Revisado em
30/05/1980
[signature]

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

COMPRENDRE LA MATÊMATHIQUE

DIENES, Z.P. - Um estudo da transição da fase construtiva à fase analítica do pensamento matemático das crianças.

Tradução: Agar A. Kreks.

COMO SE APRENDE A MATEMÁTICA

É preciso muita audácia para perguntar como se aprende a matemática. De fato, ela é igualmente necessária para se interrogar sôbre o "como" de qualquer aprendizagem desde que se afasta do esquema estímulo-resposta; êste esquema, em realidade, não constitue de modo algum, uma explicação, mas simplesmente a constatação do fato que certas coisas são consideradas aprendidas desde que certos critérios são verificados. Pode-se, então, propor a pergunta mais fundamental: em que consiste, realmente, o fato de aprender? Se se diz que uma coisa está aprendida quando a mesma situação é dominada mais eficazmente após a aprendizagem do que antes - supondo que se pudesse medir de modo adequado a eficácia com a qual se domina uma situação - não se fará mais do que enunciar certos fatos particulares concernentes ao ensino antes que explicar como ocorre a aprendizagem. Se refletirmos um pouco mais sôbre esta questão, pode se tentar pensar que não há explicação para a aprendizagem em têrmos de fato observáveis, não mais que para qualquer fenômeno complexo. Explicar um fenômeno consiste em imaginar um quadro de pensamento suscetível de coordenar os fatos observados, em organizá-los em um esquema do conjunto, de tal modo que a utilização dêsse esquema permita predizer fatos ulteriores.

É o que se produz em qualquer ciência quando se introduz uma teoria; a teoria se propõe coordenar os fatos observados, de maneira a, de certa forma, "dar um sentido" a êsses fatos, permitindo a predição de acontecimentos futuros. Se as predições são na maior parte confirmadas pela experiência, pode-se dizer que a teoria é válida. Se a teoria suscita só um fraco poder de predição, ela não tem grande valor; ela é como uma roupa mal ajustada; procura-se então uma roupa melhor ajustada ou uma teoria que corresponda aos fatos de uma maneira mais eficaz. Não se saberá dizer de uma teoria que ela é falsa ou que ela é verdadeira: ela serve ou não serve. Se ela serve, a utilizamos; senão, a abandonamos. Acontece que uma teoria satisfaz durante um certo tempo, porque permite prever com precisão os fatos estudados, até o dia em que se constatam novos fatos que a destroem. Não é preciso fazer tragédia; isto significa simplesmente que a teoria agora está ultrapassada e quene tempo de substituí-la por outra. É extremamente importante distinguir cuidadosamente entre os enunciados concernentes aos fatos, os que são verificáveis por referência direta aos fatos em questão, e os enunciados concernentes aos modêlos teóricos por meio dos quais os fatos são "explicados" ou "tomam um sentido" para nós; essas teorias são essencialemante inverificáveis como tais, dado que êsses modêlos não existem por si mesmos. Nós não podemos dizer: "É um fato que a fôrça da gravidade faz cair ao chão uma maçã que se separa da árvore". Nós podemos, somente, verificar que a maçã cai, e não que uma certa coisa misteriora chamada "peso" ou "gravidade" a faz cair. Tais formas de explicações são sobrevivências da mentalidade animista de antigamente. A gravitação não faz cair a maçã, do mesmo modo que uma equação diferencial não impede o pôrto de Sidney desabar. Cada fato se encaixa em uma série de outros fatos reagrupados em um conjunto regularmente ordenado - em um caso pela teoria da gravitação, no outro pela satisfação de certas equações diferenciais que mantém um equilíbrio estável entre as diversas fôrças. Mas, percebo que resvalei no mesmo êrro que censurava. Não são as equações diferenciais que mantém um equilíbrio entre as fôrças; é a partir das propriedades da equação que eu posso predizer que, se construimos uma estrutura de um certo tipo, as fôrças ficarão em equilíbrio realmente estável. O mesmo se dá com tôda teoria relativa ao ensino.

Os estímulos que ferem nossos sentidos durante nossa vida são muito numerosos e muito variados. Entretanto, nós devemos triar essas sensações e organizá-las de um certo modo a fim de reconhecer nosso caminho no meio extremamente complexo que nos cerca. Uma nuvem de fumaça sôbre o horizonte, no mar, significará para a maioria das pessoas, um navio (se bem que pode se tratar de uma ilhazinha vulcânica surgindo à grande distância), enquanto que uma nuvem de fumaça atrás de uma cadeira, indicará que alguém fuma um cigarro ou um cachimbo (se bem que pode se tratar de um princípio de incêndio causado por uma faísca proveniente da lareira). Nós aprendemos, parece, a associar certos indícios com certos fenômenos e, a presença dêsses indícios, em certas circunstâncias, nos conduz a pensar que certos acontecimentos estão em vias de se produzirem ou no ponto de se produzirem. E quase sempre nós temos razão. De certo modo os acontecimentos se acham classificados em categorias, se bem que o mesmo indício possa, em circunstâncias diferentes, significar acontecimentos diferentes e que os mesmos acontecimentos possam ser preditos por tôda uma gama de indícios diferentes. As categorias "barco", "pessoa fumando", etc. são categorias úteis, porque podemos utilizá-las para organizar nosso meio e torná-lo inteligível. Esta classificação dos acontecimentos em categorias é um processo fundamental, é um aspecto do processo de adaptação ao meio. É completado pela tomada de consciência das relações existentes entre as categorias formadas. É pelo manejo dessas relações que nós fazemos as predições. Por exemplo, há uma estreita relação entre a costa ocidental da Escócia e o regime de chuvas. Se nós conhecemos essa relação, podemos prever fortes chuvas antes de sair em férias para a costa ocidental da Escócia e nos assegurarmos se cada membro da família possui um bom impermeável. As relações que manejamos cotidiamamente não são de complexidade muito maior; as relações de inclusão, de identidade, as operações de disjunçao, de intersecção, completadas pelas propriedades características de cada classe, em geral são suficientes para nos permitirem dominar a maior parte das situações da vida corrente. Por exemplo, se um húngaro quiser ir para a Nova Guiné como missionário, êle se dará conta de que a classe de pessoas que falam o húngaro e a dos indígenas da Nova Guiné, são inteiramente distintas. Êle deduzirá que necessitará aprender outra língua além do húngaro. Quando dizemos de um menino que êle deve ter ou ter tido pais, admitimos implicitamente a identidade de todos os machos com a classe de todos os filhos. Quando dizemos que um rapaz de 18 anos pode ir a um café tomar bebida alcoólica, isso quer dizer que a classe de jovens de 18 anos faz parte das classe das pessoas autorizadas a tomarem bebidas alcoólicas nos cafés. Para utilizar essas relações, é preciso, ao menos implicitamente, ter consciência de suas propriedades e também reconhecer os exemplos e contra-exemplos das classes correspondentes, tôdas as vêzes que se as encontre. Essas condições não estão sempre reunidas e resulta numa certa confusão no modo de pensar. Será o caso de uma conversa do gênero da que segue:

