

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

ACTES

DU

PREMIER CONGRÈS INTERNATIONAL DE  
L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

CIEM - LYON, 24-30 agosto, 1969

E. FISCHBEIN

TRAD. A. B. Krebs

ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE ET  
DÉVELOPPEMENT INTELLECTUEL

### 1. O Desenvolvimento intelectual

Uma idéia quase comumente aceita na psico-pedagogia contemporânea é que a evolução psíquica da criança tem um carácter estádial, Isto significa que:

(1) A evolução se realiza por escalões sucessivos e cada etapa é caracterizada por uma organização específica relativamente estável, tornando-se instável nas extremidades.

(2) A evolução tem um carácter de sequência. Mesmo se, do ponto de vista cronológico, podemos constatar certos deslocamentos, a ordem de sucessão dos estágios é a mesma em todas as crianças.

(3) A passagem ao estágio superior não significa o abandono das aquisições precedentes e não apenas uma simples adição de novos aspectos. Cada etapa começa pela revalorização das aquisições precedentes com os meios característicos da nova etapa, depois do que se torna possível a valorização completa dos recursos oferecidos pelos novos meios.

Jean Piaget foi quem nos ofereceu a teoria mais consistente da evolução estádial (por etapas), resultado de pesquisas realizadas durante quase cinco decênios.

Recordemos brevemente estes estágios:

Após a primeira etapa da inteligência psico-motriz e após a do pensamento pré-conceitual, se desenvolve entre 4-7 anos o pensamento intuitivo. Ele aparece como um pensamento por imagens que se baseia de configurações do conjunto e não mais de coleções sincréticas como as do nível precedente. A coordenação das informações se submete a certos rudimentos de lógica, mas é uma coordenação instável, incompleta, que as informações perceptivas imediatas, podem, sempre, desorganizar. (Piaget, 1967, p. 139-149).

A idade de 7-12 anos representa o estágio das operações concretas. A criança chega a uma coordenação móvel e reversível da atividade mental, mas que funciona, somente, em relação à realidade concreta das coisas.



O confronto coerente dos pontos de vista neste estadio, torna possível a compreensão das relações espaciais e temporais objetivas. A síntese operatória entre permanência (a invariabilidade do padrão aí compreendido) e partição torna possível o aparecimento do conceito de medida (dos comprimentos, das superfícies, dos volumes), (Piaget e Inhelder, 1948a, b).

O estágio das operações concretas corresponde à possibilidade de inclusão hierárquica de classes, de seriação, da mesma maneira que de síntese, numa ação única de classificação e de seriação - o que permite a formação do conceito de número (Piaget e Szeminska, 1940)

Após a idade de 11-12 anos assistimos ao desenvolvimento das operações formais. O pensamento é capaz de se desdobrar (se dérouler) no domínio da possibilidade, efetuando operações sobre operações por meio (par l'intermédiaire) de um sistema proporcional. O pensamento formal é, pois, capaz de proceder de maneira hipotético-dedutiva, passando do possível ao real. Contrariamente ao pensamento concreto, que só ultrapassa o concreto aos poucos (de proche en proche), o pensamento formal é capaz de inventariar e de compreender o conjunto de possibilidades oferecidas pelas condições em causa (Piaget e Inhelder 1955).

Nós esquematizamos, muito brevemente, a evolução mental da criança, tal como é vista por Piaget. Esta teoria constitui hoje, o principal sistema de referência para os psico-genéticos mesmo se ela suscita alguma discordância.

## II. Desenvolvimento e aprendizagem

Tais são os traços gerais da evolução estadal. Qual poderá ser o lucro, da aprendizagem? (\*l'apport)

À primeira vista, a resposta parece simples: a aprendizagem facilita o desenvolvimento. Mas, uma análise mais demorada mostra que as coisas são mais complicadas.

Na realidade, a aprendizagem não se reduz à uma simples absorção de informações e à formação de mecanismos mentais sobre um terreno neutro. A aprendizagem implica um processo ativo de reconstrução, com meios intelectuais próprios, dos dados fornecidos. Isto significa que deve existir, em primeiro lugar, um sistema de meios tal que permita a reconstrução e assimilação dos conhecimentos. Estamos, ao menos na aparência, em pleno círculo vicioso: o desenvolvimento depende da aprendizagem mas, os efeitos da aprendizagem dependem, por seu turno, do nível de desenvolvimento dos meios intelectuais.

Há duas categorias de respostas para esse problema.

(a) O ponto de vista de Piaget e de seus colaboradores. Com referência ao progresso intelectual devemos distinguir o desenvolvimento das estruturas mentais fundamentais das diferentes aquisições parti-



culares ou empíricas (ver também, a profunda análise de Gréco, 1959). As estruturas fundamentais não podem ser adquiridas por um simples exercício, como é o caso para as aquisições empíricas. As estruturas derivam de estruturas. Seu progresso não pode ser acelerado ou desviado em limites muito estreitos. Citando os resultados experimentais de Inhelder et al. (1967), de Laurendeau, etc., Piaget conclui: "O principal ensinamento dessas experiências é que o sucesso da aprendizagem é nitidamente subordinado ao nível de desenvolvimento" (Piaget, 1968, p. 291). Em outras palavras, tudo o que a pedagogia pode fazer é estudar os traços de cada etapa para valorizar, o melhor possível, suas disponibilidades. Os dados mais recentes obtidos pelos colaboradores de Piaget os levaram à conclusão de que a aprendizagem operatória é, de certo modo eficiente, nas fases de transição, acelerando a passagem de etapa, ao estágio ulterior (Inhelder, 1966, p. 183).

