como feijões ou fichas e dispor-se-á em uma longa série de pilhas, cada pilha contendo um objeto a mais que a precedente; no interior de cada pilha, se efetuará o agrupamento conforme as regras do jôgo, segundo a base adotada. Por ex. na base 3, se obterá as disposições seguintes.





etc. –

não é necessário organizar as pilhas em configurações regulares como acima e, de fato, é melhor, por diversas razões, não fazer assim. Um grupo de 9 objetos constitui sempre 9 objetos, quer êstes objetos sejam organizados em quadrado ou em desordem num copo de papel. Poder-se-á utilizar copos ou caixas de côres diferentes para os grupos de grandezas diferentes, ou tomar o material dos "blocos aritméticos multibases" especialmente concebidos pa

conclui-se mais fàcilmente a natureza abstrata do conceito estudado; senão as particularidades da situação concreta "aderem ao conceito" e torna-se ~~cada vez +~~ muito difícil ~~de~~ se desembaraçar dêle mais tarde.

Parece que as crianças encontram + dificuldades com a base 2 que com as outras bases. As bases 3 e 4 são aparentemente as mais fáceis. De qualquer modo, importa ~~de ensinar~~ aprender a contar em qualquer base, afim de concluir em tôda sua generalidade o conceito do agrupamento por potências sucessivas de base, e que isto não aparece como uma receita arbitrária para comunicar as quantidades de uma pessoa à outra.

As figuras numéricas escritas ~~sobre~~ sob as pilhas, no exemplo acima, são naturalmente figuras escritas na base 3. As crianças devem apren der a figura correspondente a uma pilha qualquer, e inversamente a encontrar a pilha correspondente a uma figura dada. Pode-se organizar jogos entre as crianças; um deles dirá: "Eu penso na pilha dois zero dois, onde está ela?" e o adversário deve mostrar a pilha conveniente. Depois os papeis são invertidos e o vencedor será aquele que dará mais respostas corretas sôbre J questões por exemplo. Isto se pode fazer com pilhas de fichas, ~~tão~~ assim como com os blocos "multibases". Os grupos de uma espécie podem ser organizados para corresponder aos grupos de uma outra espécie; assim para a base 4 pode-se utilizar placas triangulares, porque 4 triângulos equiláteros formam um triângulo semelhante maior; os menores triângulos representam as unidades do dia de abertura, o de tamanho por diante.

— — — —

(a) Depois de ter feito exercícios de contagem em tôdas as bases, ou ao menos num certo número delas, pode-se começar a associar a noção de quantidade com a de ordem. Diante de uma série de coleções como as que vimos acima, pode-se ~~pôr~~ fazer perguntas às crianças. A pergunta mais elementar consiste em mostrar duas pilhas contíguas na série e (pedir ou) perguntar "quantas unidades a mais tem a coleção maior do que a menor"? As crianças não compreendem sempre o sentido exato desta pergunta; é frequente na manipulação dos blocos multibases, porque arrisca-se de esquecer que tôdas as peças são construídas em última análise por meio de cubos unidades.

Uma questão mais difícil consiste em mostrar 2 coleções separadas por uma coleção intermediária e perguntar qual contém mais unidades, depois quantas a maior contém + que a outra. Não é evidente para as crianças que passando de uma coleção à seguinte, o nº aumenta de uma unidade, que passando de uma coleção à precedente o nº diminui de uma unidade, que saltando uma coleção o número aumenta (ou diminui) de duas unidades. Para saber isto é necessário compreender que "um a mais e um a mais fazem dois a mais": isto é muito + difícil de compreender que "um e um fazem dois".

Há dois aspectos na conexão entre a quantidade e a ordem:

1º) "mais" está ligado ao fato de que se avança na sequência, e "menos" está ligado ao fato de que se recua;

2º) quando se passa de uma coleção à outra, [illegible] tantas unidades quantos passos.

O primeiro ponto é um aspecto qualificativo, o 2º um aspecto quantitativo da conexão. No 1º, trata-se de uma equivalência lógica entre:

"a coleção A contém mais unidades que a coleção B"

e

"a coleção A está + longe que a coleção B qdo se ~~avançamos~~ na sequência". e, inversamte, recuando na sequência encontra-se menos unidades por coleção.

Num 2º aspecto, trata-se de uma igualdade matemática entre:

"a quantidade que representa o excesso de unidades de coleção A sobre a coleção B" e

"o número de passos que é necessário avançar na sequência indo de B para A". É provável que a relação lógica deva ser aprendida antes da relação matemática correspondente.

As coleções são conjuntos.

[illegible]

Uma propriedade de uma coleção é o número de unidades nas quais pode-se decompô-la. A figura numérica de base 4 escrita ao lado desta coleção representa sob forma simbólica a propriedade do conjunto.

No curso dêstes exercícios, as crianças devem se familiarizar com o fato de que um mesmo número pode ser simbolizado por uma grande variedade de figuras; os jogos que nós indicamos facilitam esta noção. O número trinta e um é a propriedade do conjunto formado pelas crianças da classe:

o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o o

Mas a maneira como esta propriedade é expressa depende, entre outras, da maneira como se agrupa os elementos do conjunto. Ela será expressa por 11111 na base 2, por 1011 na base 3, por 133 na base 4, por 111 na base 5, por 31 na base 10, por 29 na base 11, etc...