A - Eu penso que todos os estrangeiros são desonestos!

B - Mas você disse que o Sr. Smith era um escroque e no entanto êle não é um estrangeiro!

Evidentemente o Sr. B. confunde duas inclusões inversas. Dizendo o que disse, o Sr. A. quis dizer que a classe dos estrangeiros está inclusa na classe das pessoas desonestas.

Isso não impede do Sr. Smith ser um escroque sem ser um estrangeiro, porque, segundo o Sr. A, o conjunto das pessoas desonestas compreende não somente os estrangeiros mas, igualmente muitas outras pessoas entre as quais eventualmente, o Sr. Smith. O Sr. A, certamente, não está em contradição consigo mesmo. Quanto ao Sr. B., naturalmente, êle compreendeu que o Sr. A. disse: "O conjunto das pessoas desonestas está incluso no conjunto dos estrangeiros", isto é,, que tôdas as pessoas desonestas são estrangeiras. Isto, na realidade excluiria o Sr. Smith da possibilidade de ser um escroque se a afirmação fôsse exata. O Sr. B. confunde uma inclusão com inclusão inversa e imputa ao Sr. A, um êrro pelo qual êle mesmo é o responsável. Isto tudo, bem entendido, será válido qualquer que seja na realidade a verdade ou falsidade dessas afirmações.

É verdade que o Sr. B. não tinha consciência da não reversibilidade de um enunciado de inclusão ou de implicação. Quando se introduzem as negações (isto é, os conjuntos complementares), a situação corre o risco de se tornar ainda mais atrapalhada. Se o mundo não está mais embrulhado do que é, parece que é porque a grande maioria das pessoas na realidade só se defronta com situações extremamente simples.

Ora, o pensamento matemático não se ocupa sòmente de formar classes de sêres matemáticos e de definir as relações mútuas entre essas classes. Êle trabalha constantemente, em domínios cada vez mais extensos, um processo análogo ao que permite construir uma classe a partir de seus elementos constitutivos; à medida que as classes se acham formadas elas se tornam elementos de novas classes, a seu turno, se tornam elementos de novas classes, e assim, por diante. Dito de outro modo o nível da relação elemento-classe varia, ao mesmo tempo que as classes e os próprios elementos. Para tomar um exemplo não matemático, a classe formada pelas cadeiras tem por elementos as cadeiras, isto é, dos objetos de um certo modêlo. Quando se diz ou se escreve "cadeira", não se tem em vista, necessàriamente, uma determinada cadeira, a menos se a precisarmos dizendo "esta cadeira" ou ainda "a cadeira verde de espaldar que está no quarto grande de dormir" ou qualquer coisa análoga. Assim, "cadeira" não é um objeto mas uma classe de objetos, para os quais o símbolo é a palavra "cadeira". Nós formamos um grande número de classes dessa espécie, cada uma delas estando designada por uma palavra. Essas palavras formam a classe dos substantivos concretos cujos elementos não são mais objetos, mas classe de objetos. A relação elemento-classe se eleva a um nível imediatamente superior. Um substantivo(adjutivo, verbo, conjunção, etc.) pode ser descrito como "uma parte do discurso"; o "duscurso" é uma classe da qual "substantivo", "adjetivo", etc. serão os elementos. Isto corresponde a uma nova troca de nível. O pensamento matemático está cheio de transferências dêste gênero: constantemente trata-se de edificar superestruturas em cima do que foi construido anteriormente.

A troca de nível à qual nós acabamos de fazer alusão não deve ser confundida com as inclusões de classes, como quando se inclui a classe das cadeiras na classe do mobiliário; é uma cadeira real que constitui um elemento do mobiliário, e não a classe das cadeiras. Em outros têrmos, a relação de elemento para a classe (isto é, de pertinência) não deve ser confundida com a relação de classe para classe (isto é, inclusão).

Quando se fala de aprender qualquer coisa de nôvo, em qualquer que seja o domínio, e em particular em matemática, entende-se:

1º - Organizar os acontecimentos em classes ou categorias de tal sorte que se possa dizer sem hesitar que um acontecimento pertence ou não a uma determinada classe (ou, se é o caso, que o assunto não tem sentido para o acontecimento em questão);

2º - Definir as relações mútuas entre as classes ou categorias assim construidas.

Mas, como podemos verificar se uma classe construiu bem uma classe ou uma determinada categoria? Poderemos dizer que a classe "vermelho" foi aprendida se uma pessoa sabe escolher sem êrro, quando pedimos, um objeto vermelho ou um lote de objetos coloridos. Deve-se, bem entendido, presumir que a pessoa esteja disposta a colaborar de boa fé; quando se trata de comportamento humano, dificilmente se pode contar com um grau de certeza 100%.