(b) A segunda tendência, oposta a esta, considera que a relação de subordinação é na realidade inversa. O exercício, a aprendizagem, jogam, representam o papel fundamental: "We begin with the hypothesis that any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development" (Bruner, 1965 p. 32). "Nós partimos da hipótese de que algum assunto pode ser ensinado efetivamente de alguma forma intelectualmente honesta para alguma criança em algum estágio de desenvolvimento". Esta é a famosa afirmação de Bruner que desencadeou tanta controvérsia e que exprime no fundo uma troca de ponto de vista quanto ao papel e às possibilidades do processo pedagógico. As experiências de Bruner (ver sobretudo Bruner (et al.) e outros, 1966) têm conduzido à conclusão de que a aprendizagem realizada por meios apropriados é capaz de acelerar a construção das estruturas intelectuais fundamentais.

Na concepção de Bruner o ambiente social joga um papel essencial no desenvolvimento intelectual. Há, segundo Bruner, três modalidades principais para representar o mundo na cultura de uma sociedade: (a) a modalidade enactive, isto é, a representação pela ação (com predominância motriz), (b) a modalidade icônica, isto é, a representação por imagens e (c) a modalidade simbólica representada, sobretudo, pela linguagem.

O desenvolvimento intelectual do indivíduo humano se realiza "por um processo de interiorização dos processos de ação, imaginação e simbolização que existem na cultura da sociedade" (Bruner et al., 1966, p. 321). As três modalidades se sucedem no desenvolvimento intelectual do indivíduo, não como processos exclusivos, mas à medida que elas adquirem sucessivamente um papel dominante. Quando o adolescente chega a poder utilizar sistematicamente a modalidade simbólica em seus raciocínios, ele não cessa, naturalmente, de se servir de ações motrizes e de imagens.



O processo de desenvolvimento é visto por Bruner em dependência direta do sistema de valores da sociedade, da ação dos fatores educativos, dos métodos de ensino utilizados. O conceito de readiness perde, completamente, o carácter absoluto que resulta da teoria de Piaget: "Readiness for learning" torna-se, no ponto de vista de Bruner, um parâmetro relativo, dependendo do processo de instrução. Não é necessário esperar passivamente a aparição de certas estruturas intelectuais. O processo de instrução pode influenciar ativamente, pode acelerar o aparecimento de estruturas correspondentes, se utilizamos métodos adequados (Bruner, 1966, p.28). Cada sistema de conhecimentos deve ser preparado - antes de poder ser ensinado numa forma completa - por sua antecipação nos estádios anteriores, utilizando processos apropriados a êsses estádios: "Pois como a maior parte dos assuntos podem ser transpostos de forma que coloquem ênfase, destaque seja sobre a ação, seja sobre uma representação imaginativa adequada, seja sobre a coordenação simbólica verbal, é muitas vezes possível que o resultado final que se propõe realizar com o ensino seja apresentado numa forma mais simples, mais fácil de manobrar, de manejar, a fim de que a criança possa progredir com mais facilidade e segurança (solidez) para o domínio (maîtrise) completo dos conhecimentos" (Bruner, 1966, p.10).

Piaget introduziu, recentemente, um novo elemento nesta controvérsia: "...para cada indivíduo a rapidez de passagem de um estágio ao seguinte, nem muito lento, nem muito rápido, a solidez, e mesmo a fecundidade de uma organização (ou estruturação) nova dependem de conexões que não podem ser nem instantaneamente nem indefinidamente retardadas, sob pena de deixar escapar seu poder de combinações internas" (Piaget, 1968, p.290).

É uma hipótese sedutora, mas que não impede (tranche) a disputa fundamental. Esta hipótese de ótimo pode concordar muito bem, tanto com a concepção de Piaget como com a de Bruner. Um ótimo pode ter um carácter absoluto, dependendo exclusivamente de características individuais (tal como é na concepção de Piaget) ou pode ser variável, dependendo a seu turno, das condições exteriores de desenvolvimento, de ambiente, de educação. Voltamos, assim, ao ponto de partida. Provavelmente há um rítmo ótimo de desenvolvimento intelectual do indivíduo, ou da aquisição de um determinado corpo de conhecimentos. Mas, êsse ritmo não é dependente dos meios didáticos utilizados, da motivação, dos sistemas de interesse que o processo educativo (instructif) pode construir? Ora, a resposta de Bruner é afirmativa.