6 - G. Brousseau

Les mathématiques du cours élémentaire. 1965.

e os pares se formam; obtém-se uma distribuição análoga à esta aqui: ("grupos do 1º dia"):

oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo oo o

oo oo oo oo oo oo oo oo

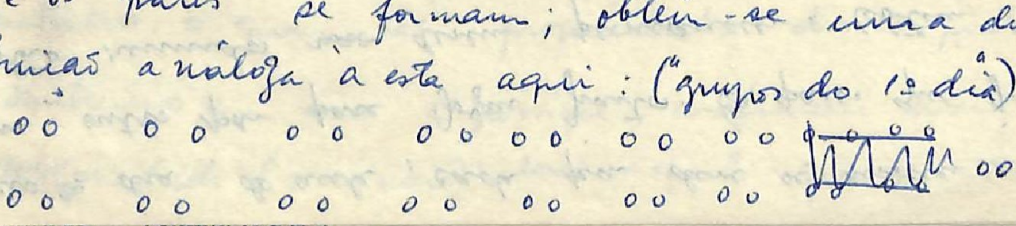
~~cristemas~~ Z. P. Dienes Le mathématique moderne dans l'enseignement primaire. France 1964.

<u>Subsídios para introduzir os sistemas de numeração.</u>

(pág. 53 a 68)

g) Processo a seguir no estudo das potências.

Trata-se do jôgo dos "agrupamentos" que servirá em 1º lugar para a introdução das potências. O melhor é talvez ~~de~~ agrupar as próprias crianças da classe. Admitamos por ex: que há 31 crianças. Decide-se que se está no ~~1º~~ dia de abertura das aula; as crianças começam a brincar e cada uma procura um companheiro; no 1º dia de aula pròpriamente dito, tôdas as crianças (salvo talvez uma) deverão vir à escola por pares. Decide-se que agora se está no 2º dia de aula e os pares se formam; obtém-se uma distribuição análoga à esta aqui: ("grupos do 1º dia"):



esta propriedade (o conjunto), o que ~~o que~~ significa trocar de universo de um caso a outro. Em linguagem ordinária, ~~não~~ é necessário nunca perder de vista de que se fala, o que evita o risco de acontecer quando se utiliza símbolos ~~dos~~ entre os quais as relações mútuas não são bem claras.

d) multiplicação dos números.

e convirá de colocar o sinal = entre êstes símbolos. Êste sinal de igualdade não se refere aos conjuntos em questão, mas à sua propriedade comum, relativa ao seu número. O símbolo 3, de fato, é utilizado para designar uma propriedade comum a 1 gde nº de conjuntos, a saber os conjuntos formados de 3 elementos. Esta transição do mundo dos conjuntos ao mundo + abstrato dos números será facilitada por instrumentos de trabalho destinados tanto aos alunos, como aos professôres, dos quais se encontrará a indicação nas referências (final do livro). Passa-se do universo dos objetos ao universo dos conjuntos, e as propriedades que permitiam de classificar os objetos, não determinavam + conjuntos, mas números; há um grande salto na abstração, mas as crianças se encantam de fazê-lo, contanto que se lhes proporcione as experiências convenientes para alicerçar esta nova abstração.

O número de elementos de um conjunto vazio ~~se~~ é designado pela cifra zero. Escreve-se simbòlicamente

$$N\{\ \} = 0$$

Por exemplo, tem-se $N\{\text{triângulos quadrados}\} = 0$

porque $\{\text{triângulo quadrado}\} = \{\ \}$.

1) A adição dos números.

A etapa seguinte, no processo de aprendizagem, parece definida muito naturalmente como sendo a construção das operações sôbre os números à imagem das operações sôbre os conjuntos. Depois de ter compreendido a distinção entre números e conjuntos, a igualdade dos números, os conjuntos vazios e o número zero, é possível de encontrar a noção de adição sôbre a noção de reunião de conjunto. Mas se apresenta uma dificuldade; os conjuntos que possuem elementos comuns, uma vez reunidos, não dão o mesmo Resultado numérico que

a escrita 31, aquisição que nós descrevemos tem por finalidade tornar as crianças capazes de inserir a notação decimal corrente, no esquema matemático mais geral e mais vasto que é o agrupamento ~~dos~~ em conjuntos (mesurés) por meio das potências da mesma base.

~~Algumas propriedades formais das cifras.~~

Arquivado em 23/10/1981
Wustalia

7. Adler, Irving

A matemática moderna

Publicações Europa-América

Lisboa

---

8. Revuz, André

Mathématique moderne, mathématique vivante.

O.C.D.L. 65, Rue Claude-Bernard

Paris 5e

---

9. La enseñanza de las matemáticas

Piaget, Beth e outros

---

10. Monteiro, Jacy

Álgebra moderna

---

matemática do curso de didática de matemática moderna. Bibl. de mat. I.E.

1 Papy. Mathématique moderne - 1
Didier

2 Castrucci - Elementos da teoria de conjuntos - G.E.E.M

3 M. Dumont
Étude Intuitive des ensembles
Dunod.

4 Varsavsky, Oscar
Álgebra para escuelas secundarias. Tomo I Matemática Intuitiva.

5. Eudeba - Editorial Universitaria de Buenos Aires.

6. Matemática moderna no ensino secundário - GEEM.