Na sequência dos acontecimentos que conduzem à afirmação "A. formou o conjunto dos objetos vermelhos" o fato verificável é só que A escolheu ou não escolheu os objetos vermelhos quando pediram que o fizesse.

Quando dizemos que por consequência aprendeu o que é vermelho (ùnicamente porque vimos escolhendo objetos vermelhos), não fazemos nada além de manipular um modêlo, uma teoria. Pode-se, razoàvelmente, presumir que após ser exercitado com sucesso com fichas coloridas, qualquer um terá aprendido a parar na sinalização quando passa o vermelho. Esta é uma predição que o modêlo, malgrado sua simplicidade, nos permite fazer. Entretanto, não é o fato de ter aprendido o que é o conjunto "vermelho" que leva, finalmente, esta pessoa a parar no vermelho mas diversas conexões nervosas que foram estabelecidas na sequência de experiências anteriores.

A questão fundamental que interessa ao psicólogo que trabalha sôbre o Conhecimento, é precisamente saber como se faz para descobrir as relações regulares ao redor de si. Mas, afinal, que entendemos por "descobrir relações regulares"? O mundo da realidade objetiva consiste em um número enorme de partículas que se deslocam com velodidade e acelerações muito variadas. Quando falamos de relações regulares, interpretamos as impressões sensoriais provenientes dessas torrentes de átomos e de eletrons. É difícil de imaginar a existência objetiva de uma relação regular. Entretanto, o fato é que nós temos uma tendência arraigada de separar e classificar as coisas em modêlos regulares; os defensores da "psicologia da forma" vêem mesmo aí, uma tendência fundamental do organismo humano. É certo que nossa aptidão para ver as coisas sob forma de repetições regulares dos mesmos esquemas desempenhou um grande papel na sobrevivência de nossa espécie. Certos tipos de rugidos ou de odores indicavam aos nossos ancestrais a presença de um animal perigoso e os compelia, em consequência, a subir imediatamente na árvore mais próxima. Se cada rugido fôsse considerado como um acontecimento isolado, e não como um representante de uma classe de rugidos perigosos, nossas chances de sobrevivência, evidentemente, têm sido muito pequenas.

Não sendo feita esta classificação nos encontramos como diante de um quebra-cabeça. Que se pode fazer com um quebra-cabeça? Geralmente se começa a tatear, "embrulhar" ao azar; ensaia-se, por exemplo, adaptar êste pedaço àquele lá e olha-se o que resultou. Se podemos operar com tôda liberdade os ensaios se multiplicam, se organizam e se começa a ver claro. Quando chegamos pela primeira vez numa cidade - a menos que tenhamos estudado a planta prèviamente -, nós só vemos uma massa confusa de casas, de ruas, de sinalizações, de cartazes, etc... É possível que passemos algum tempo a percorrer a cidade a pé ou de condução; isto nos permite nos familiarizarmos com ela; pouco a pouco os diversos edifícios, digo, indícios, que demarcam as ruas se organizam em um esquema coerente, e por fim nós somos capazes de ir de um ponto a outro da cidade sem perguntar nosso caminho. (O leitor talvez observe que êste risco não ocorre quando os amigos o conduzem para todo lugar). De agora em diante, nós "conhecemos" a cidade - não como uma justaposição, mas em sua estrutura geral; êste conhecimento nos servirá de guia para todos os nossos deslocamentos posteriores através da cidade. Como chegamos a êste feliz resultado? "Explorando" a cidade, pode-se dizer. Nós manipulamos os dados, a saber, as ruas e os indícios que se pode ver, talvez ao acaso, talvez sem procurar sistemàticamente adquirir um conhecimento da cidade. Estas manipulações nos dão o "plano cognitivo" da cidade; e assim é com tôda aquisição natural de conhecimentos, quer se trate de uma aptidão(motriz) motora como patinar ou andar de bicicleta, ou de uma aptidão intelectual como o manejo de uma língua estrangeira.

Examinemos um instante a diferença que há entre a aprendizagem natural e a aprendizagem artificial. Nós poderemos então compreender as dificuldades experimentadas pelas crianças no decorrer da aprendizagem escolar artificial. Se uma criança é levada a um país estrangeiro onde não se fala sua língua materna, ao fim de alguns meses ela saberá falar sua nova língua tão bem como seus novos amigos; enquanto seus pais vão se debater com a gramática durante anos, ensaiando aprender a língua "corretamente". Mas, bem entendido, é a criança que a aprende "corretamente", porque a aprende naturalmnte. Felizmente, é impossível aprender a patinar e andar de bicicletas em livros, porque senão veríamos muita gente experimentá-lo. "Embrulhar" os dados, tatear, tal é o único método se queremos evitar fazer uma cambalhota sôbre o gêlo ou cair da bicicleta. A aquisição natural não é necessàriamente, preferível à aquisição artificial, entretanto, a priori, é provável, que ela seja mais eficaz. O estudo prévio da planta de nossa cidade acelerará, sem nenhuma dúvida o processo natural que conduz ao conhecimento de sua estrutura; é difícil de crer que sòmente pelo estudo do plano, dêsse plano, um estrangeiro consiga percorrer a cidade com tanta segurança quanto um natural.

Felizmente, para as crianças e para os professôres, cada criança encontra numerosas ocasiões de "bricolages" (pequenos consertos ou arrumações domésticas que se faz por prazer), eventuais trabalhos em matemática antes de ir à escola. Ela brinca com objetos e os separa em grupos. Ela tirará, necessàriamente, dessas experiências a noção de "dois". Idéias como "igual 2", "maior do que" e "menor do que" são igualmente necessárias para separar os brinquedos ou para comparar entre êles seus pais, seus irmãos, suas irmãs, seus amigos. Essas idéias não terão exatamente o mesmo sentido para a criança e para o adulto. Os trabalhos clássicos de Piaget mostram que as crianças não consideram as coleções com o mesmo número de objetos como "iguais", se uma das coleções está mais espalhada ou ocupa mais lugar que a outra. Entretanto, a criança estabelece classificações a seu modo, que mais convenham aos fins que ela pretende; ninguém a ensina fazê-lo; é a ordem que ela mesmo põe no caos que a rodeia, é sua aprendizagem natural.