A dificuldade de trancher o problema tem, também, raízes metodológicas: (a) é difícil para o experimentador de se dar conta se uma resposta obtida exprime somente uma aquisição local, empírica (mais ou menos conformista) ou uma convicção real, uma reestruturação de fundo,



(b) é difícil delimitar os obstáculos levantados pela incompreensão da linguagem (a criança não compreende exatamente o que se lhe pergunta). (Ver sobre estas discussões: Laurendeau e Pinard, 1966, p. 191-209; Inhelder et al., 1967; Vinh Bang, 1967, etc) Kohnstamm criticou as técnicas de aprendizagem utilizadas pela escola piagetiana por seu carácter artificial (Kohnstamm, 1966). Patrick Suppes de Stanford - que se ocupa há muitos anos da realização de um modelo estrutural para a interpretação da aprendizagem da matemática - faz a ressalva seguinte: as teorias cognitivas atuais não são suficientemente específicas para permitirem a previsão de resultados da aprendizagem num determinado domínio - em especial, a matemática. (Suppes et al., 1967, p. 162).

Pensamos que uma solução teórica, com largas implicações práticas, pode ser procurada na seguinte direcção:

Desde que se trata de escalões sucessivos, de estruturas psicológicas caracterizadas por uma organização hierárquica e por um conjunto de dependências interiores, a passagem de um estágio ao outro não pode ter lugar por fragmentos. A nova estrutura pode substituir a precedente somente no momento da constituição, no quadro do estágio precedente, de um conjunto de meios intelectuais dependentes uns dos outros, se condicionando e se engrenando reciprocamente. Certos desvios (décalages), certos retardos isolados podem, seguramente, se produzir, mas um conceito ou um processo mental dependente de uma estrutura não pode resultar verdadeiramente eficiente antes que o conjunto tenha sido constituído. Não se pode dissociar o conceito de necessidade do conceito de generalidade e os dois, de uma certa capacidade de abstracção. Um raciocínio dedutivo não tem sentido <sup>fora</sup> acerca dessas modalidades.

Uma aprendizagem de estruturas intelectuais é pois irredutível à aprendizagem empírica. Mas isto não significa que será impossível. Se a instrução se propõe a favorecer a passagem a um estágio superior, ela deve avançar sobre um amplo front, agindo simultaneamente sobre todos os aspectos importantes. É possível que em tais condições o ótimo de que fala Piaget possa ser realmente modificado.

Discutindo a evolução das estruturas psicológicas é preciso levar em conta, também, um outro aspecto. Os componentes do intelecto não apresentam todos uma evolução ascendente. (Fora de toda preparação especial uma criança de doze anos é mais apta a compreender, digamos, o princípio de Arquimedes ou o conceito de proporcionalidade, do que uma criança de 8 anos. É o caso comum). Há outros aspectos que não se desenvolvem fora de uma aprendizagem especial. Podemos desencadear (déceler) aspectos estagnantes ou mesmo involuções.

Citarei dois exemplos de nosso trabalho:

(a) Nós constatamos, por ocasião das pesquisas relativas à iniciação em geometria que as crianças de llanos não são superiores, a não ser em alguns porcentos negligenciáveis do ponto de vista estatístico, às crianças de 8 anos, no que concerne à capacidade de operar com imagens



mentais (deslocamento e geração de figuras geométricas) (Fischbein et al, 1964, 1967a).

A questão, sem dúvida, é de grande interesse prático. A geometria, a física, a geografia, etc., apelam a uma capacidade imaginativa que ninguém cultiva na escola de uma maneira sistemática. Muitas dificuldades poderiam ser explicadas por este fato.

(b) Por ocasião de pesquisas consagradas à intuição probabilística na criança constatamos que são os pequenos (os pré-escolares) que (apreciam) percebem melhor do que os maiores (13-14 anos) as mudanças nas situações de probabilidades objetivamente iguais.

Explicamos este fato pela tendência dos mais velhos de procurarem para tudo conexões estritamente determinadas, permitindo uma previsão unívoca. Podemos supor que esta tendência a previsões unívocas - cultivada, sem dúvida, pela escola - representará um obstáculo à aprendizagem do cálculo das probabilidades.

### III. Fatores dinamizantes da evolução intelectual

Quais são pois, os meios pedagógicos que podem ser propostos para favorecer ou acelerar a aquisição das estruturas nos diferentes escalões da evolução intelectual?

#### A. O ensino estrutural

Para contribuir na elaboração das estruturas mentais, o próprio ensino estrutural. O ensino deve destacar, dar ênfase aos conceitos fundamentais, às ideias diretrizes, às técnicas essenciais de descoberta, de organização, de interpretação dos fatos de um domínio de conhecimentos.

Ora, o espírito das matemáticas moderna se presta maravilhosamente a esta concepção didática.

"O feixe (faisceau) divergente é reagrupado. As matemáticas utilizam os mesmos conceitos, a mesma linguagem em todos os ramos: é legítimo, é correto falar não mais das matemáticas mas, da matemática" (Ruz, 1965, p.49). Estudando a matemática de uma maneira moderna (e, não simplesmente os conceitos modernos das matemáticas) o aluno aprende, em primeiro lugar, a descobrir além da variedade aparente, as relações fundamentais e suas propriedades, os modos fundamentais de organização das entidades matemáticas e sobretudo a dinâmica viva dessas relações e classificações.