A vida civilizada, entretanto, necessita certas técnicas que não se adquire no curso natural dos acontecimentos. É preciso que seja "ensinado" aos que têm necessidade. A transmissão das técnicas manuais de pai para filho ainda pode ser considerada como um processo relativamente natural, no sentido de que a imitação do pai nada mais é do que um aspecto da adaptação espontânea da criança ao seu meio familiar. Êste processo de aquisição tem sido um pouco esteriotipado, mas conservado no que êle tem de fundamental, no sistema de aprendizagem artesanal; trata-se, de certo modo de um processo de impregnação do qual os aprendizes têm pouca consciência. As instituições onde a aprendizagem se tornou mais artificial são as escolas. A sociedade adulta, muitas vêzes, de uma maneira inteiramente irracional, decide o que a geração seguinte deverá aprender e inscreve nos programa escolares. Contentam-se de invocar vagos motivos para introduzir tal ou qual questão no programa, motivos que, aliás, refletem muitos pensamentos confusos, muitos preconceitos ultrapassados; mas negligencia-se sèriamente o estudo do processo de aquisição em si. Nunca houve, em nenhum país, um programa sistemático de pesquisas. Nós temos, apenas, atacado superficialmente o problema procedendo a estudos de pedagogia comparada e análises simplificadas do processo de aquisição em laboratório. Mas êsses métodos não trazem nenhuma luz sôbre o mecanismo do processo de aquisição; os estudos sôbre as reações dos ratos em labirintos, como sôbre os sêres humanos aprendendo sílabas sem significação ou caracteres chineses artificiais, têm provàvelmente, poucas chances de se aplicá-los à aprendizagem infinitamente mais complexa, e à situação social mais complexa ainda, que encontramos nas escolas reais. (C.L.Hull, Quantitative aspects of the evolution of concepts; an experimental study, dans Psychol. Monogr. (1920), vol.28, nº 123).

Em todo o caso, a aprendizagem artificial da matemática, tal como é praticada atualmente em nosso ensino acarreta uma taxa de fracasso muito significativo: há falta de compreensão das estruturas matemáticas. Na grande maioria dos casos, quando os estudantes escrevem ou pronunciam os sinais matemáticos, não querem exprimir nada além do que os sinais, e não as estruturas das quais êsses sinais deveriam servir de símbolos. É como se aprendêssemos a pronúncia e ortografia de uma língua, e se fôssemos capazes de ler em voz alta qualquer texto dessa língua, mas sem compreender o significado.

Para evitar isso, o "Leicestershire Mathematics Project" elaborou um nôvo método, como mostrei em minha obra precedente (Construction des mathématiques). Nêste método, se realizam situações matemáticas, a partir das quais as crianças aprendem as estruturas matemáticas de uma maneira muito semelhante àquela pela qual elas aprendem as estruturas do mundo real, isto é, manipulando objetos reais. A maior parte destas operações se situam ao nível construtivo, isto é, ao nível da construção de classes a partir de acontecimentos aparentemente sem ligação entre êles. Mas atinge-se, inevitàvelmente, um estágio na aquisição das estruturas complexas, onde é preciso começar a tomada plena de consciência das propriedades das construções realizadas, senão, não se pode ir mais longe. É preciso voltar atrás sôbre os prórios passos e examinar o caminho percorrido. Penso no que foi feito é uma atividade muito mais elaborada do que aquela que consiste simplesmente em fazer, e exige um espírito mais maduro. Êste tipo de atividade só atinge a completa maturidade após os treze anos; mas podemos observá-la muito antes sob formas mais rudimentares. É uma atividade analítica, em oposição à atividade construtiva que a precedeu. É preciso que a construção preceda a análise, senão não haverá nada a analisar. Do mesmo modo, é preciso que haja alguns materiais a partir dos quais se possa efetuar a primeira construção, senão, não haverá nada a construir. Êsses materiais são primeiro os elementos fundamentais a partir dos quais se constroem as classes, e em seguida, as próprias classes a partir das quais se formam classes de ordem superior.

Vimos que êsse processo se produz muitas vêzes, senão sempre, em seguida a uma atividade aparentemente desordenada, que nós designamos "bricolage", ou melhor ainda, por "atividade lúdica". É essencialmente, por êsse mesmo processo que a criança que brinca com cubos se familiariza com as sensações que acompanha seus gestos e se habitua aos efeitos combinados do campo de pêso e das fôrças de atrito entre as superfícies. As limitações inerentes aos materiais limitam automàticamente as combinações realizáveis. Por exemplo, é impossível por em equilíbrio um cubo sôbre uma de suas arestas sem apoiá-lo contra outra coisa qualquer. A criança que brinca não toma consciência, explìcitamente, destas possibilidades e impossibilidades, mas quando ela tem atrás de si a experiência de um grande número de atividades lúdicas conduzidas ao acaso ela adquire um conhecimento implícito do que é impossível. A classe das "estruturas possíveis que podem ser construidas com os cubos" toma forma, progressivamente, incluindo subconjuntos tais que no das "tôrres possíveis", "túneis possíveis", "paredes possíveis", etc. É extraordinário ver com que eficácia uma criança pode manejar essas classes pragmàticamente, sem ter a menor consciência das relações entre as classes com as quais ela trabalha. Será como construir um certo tipo de edifícios sem analisar suas ações. Ela sabe o que quer fazer e chega a fazê-lo. Esta é uma atividade essencialmente construtora e as construções são essencialmente o resultado de um jôgo de manipulações com os materiais de que dispõe. Isto é verdade, também, quando os materiais consistem em objetos que podem ser manipulados ou em classes de objetos que são já abstrações. Uma criança de 2 ou 4 anos pode manejar o conceito matemático de "dois" em situações práticas. Mas êsse conceito está agora no segundo nível da formação das classes! O número "dois" não é uma propriedade dos objetos; é uma propriedade de coleções, de classes de objetos. Entre tôdas as coleções de objetos, os pares de objetos possuem a propriedade que têm dois objetos na coleção. Portanto, uma criança pequena é capaz de manipular uma tal construção em duas etapas com a maior facilidade e sem nenhum ensinamento formal. Ela construiu seu "dois", seu "três", etc. a partir de sua própria manipulação do mundo que a rodeia.