Em que idade é possível a assimilação de certas noções da teoria dos conjuntos? Os resultados das experiências psico-pedagógicas indicam a idade de 6-7 anos. Mencionamos com relação a isto as experiências concludentes descritas por Picard (1966), Sulbout (1965), Hug (1968), etc. Dos dados de Sulbout resulta a aceleração determinada pela o ensino na assimilação dos conceitos e das operações respectivas (a pertinência a um conjunto, a intersecção, etc.). Todos os autores



relevam o particular interêsse das crianças para êste gênero de atividades, a ação estimuladora exercida sôbre sua capacidade de invenção (ver, sobretudo Hug, 1968, 227-239).

Assimilar um conhecimento fundamental é ganhar um novo instrumento de ação. Aprender o que é uma relação de equivalência não significa ~~simplesmente~~ pura e simplesmente aprender uma definição a mais, mas também, adquirir um conjunto de técnicas mentais que nos permitem compreender o parentesco, a relação profunda entre entidades, na aparência diferentes, de generalizar um procedimento, uma solução, etc. "Uma espécie de estrutura", escreveu Revuz, "corresponde a um modo de pensar e cada estrutura particular tem possibilidades de ação sôbre os conjuntos de que são munidos. O pensamento que toma consciência dessas estruturas é obrigatoriamente ativo e espontaneamente agressivo em relação aos problemas a resolver. Nêste contexto, um teorema não é mais o enunciado de uma verdade conservada em um céu platônico mas a certeza de poder agir de um certo modo em dadas condições" (Revuz, 1965, p. 49-59)

Uma paralela visão dinâmica da organização das matemáticas nos protege de um perigo ao qual devemos prestar atenção. Segundo a opinião de G. Polya os modernos manuais se limitam, frequentemente, a problemas de rotina - mas, de um outro tipo que não os dos manuais tradicionais, principalmente os de terminologia (cf. Krygowska, 1966, p. 308). Hipnotizados por êsse grandioso edifício da matemática contemporânea, há o risco de se reduzir a aprendizagem da matemática à memorização de uma nomenclatura. Eu penso que é, sobretudo, contra uma tal descrição de tipo anatômico, contra um igual modo estático e descritivo de apresentar a matemática moderna que protestou Louis Couffignal (1964). Procedendo assim, vamos exatamente contra o sentido profundo da matemática contemporânea.

Dizer que tal conjunto é um grupo não deve significar simplesmente, colar uma etiqueta. Invocando êste conceito nós evidenciamos algumas relações fundamentais, algumas modalidades de organização, certas filiações virtuais. Ora, é justamente esta dinâmica que a criança deve aprender.

Estas estruturas, para serem realmente eficientes, devem ser distiladas da experiência prática mais elementar da criança. Parece-nos absurdo falar de associatividade ou da comutatividade da adição antes que a criança tenha tido ocasião de adicionar, agrupando bolitas ou botões, antes que tenham tido ocasião de experimentar e de descobrir por si mesmo estas propriedades.

"Esforçamo-nos por partir do primeiro nível, o das noções abstratas ou mesmo de níveis mais elevados. O que deveria ser o ponto de partida, aparece de repente, sob o título de aplicações. Faz-se uma sobressena não digerível do que teria sido bom como entrada" (Freudenthal, 1963, p. 36).



Afirmar que o ensino tradicional da matemática se reduz a técnicas de cálculo, a uma contabilidade prosaica, do mesmo modo que a matemática moderna somente pode ser ensinada ao nível olímpico dos raciocínios puros, é ser injusto tanto com uma como com a outra. O ensino tradicional armava o aluno de boas regras de cálculo (das quais ele terá sempre necessidade não só para a vida corrente mas, como engenheiro, economista, etc.). Mas, ao mesmo tempo o aluno encontrava ocasiões para exercitá-las e tornar flexível seu pensamento matemático resolvendo problemas, encontrando demonstrações, inventando artifícios originais, etc. Estas são, sem dúvida, atividades matemáticas.

De outro lado, seria uma ilusão imaginar-se que o aluno pudesse assimilar a estrutura moderna da matemática sem um fundamento ~~xxxxxxxxxxxx~~ algorítmico vasto e sólido. Esta oposição entre algoritmo e invenção, entre hábito e raciocínio é absolutamente falsa. A flexibilidade e a eficiência de um raciocínio supõem, sem dúvida, a automatização dos elos (chainons) dos quais ele se serve. Para assegurar uma completa liberdade de movimentos ao pensamento, em suas tentativas criadoras, é preciso lhe assegurar uma rede (réseau) flexível mas muito sólida de hábitos mentais, um edifício bem consolidado de símbolos que permitam veicular e engrenar os conceitos e as relações em estruturas variadas.