Aprender, consiste de certo modo em mergulhar a cabeça numa massa de fenômenos aparentemente incoerentes, em reagir sôbre êsses fenômenos, em descobrir pela experiência como é preciso fazer para provocar a aparição de certos fenômenos desejados, em exprimir as propriedades dos diferentes dados do mundo exterior formulando certas regras. As regras traduzem as propriedades que nós devemos dar a nossas ações se quisermos constituir uma certa classe de fenômenos: por exemplo, se nós quisermos construir uma tôrre, é preciso não fazê-la muito inclinada, senão ela desmorona; nós não obteremos o fenômeno "construção de uma tôrre" se não respeitarmos as propriedades necessárias dos cubos. As regras representam uma limitação do que é possível; mas quando compreendemos essas regras, nós adquirimos uma nova liberdade de ação, porque nos permite predizer com eficácia o que seremos capazes de fazer. Um engenheiro pode projetar a abertura de um túnel sob o Monte Bianco ou sob a Mancha, porque êle sabe manipular as ""estruturas reguladoras" que lhe permitem predizer o resultado de suas ações. Êle sabe jogar com as regras. É um gênero de "jôgo" inteiramente diferente do jôgo de manipulações que nos conduziu anteriormente a descobrir ou a formular as regras. Nós dispomos agora de um utensílio poderoso e aperfeiçoado cujo manejo nos obterá muitas satisfações.

Vejamos agora se qualquer coisa comparável se faz nas escolas. Onde encontraremos crianças ocupadas em classificar suas experiências, em separar as estruturas reguladoras e em utilizar em seguida, essas estruturas? Por certo há centros experimentais isolados, onde se ensaia aprender desta maneira "natural", mas são pouco numerosose muito dispersos. Certas tentativas passadas, tais como as de Maria Montessori, não estão divulgadas, porque repousavam ùnicamente sôbre as instruções de um educado excepcional sem que seus fundmentos racionais jamais tenham sido objeto de estudos aprofundados. Como se pode perceber, todos os esforços visando transformar radicalmente os métodos pedagógicos têm sido contrariados ao mesmo tempo, por administradores e por docentes. Antes de poder convencer as autoridades escolares da necessidade de uma troca, é preciso realizar com sucesso um certo número de experiências-polôto. É essencial elaborar modêlos que convenham às escolas mais comuns e não somente a uma escola excepcional.

Precisamos agora dar um passo a mais na análise do processo de aprendizagem. Suponhamos que por manipulações feitas ao acaso, tenhamos chegado à construção de uma ou várias classes. Naturalmente, a manipulação não se faz uniformemente, ao acaso durante tôda a duração do processo de aprendizagem. A parte do acaso torna-se cada vez mais fraca, isto é, a parte da escolha voluntária aumenta - à medida que vemos aparecer classificações eventualmente interessantes. Essas classificações são postas a prova conscientemente ou instintivamente, e elas se acham assim, confirmadas ou rejeitadas, até que uma estrutura utilizável acabe por emergir. Por exemplo, as crianças, a princípio, quase sempre confundem os números ímpares e os números primos, do mesmo modo que confundem os quadrados e os números pares. O número 39 é invariàvelmente considerado como primo, talvez porque êle não está nas tábuas habituais de multiplicação, ou simplesmente, porque sendo ímpar, é considerado como tendo muitas chances de ser primo. Os quadrados têm quatro cantos, então como 9 poderá ser um quadrado, se êle é ímpar?

Eis o gênero de idéias que abandam na cabeça de uma criança antes que ela tenha separado as classes matemáticas e suas relações. Há uma passagem difícil e não é qualificando tais idéias de "absurdas" que se ajudará a criança a ver claro. Pode-se lhes sugerir exemplos e contra-exemplos para provê-las de dados suplementares no meio dos quais ela poderá chegar às suas próprias conclusões. Uma vez essas conclusões atingidas, a estrutura reguladora está pronta para "jogar com" em lugar de "jogar na direção de". No caso dos números primos e dos quadrados pode-se utilizar, com sucesso, a relação seguintes: se dividimos por 4 um número primo que é a soma de dois quadrados, o resto é um; inversamente, se quando se divide um número primo por 4, se encontra 1 como resto; é porque êle é a soma de dois quadrados. Em outros têrmos: há uma relação de identidade entre os dois conjuntos: "números primos que são a soma de dois quadrados" e "números primos que quando divididos por quatro deixam 1 como resto". As crianças experimentarão um sentimento de poder excitante quando tiverem separado todos os conjuntos postos em jôgo. Há: (A) os números pares; (B) os números ímpares; (C) os números primos; (D) os números que são a soma de dois quadrados; (E) os números que quando divididos por 4, têm 1 como resto. Sôbre esta base nossa relação de identidade torna-se:

A intersecção de C e de E = à intersecção de C e de D

As negações das propriedades dos conjuntos conduzem aos conjuntos complementares. Se nós empregamos o símbolo N para a negação de uma propriedade, podemos designar "todos os números que são pares" por N(A). Nós temos duas identidades de conjuntos evidentes:

N(A) = (B) e N(B) = (A)

ou ainda:

A intersecção de (A) e de (C) = ao conjunto composto do número 2, que se escreverá 2 .

Ou ainda, nós podemos considerar as inclusões dos conjuntos tais que:

C está incluso na reunião dos conjuntos (B) e 2 .

Não se trata, nesta etapa, de "provar" as identidades de conjuntos ou as inclusões. A necessidade de tais "provas" se apresentará, naturalmente quando se jogar as regras. Mas isto anuncia já a passagem à etapa seguinte.

Parece que há ao menos três caminhos possíveis para passar da etapa do jôgo à pesquisa das regras. O mais simples é o de nos familiarizarmos, cada vez mais, com os dados do nosso jôgo, até que não tenhamos mais necessidade de pensar nelas; a estrutura, de certo modo, nos impregna, penetra em nós e se torna como um nôvo método de classificação dos fatos circundantes. Nós poderíamos chamar êste caminho de prática. É assim que nós finalmente chegamos a reconhecer se uma situação real corresponde (ou não corresponde) às regras que aprendemos. Suponhamos que fizemos alguns exercícios que nos conduzem a por em evidência a estrutura dos números positivos e negativos. Quando nos encontramos em presença de situações comportando altos e baixos de temperatura, de velocidades crescentes ou decrescentes, de deslocamentos em duas direções opostas, etc., nós as reconhecemos como situações nas quais se pode iutilizar números positivos ou negativos. Infelizmente, se os exercícios não produzirem todos seus efeitos nós, "reconhecemos" correspondências quando mesmo não existem. Se perguntamos a qualquer um que tenha estudado os números negativos, quantos livros ficarão sôbre a mesa se dos dois livros que lá estão, nós tirarmos três, poderá muito bem nos responder com a maior seriedade que restará "menos um livro" sôbre a mesa. Pode ser que reflita ou pouco melhor se pedirmos para executar a operação e que nos mostre o "menos um livro" que restou sôbre a mesa! E mesmo então, pode acontecer que não compreenda que a situação dos livros sôbre a mesa não tem nehhuma relação com os números indicados. É espantoso ver quanta gente perde todo o bom senso, quando começa a estudar, o que elas crêem ser matemática.

Em seu caso, a fôrça de aplicar a estrutura dos números orientados às situações que lhes correspondem e de rejeitá-las quando as situações não correspondem, elas terminam por dispor de uma estrutura operatória mas, sem nenhuma compreensão profunda de seus detalhes ou das relações internas que a caracterizam.

Um ou outro caminho que nós poderíamos tomar consiste em examinar como as regras funcionam, como elas são ligadas umas às outras; trata-se de voltar atrás sôbre o que se fêz, numa atitude crítica e analítica. Nós poderíamos chamar êsse processo de análise retroativa. Para retomar nosso exemplo, nós constatamos logo que na estrutura conhecida sob o nome de "álgebra dos números orientados", a cada número corresponde um número "oposto" (por exemplo, 3 é o oposto de -3, -6 é o oposto de 6, etc.); mas o que nós arriscamos de nem sempre ver claramente, é que "juntar um número" equivale, exatamente, a "subtrair seu oposto" e que "subtrair um número" equivale exatamente a "adicionar o número oposto", então sabemos executar as operações sem jamais nos enganarmos. (Ver, por exemplo, os jogos de David Page com dinheiro"negativo").

Voltando atrás e examinando o que fizermos, nós tomamos consciência de uma certa regularidade: é nisto que consiste a análise retroativa. Quando nós nos limitamos a praticar as regras deixando-nos impregnar por suas estruturas, nós, cada vez menos, tomamos consciência; enquanto que, quando voltamos atrás e examinamos o que foi feito, nós procuramos voluntàriamente tomar mais consciência das relações que caracterizam a estrutura reguladora. A prática é uma atividade menos consciente, a análise uma atividade mais consciente.

Mas existe ainda um outro caminho, mais aventuroso, para chegar ao domínio de uma estrutura reguladora. Nós jogamos com nossa estrutura, nós a examinamos em detalhe; pode acontecer descobrirmos nela certas insuficiências. Nós podemos, então, seja ou modificar as regras, seja ampliá-las. Isto constitui a <u>análise progressiva</u>, e tôda extensão da estrutura reguladora, será qualificada de <u>generalização</u>. Por exemplo, podemos descobrir que números orientados só permitem a variação de uma variável segundo uma ou outra de suas direções opostas, então, que a maior parte das situações da vida corrente exigem mais de uma variável para sua descrição. Se queremos dar a posição de um navio no mar, nós temos necessidade de precisar sua longitude assim como sua latitude. As duas variáveis são independentes, no sentido de que, em pleno mar, podemos fazer variar uma sem fazer variar a outra (por exemplo, nós podemos navegar inteiramente para o leste ou sòmente para o sul) ou ainda, podemos fazer variar as duas inteiramente independentes uma da outra(isto é, podemos navegar, a partir de um ponto dado do oceano em qualquer direção, à nossa vontade). Se quisermos, igualmente, precisar a temperatura do ar, a temperatura da água, a pressão do ar, a umidade relativa e a hora na qual todos êsses levantamentos foram efetuados, nós temos um processo com sete variáveis. Considerações desta natureza nos distanciam do espaço unidimensional dos números orientados e nos conduzem a uma generalização introduzindo um espaço de sete dimensões constituido por vetores. Uma tal generalização é essencialmente a extensão de uma classe de estrutura conhecida, de modo a formar uma outra classe mais vasta, da qual a estrutura precedente é apenas um caso particular. É preciso não confundir a generalização, com a abstração: esta última é a formação de uma classe a partir dos elementos que a constituem. Os números orientados, êles próprios são os elementos do conjunto dos números orientados; os vetores são os elementos do conjunto dos vetores multidimensionais. Mas a classe dos números orientados não é um elemento da classe dos vetores multidimensionais. Precisamos prestar muita atenção para não confundir a inclusão ou a extensão das classes com a noção "ser um elemento de" ou "pertencer a" uma classe. A formação de uma classe a partir de elementos é essencialmente um processo de abstração, enquanto que a extensão de uma classe já existente para uma classe mais vasta é um processo de generalização. (Z.P.Dienes, Abstraction and generalization, dans Harvard Education L Review, été 1961).