Se estas coisas são bem compreendidas, parece-nos que se pode, então, encontrar meios eficientes para ultrapassar certas dificuldades atuais no ensino da matemática. A matemática moderna concebida - como dissemos - não como um edifício inerte, mas em sua dinâmica intrínseca, não exclui, mas pelo contrário, implica um bom domínio de certos automatismos - desde o cálculo elementar até às operações mais difíceis exigidas, digamos, pelo cálculo diferencial.

Não é admissível - como se quixam algumas vezes os professores - que o aluno saído da escola elementar naiba perfeitamente a tabuada de multiplicação sob pretexto de que ele aprendeu o que é um conjunto, uma reunião e uma intersecção de conjuntos, um elemento neutro, etc. Não há razão para negligenciar a automatização das técnicas de cálculo e a aprendizagem de alguns esquemas correntes de resoluções, somente porque se deseja que os alunos aprendam as propriedades de certas estruturas matemáticas.

Voltemos ao papel do ensino matemático no desenvolvimento intelectual do aluno. A aceleração da passagem a um estágio intelectual superior supõe a possibilidade de um ensinamento estrutural isto é, a possibilidade de assimilação pelo exercício de certos esquemas intelectuais fundamentais concernentes, relacionados com a leitura da experiência, a conceitualização, o raciocínio, etc. Trata-se, evidentemente, de uma assimilação orgânica, isto é, da inte-



gração do fato novo aprendido (nouvellement appris) na hierarquia do conjunto do intelecto. Uma tal integração, mesmo se algumas vezes ela tem na aparência um caracter explosivo (o que a psicologia da Gestalt cham "Einsicht"), supõe sempre uma elaboração preliminar, minuciosa e sistemática. Os conceitos fundamentais da matemática moderna poderão contribuir efetivamente para o progresso intelectual do aluno se eles vão engrenar e exercitar um conjunto de automatismos intelectuais - perfeitamente compatíveis com as técnicas tradicionais de cálculo. Em caso contrário, se tratará, apenas, de uma verborrêia vazia acompanhada ou não por toda sorte de figuras, diagramas, flechas, etc..

### B. Prefiguração das estruturas

Uma segunda modalidade para favorecer a passagem às características de um estágio intelectual superior consiste na prefiguração destas características pelos meios do estágio precedente.

Poderíamos relatar uma de nossas experiências neste assunto (Fischbein et al., 1969). Para poder ensinar com sucesso o cálculo das probabilidades no ginásio é preciso que a instrução se faça de uma maneira escalonada e que ela comece o mais cedo possível. O cálculo das probabilidades não é simplesmente um capítulo qualquer da matemática, mas um modo de pensar que só pode se constituir pela inclusão, em sua estrutura, de intuições e de hábitos mentais específicos. De acordo com a teoria (Piaget e Inhelder, 1951), a síntese entre o aleatório e o necessário - fundamental para o conceito de probabilidade - não pode ter lugar antes da passagem às operações formais. Muito mais: a comparação das probabilidades não poderá ser realizada ao nível das operações concretas pois que se trata da comparação de duas relações, portanto, de uma dupla comparação pensada simultaneamente - ação que somente o adolescente poderá efetuar.

Nossas experiências foram efetuadas com pré-escolares, com alunos de 9-10 anos e de 12-13 anos, utilizando, com este fim, duas caixas de plástico contendo, cada uma, bolitas de duas cores. Os alunos deviam indicar, levando em conta a relação entre as bolitas brancas e pretas, qual das duas caixas é mais favorável à tiragem ao acaso, de uma bolita de uma determinada cor. As respostas espontâneas e confirmaram a tese de Piaget e Inhelder. Mas, vamos recorrer a um exercício simples consistindo, em essência, na indicação de uma técnica de agrupamento, pela qual se pode por em evidência, de uma maneira figurada, a relação considerada. (Por exemplo, se se trata de comparar 6B/2P: 10B/5P, devemos agrupar as bolitas da seguinte maneira: na primeira caixa, dois grupos constituídos por 3B/1P e na segunda caixa 5 grupos constituídos por 2B/1P.)

O que é essencial é o fato de que a criança de 9-10 anos não fica simplesmente na constatação da proporcionalidade ou da não-



proporcionalidade smblica (figurale). Ela construiu um raciocnio explcito, verbal, da seguinte forma: "E mais fcil tirar uma bolita branca da primeira caixa, porque h 3 bolitas brancas para uma bolita preta, enquanto que na outra h duas brancas para uma preta."

Isto significa que, apesar dos meios utilizados no decorrer do exercicio correspondente ao nvel das operaes concretas, o indivduo separa (dgage) a estrutura formal das operaes e se aproxima do nvel das operaes formais.

Um segundo exemplo, sempre tirado de nossas pesquisas (em colaborao com I. Pampu e I. Minzat) ainda no publicadas. Segundo Piaget e Inhelder (1955, p.222,287) isto est ao nvel das operaes formais que a criana pode mobilizar de disponibilidades intelectuais suficientes para poder examinar o conjunto de possibilidades e de combinaes possveis numa dada situao.