Em lugar de se limitar a entender a estrutura reguladora, é possível decidir uma modificação da estrutura reguladora. Afinal, as regras existem para nos servir e não para nos amarrar. Desde que encontramos as outras regras que nos servem melhor, o que há afazer é modificar as regras. É o que ocorre quando se propõe uma nova teoria. Esta maneira revolucionária de pensar poderia ser encontrada mais seguidamente entre os adultos, que levariam as crianças a se mostrarem mais audaciosas. Nossas práticas atuais em matéria de educação comportam um alto grau de conformismo e, muitas vêzes, são os indivíduos ligeiramente desequilibrados que têm a audácia de perturbar as estruturas estabelecidas. Levar as crianças a pensar de uma maneira revoluvucnária poderá, efetivamente, conduzir a resultados revoluvionários - o que não seria mau na situação do mundo atual!

Voltemos ao processo que estamos em vias de examinar. Aplicamos, analisamos ou generalizamos as estruturas reguladoras que tínhamos anteriormente configurado a partir do caos de nossas impressões sensoriais no decorrer de um dia de manipulações. Agora nós estamos suficientemente familiarizados com essas estruturas: Eis que voltamos ao nosso ponto de partida, mas com um material mais rico para nossos jogos. Êsses novos jogos são as novas estruturas. Bem entendido, nós ainda não estamos familiarizados com as relações entre nossos novos brinquedos mas sòmente com a estrutura interna de cada brinquedo, Para aprender pela experiência o modo de empregar cada brinquedo, é preciso recomeçar todo o processo das manipulações. Nós percorremos um círculo completo, ou antes, uma volta de uma espiral, pelo fato de que estamos num nível mais elevado do que antes. Recomeçamos um nôvo ciclo, ensaiando aqui e ali, vendo como os novos brinquedos vão se encaixar, como não se encaixam e, progredindo, de um modo geral, para a estrutura reguladora desconhecida que deve caracterizar os novos brinquedos. Finalmente êsse ciclo, êle também, chegará a uma conclusão e, é assim que novas estruturas nascem entre as mãos dos matemáticos.

É êste encaminhamento de um ciclo a outro que chamei em minha obra anterior de aplicação do princípio dinâmico. Em minha primeira formulação do princípio, mostrei como a construção precede à análise e a ela conduz, mas tinha definido a análise em um princípio separado. Reuno agora os dois princípios e um nôvo enunciado mais completo, do princípio dinâmico.

É tempo agora de examinar com um pouco mais de detalhes como funcionam os ciclos e quais são as circunstâncias que os fazem funcionar mais (ou menos) eficazmente. O que é que favorece uma abstração mais rápida, mais eficaz? Em outros têrmos, como precisamos organizar uma situação para ter chances de ver as classes se formarem rápida e eficazmente? Em primeiro lugar, precisamos decidir a ou as classes que desejamos ver formadas por nossos alunos. Precisamos, em seguida, salientar os problemas susceptíveis de dar os resultados seguintes:

a) o aluno será capaz de reconhecer as situações novas como significativas da abstração procurada ou sem relação com ela;

b) nas situações julgadas corretamente como significativas, os exemplos de classes serão reconhecidos como pertencentes às classes em questão e os contra-exemplos como não pertencentes.

Para satisfazer a primeira condição, é preciso construir uma espécie de crivo mental no qual se colocam as situações; as que não correspondem atravessam o crivo enquanto que as que correspondem serão retidas. Êste não é um pequeno processo. Como Newton teve idéia de que, de um lado os objetos caindo para a terra, e de outro lado, a lua circulando ao redor da Terra, faziam parte de uma única classe de acontecimentos? Esta "atração" é apenas uma maneira de falar permitindo organizar dois acontecimentos numa mesma categoria; tais categorias tornam possíveis hipóteses melhores e mais exatas. Tôdas as classificações são abstrações, não realidades. Elas ajudam a triar as realidades, mas elas não são realidades em si mesmas. Newton conseguiu separar uma idéia válida procurando o que essas duas situações possuiam em comum. Êsse resultado êle obtêve olhando essas situações de vários pontos de vista diferentes, alguns muito desabituais para seu tempo. Nós vemos assim que se pode fazer uma abstração, ou dito de outro modo, fazer aparecer uma regularidade, examinando certos acontecimentos de numerosos pontos de vista. Como podemos aplicar êsse método no decorrer das lições de matemática? Dado que os "acontecimentos" matemáticos não se produzem quase nunca de um modo natural na experiência da criança, é preciso provocar sua aparição. As estruturas matemáticas que nós queremos fazer as crianças armazenarem devem ser-lhes apresentadas sob diversas formas concretas; isto é, que as crianças devem encontrar a mesma estrutura matemática vestida de um certo número de maneiras diferentes.

Com referência a uma estrutura matemática, as situações se reunem em três categorias:

a) situações sem relação com a estrutura (não significativas);

b) situações com relação com a estrutura (significativas) que formam os exemplos de situação descritas pela estrutura.

c) situações em relação com a estrutura, que formam contra-exemplos do conjunto de situações descritas pela estrutura.