Entretanto, ns conseguimos, utilizando diagramas arborescentes, a ensinar a criana de 10 anos a construir um "espaço de provas" correspondendo a uma ~~experincia~~ determinada experincia estocstica: por exemplo, o nmero de arranjos possveis (com repetio) que se pode obter com dois elementos tomados 3 a 3 (par) 4 a 4. A prova que no se trata simplesmente de um registro mecânico, mas de uma assimilao estrutural foi fornecida pelo fato de que as aquisies respectivas foram susceptveis de transferncia: no unicamente a transferncia de 3 a 4 elementos, mas tambm, a transferncia relativamente ~~distanciada~~ distanciada do processo das combinaes as das permutaes. (Este resultado foi obtido sobre 8 0% de crianas). A "combinatria" pois, pode ser construda ao nvel das operaes concretas utilizando meios figurados (o diagrama arborescente), mas o esquema pode ser separado, pela criana e pensado de uma maneira generalizada com os meios correspondentes ao nvel das operaes formais.

Esta prefigurao se encontra realizada na prtica didtica de diferentes maneiras. Segundo a opinio de Dienes (1966) para que se realize um bom ensino matemtico, a atividade construtiva da criana deve preceder a anlise, a explicitao de regras e de conceitos. Mas, a fim de que uma estrutura matemtica possa ser separada, abstraída, é preciso, em primeiro lugar, que o material utilizado seja variado tanto do ponto de vista perceptivo quanto matemtico. É mostrado, por exemplo, que a numerao no se limita exclusivamente ao sistema decimal. É preciso utilizar bases diferentes para evidenciar o que do ponto de vista matemtico é comum e essencial. O que nos parece verdadeiramente novo na concepo e tcnica de Dienes é justamente o processo que chamarei "travesti ldico". No se trata, simplesmente de abstrair os conceitos matemticos de um material concreto. Na tcnica de Dienes o concreto est incluso num jogo e é preciso manusear sabiamente diferentes tipos de jogos a fim de que a estrutura matemtica seja destacada: jogos manipulativos, representativos e jogos com regras ("rule-bound play") (Dienes, 1963, p.21-32).



A técnica de Dienes na minha opinião, levanta dois problemas essenciais:

(1) Estojámos sempre seguros de que o jogo é, para as crianças, o suporte (porteur) efetivo da estrutura matemática encarada pelo professor? Não há o risco de um erro de perspectiva? Não se arrisca uma contaminação ou mesmo uma reestruturação total determinada pelo sistema conceitual (ou melhor, intuitivo-conceitual) da criança?

(2) Não há o risco de que empregando (projetant) jogos didáticos para ensinar certos conceitos (sistemas numéricos, estruturas algébricas etc.) nos damos conta (no que concerne à ordem e sistematização dos conceitos ensinados) antes da lógica dos jogos que da lógica do edifício matemático?

Estas reservas não exprimem de todo um descôrdo com as idéias do professor Dienes. Desejamos somente lembrar a complexidade dos fenômenos e sugerir a necessidade de experimentar numa frente muito extensa para poder destacar uma linha de conduta fechada.

Um outro processo para prefigurar o formal é a representação gráfica. É uma técnica utilizada correntemente para alinhar (jalonner) e estimular os raciocínios abstratos e que tem uma larga aplicação na pedagogia das matemáticas - frequentemente como etapa intermediária entre a manipulação concreta e o plano conceitual. O professor Papy (1964) em suas lições e seus trabalhos utilizou uma grande variedade de tais imagens gráficas - ~~em~~ coloridas de cores diferentes para su gerir as relações entre conjuntos e as operações entre eles. Neste caso, como no do jogo, se coloca em primeiro lugar um problema de perspectiva. Para o adulto, para o professor o gráfico é a imagem de uma abstração já elaborada. Para a criança a imagem gráfica representa uma etapa intermediária entre a diversidade do material concreto e a abstração conceitual. As funções são, pois, diferentes. Há lá também o risco de que o professor cometa erros empregando a técnica dos gráficos por causa desta diferença de perspectiva. A imagem, idêntica perspectivamente para o professor e o aluno, pode adquirir nas duas rédes (réseaux) entrelaçamentos conceituais, significações diferentes.

De outro lado, há o risco de que uma muito grande carga intuitiva traga confusão, que ela desvie a atenção da criança para os aspectos evidentes, impressionantes para ela mas, não do ponto de vista matemático. "O emprêgo das cores, portanto, pode ser tão perigoso como é cômodo; e obriga a explicar que o espaço euclidiano é incolor" (Leray, 1966, p. 328).

P. I. Galperin elaborou há alguns anos, uma teoria "das ações mentais" concernente à assimilação de conceitos. Segundo a concepção de Galperin o processo se realiza com o máximo de eficácia se percorremos as seguintes etapas: (a) A apresentação explícita dos fatos considerados (por ex. as frases que definissem os conceitos). (b) A realização de certas operações concretas materiais se relacionando ao conceito estudado. (c) A descrição verbal das ações efetuadas pela pessoa. (d) A interiorização da ação: aquêle que aprende resolve os problemas sem explicitação verbal. (e) A automatização das ações mentais interiorizadas (Galperin, 1959).



Na concepção de Galperin o desligamento da estrutura conceitual das operações concretas - com a ajuda da linguagem - é útil a todas as idades e não pertence, necessariamente, a um estágio determinado do desenvolvimento intelectual.

Na realidade há toda uma dialética da imagem e da abstração na aprendizagem cujas características dependem, sem dúvida, do nível da idade. A imagem não é somente, o primeiro degrau da compreensão. A imagem volta aos diferentes níveis da compreensão, mas cada vez mais sutil, mais refinada, mais apta a ser inserida na dinâmica de um raciocínio abstrato (Fischbein, 1963).

### C. L. pedagogia da invenção

Que lugar ocupa o método da aprendizagem pela descoberta em nossa discussão?

Mesmo se o método expositivo é mais econômico e determina, inicialmente, uma memorização mais rápida, resta inferior à aprendizagem pela descoberta, se nos referimos ao critério essencial que é a capacidade de transferência. Este é um fato fundamental para nossa discussão. Se o aluno é colocado em situação de descobrir ele próprio o conceito, a regra, o princípio etc. - por uma apresentação apropriada de exemplos e de material didático - ele será capaz de os utilizar independentemente, em situações novas. E mais: descobrir a regra por seus próprios esforços facilita igualmente o que se chama "transferência remota", isto é, a descoberta independente de uma regra somente a parentada, relacionada à primeira (ver: Shulman e Keisler 1966; Guthrie 1967; Roughead e Scandura, 1968; Worthen, 1968).

Tudo isto significa que utilizando a descoberta como método de aprendizagem se obtém mais do que aquilo que Piaget chamou uma aprendizagem empírica, estritamente localizada nos fatos considerados. As próprias estruturas são afetadas em sua organização hierárquica. A criança não pode descobrir tudo, evidentemente. É por isso que se fala de descoberta dirigida. A criança é posta em situação de descobrir as soluções dos problemas por seqüências limitadas, cuja ordem é estabelecida pelo professor. Nós pensamos que é possível passar de uma instrução programada - tal como ela é utilizada hoje - e na qual a informação precede a resposta deixando muito pouco lugar à criatividade do aluno - para uma instrução por descoberta programada (experimentada já por nós nos casos dos diagramas arborescentes). O que é essencial é que o fato de que uma solução descoberta pelo próprio aluno tende a se generalizar melhor que uma solução indicada. Uma solução que se descobre pelo próprio esforço tende a se integrar de uma maneira orgânica, na atividade intelectual e a influenciar todo edifício dos processos mentais em sua organização hierárquica.

Durante o último decênio temos dado uma atenção particular a descrição das estratégias heurísticas. Uma estratégia heurística sele



ciona somente alguns traços imagináveis, na resolução de um problema, segundo critérios de economia, de plausibilidade, de associação, de estrutura, de simetria, de analogia, etc. Uma estratégia heurística, qual quer que seja toma em consideração algumas regras, se distingue todavia, de um algoritmo já que não são integralmente programados. É um esquema flexível ou uma hierarquia de esquemas que guiam a investigação num dado contexto.

Pode-se destacar de tais regras heurísticas, descrevê-los e fazê-los aprender para facilitar os esforços criadores do aluno na resolução independente de problemas?

Os fatos recolhidos nestes últimos anos nos permitem uma resposta afirmativa. Pensamos, em primeiro lugar, na possibilidade - hoje demonstrada - de incorporar regras heurísticas nos programas dos organizadores (des ordinateurs) (Newell et al., 1964).

Com um programa heurístico adequado uma máquina pode encontrar a solução de um problema novo - o que é bem outra coisa do que a programação a base de algoritmos na qual todos os passos são rigidamente previstos.

Ora, se uma máquina pode beneficiar-se de uma programação heurística, não será possível que a criança aproveite das regras heurísticas, metódicamente ensinadas?

Conhecemos na literatura psicológica diferentes tentativas deste gênero. Comunica-se antecipadamente aos alunos uma série de regras de conduta que eles devem aplicar e seguir na resolução de problemas. Alguns autores sustentam, em geral, que os resultados foram positivos, o processo não foi generalizado.

Na nossa opinião, a aprendizagem verbal de regras heurísticas não é útil. A atividade de investigação da pessoa que resolve um problema - como toda atividade criadora - é consciente em sua orientação de conjunto, mas não nos mecanismos. Os detalhes deste processo gerador e de seleção de hipóteses se realiza, em grande parte, por uma engrenagem extremamente complexa de automatismos intelectuais. Tentando controlar conscientemente este mecanismo não fazemos outra coisa que o desregular ou mesmo, de o bloquear. Se tentamos, durante a resolução de um problema de matemática, aplicar um "regulamento" obteremos, sem dúvida um efeito contrário ao previsto (escompté). Desde o início, nosso pensamento seria embaraçado por essas ingerências artificiais. Nossa atenção seria afastada de seu objetivo principal, a resolução do problema e dirigida para a lista de regras.

Nós não negamos, portanto, a utilidade das regras heurísticas. Parece-nos, com relação a isso que a estratégia didática deve ser a seguinte: as regras heurísticas não devem ser assimiladas somente de uma maneira verbal. Elas devem ser incorporadas por exercícios sistemáticos, prolongados na estrutura hierárquica de nossos hábitos intelectuais, de



de modo que elas ai participem não de fora - como fatores heterogêneos - mas por engrenagem automatizada no fluxo da ação.

Podemos também, considerar ao menos duas situações nas quais o apelo lúcido consciente às regras heurísticas pode ser proveitoso:

(a) A etapa preparatória na resolução de um problema. Nesta fase apelamos menos à inspiração do que a uma exploração sistemática. Nesta etapa podemos nos servir com sucesso da aplicação deliberada de algumas regras de conduta aprendidas. (b) Ao curso do esforço de resolução aparecem, algumas vezes, momentos de derrota, de desorientação. Todos os caminhos parecem fechados. Numa situação semelhante voltamos à reconsideração integral das condições, retomando os fatos numa nova perspectiva, pesamos e confrontamos os argumentos, avaliamos os erros cometidos, etc., Tudo isso pode beneficiar do apelo lúcido às regras heurísticas.

Mas, voltemos ao problema do desenvolvimento.

Um determinado estágio do desenvolvimento intelectual não se caracteriza por um tecido de reações singulares programadas de uma maneira unívoca. O que é essencial é a organização hierárquica, flexível, de esquemas de comportamento - irredutível a uma reunião de algoritmos - porque a criança deve ser preparada para resistir a variadas circunstâncias, parcialmente imprevisíveis.

A criança descrita por Piaget, chegada ao estágio das operações formais é capaz de inventariar de modo exaustivo as possibilidades de uma dada circunstância, de tirar uma conclusão lógica correta a partir de premissas dadas objetivamente. Mas esta criança não possui o equipamento intelectual necessário para resolver de maneira independente e criadora um problema pois que a inteligência descrita por Piaget não inclui em seu programa senão estratégias completas e não também, estratégias heurísticas.

Ora, a evolução das estruturas intelectuais - se admitimos que inteligência significa a capacidade de inventar uma solução numa situação nova - supõe igualmente a constituição evolutiva de certas estratégias heurísticas, mais ou menos gerais, organizadas hierarquicamente, incluídas na engrenagem mental de cada estágio. Na realidade nós sabemos muito pouca coisa hoje sobre o aspecto didático deste problema.

"Infelizmente, a questão muito importante do ensino de estratégias na resolução de problemas não tem sido suficientemente desenvolvida", afirmou com justa razão A.Z. Krygowska (1966, p.319).

O problema pode, portanto, ser formulado da seguinte maneira: quais são os meios didáticos mais apropriados para facilitar a evolução das estruturas intelectuais pela integração de processos heurísticos na atividade cognitiva da criança?

Hans Freudenthal (1963, p.31) fez esta afirmação pertinente: "Se adotamos a idéia da aprendizagem da invenção, a matéria que deve ser analisada, antes que se construa um sistema de ensino, não é a matéria



a ensinar, mas o processo de invenção dessa matéria".

A preocupação do desenvolvimento, por uma instrução adequada, de capacidades criadoras em matemática (e, evidentemente em todas as matérias), deve conduzir a uma pedagogia da invenção, que leva em consideração todos os alunos e não unicamente só os que são bem dotados. Al. Rosca (1969, p.23) constatou esta coisa muito importante para nossa discussão: somente 20% dos matemáticos que interrogou mostraram interesse constante pelas matemáticas na escola secundária.

#### IV. CONCLUSÕES

Admitindo a hipótese de que é possível uma aprendizagem estrutural (ou, o que é a mesma coisa, que a evolução das estruturas intelectuais pode ser acelerada) propomos que se examinem as estratégias didáticas segundo o ensino deve ser estrutural. A sistematização moderna da matemática se presta muito bem a uma tal estratégia, com duas condições: (a) não esquecer o lado dinâmico das relações conceituais em causa,

(b) não esquecer que um raciocínio eficaz não é possível sem um alicerce de automatismos.

(2) Os conhecimentos e os hábitos mentais correspondentes a um certo nível intelectual, podem ser assimilados mais rápido e de uma maneira mais durável se eles são préfigurados, preresentados (préfigurés) no estágio precedente com os meios específicos a este último.

(3) O ensino por descoberta facilita a transferência e a generalização hierárquica dos processos adquiridos. Um ensino que visa as estruturas - e não somente um simples condicionamento -, deve pois, suscitar os esforços investigadores da criança.

Um ensino de estratégias heurísticas é possível e útil com a condição de que elas sejam efetivamente integradas, por exercícios sistemáticos nos automatismos subjacentes dos raciocínios matemáticos.

Instituto de Psicologia, Bucarest, Roumanie