A distinção entre "contra-exemplo" e "não significativa" é de certo modo arbitrária e depende da classe de situações que escolhemos considerar como significativas. Por exemplo, podemos falar de comprar móveis para uma nova casa, e nêste caso as situações em relação seriam aquelas que dizem respeito à mobiliário (por exemplo, sua escôlha, sua compra, sua fabricação, etc.). Nós podemos sair à procura, na esperança de encontrar uma mesa. Entramos numa casa de móveis e vemos um mesa do século XVII. Ela é um exemplo na classe das mesas. Podemos ver também expostas algumas magníficas cadeiras de espaldar recurvado que combinam muito bem com a mesa. Estas cadeiras, têm certamente, relação com o mobiliário mas elas são contra-exemplos da categoria de objetos que nós fomos comprar nêsse dia. Nós poderíamos ir, ao acaso, em outro setor da loja onde veríamos um vestido que gostaríamos comprar para nossa filhinha. Isto é completamente sem relação com a compra de móveis para nossa casa. Os lógicos chamam o conjunto das situações significativas o universo do discurso. É o universo das coisas sôbre as quais estamos discorrendo no momento considerado. Tudo o que pertence a êsse universo é então, significativo; as outras coisas, no exterior, são não-significativas. Então, nós escolhemos uma classe de objetos no interior dêste universo do discurso. Os membros desta classe serão exemplos da classe escolhida; os outros membros do universo do discurso serão contra-exemplos. Uma grande parte das dificuldades com as quais nos chocamos em matemática, se refere aos contra-exemplos, porque frequentemente, elas não formam uma classe bem definida de coisas, de acontecimentos ou de situações. Para permitir à classe dos contra-exemplos, ser bem definida, é preciso que o universo do discurso seja bem definido.

Se quisermos que as crianças aprendam rápida e eficazmente as relações referentes a uma estrutura matemática qualquer, é preciso apresentar a elas várias concretizações dessa estrutura no interior de um certo universo do discurso, seguidas por concretizações de outras estruturas do mesmo universo de discurso, para ajudá-las a reconhecer a diferença entre os exemplos e os contra-exemplos. Isso implica o apêlo a dois princípios que poderíamos formular como:

a) o princípio da concretização múltipla e (na obra Construction des mathématiques. Êsse princípio foi chamado de "princípio da variabilidade perceptual").

b) o princípio do contraste.

Apresentando numerosas concretizações se chegará finalmente a que só a estrutura essencialmente matemática será retida entre tôdas as situações concretizadas, de tal modo que os exemplos que não encontramos anteriormente sejam, entretanto, reconhecidos como tendo a estrutura matemática em questão. Por exemplos contrários, nos asseguramos que as situações não possuindo a estrutura são reconhecidas como não a possuindo.

É um truísmo dizer que os conceitos matemáticos são construidos, a partir de varáveis matemáticas. A priori, para ensinar de uma maneira eficaz um conceito matemático, devemos fazer variar na experiência do aluno, tôdas as variáveis matemáticas inerentes. Nos outros domínios da matemática, isto não parece de tal forma ser considerado como decorrência. Por exemplo, o conceito da notação de posição é baseado sôbre (a) um número de base; (b) potências do número da base; (c) o multiplicador de cada uma das potências do número de base pelo fator conveniente. Êste conceito é singularmente restrito quando se dá ao número de base um valor constante, a saber dez. É ainda mais pela variação limitada do expoente ao qual o número da base é elevado para obter as diversas potências. A única variável que se faz variar muito é a que figura na rubrica, isto é, os algarismos dos números que são utilizados pelas intermináveis "adições" das crianças. Não é de admirar que mesmo após sucessões sem fim de tais "adições", elas não tenham mais do que uma idéia muito vaga do conceito valor posicional.

Anteriormente fizemos alusão ao princípio que consiste em fazer variar todos os conceitos matemáticos significativos falando do princípio de variabilidade matemática. É fazendo variar, o mais largamente possível, as variáveis que fazemos aparecer claramente, o que é essencialmente invariante, durante a variação. Quando uma coisa permanece sempre idêntica a si mesma, nós temos a tendência de não vê-la; nota-se melhor um objeto em movimento do que outro em repouso. Do mesmo modo uma estrutura matemática "em movimento" se destacará do resto e chamará atenção.

Ao lado da verificação dos princípios da concretização múltipla, do contraste e da variação matemática, há numerosas outras tentativas que podemos tomar para tornar o processo de aquisição das estruturas matemáticas mais eficaz e mais agradável para as crianças. Um sistema de punições e recompensas as impede de apreciar o interêsse intrínseco de seu trabalho e as leva aos fins mais egoístas: ganhar o favor do professor e evitar seu desfavor. Prestaremos um grande serviço ao desenvolvimento moral tanto como ao desenvolvimento intelectual da criança, suprimindo os castigos e as recompensas, e colocando em seu lugar como motivação intrínseca o interêsse pela tarefa em si. É completamente surpreendente ver a que ponto as crianças podem se absorver em desenredar a meada das estruturas abstratas e suas propriedades sem que seja necessário dar-lhes qualquer impulso exterior.

Não acrescentaremos nada aqui sôbre a questão do trabalho individual e da motivação intrínseca, dado que êstes assuntos já foram abordados, em certo número de publicações recentes. (Construction des mathématiquesq - capítulo 1º; G.L.W. Sealey, The creative Use of Mathématics int the Junior School). Estão em curso as diversas partes do mundo, pesquisas sôbre as condições para melhorar a eficácia do ensino matemático, bem como sôbre os problemas mais fundamentais referentes ao processo em si do ensino matemático. A obra de Piaget é bem conhecida (La conception du nombre chez l'enfant - P.U.F., Paris, 1960; Piaget, Greco, Grizo, Sur la construction du nombre - P.U.F., Paris, 1961) e as pesquisas em Gênova prosseguem regularmente. Durante o ano de 1960-1961, a "Harvard University Center for Cognitive Studies", pôs em curso um plano de pesquisas sôbre o ensino da matemática, estudado e executado por Jérôme Bruner, cujo relatório está, agora publicado. Outras pesquisas foram empreendidas por Skemp em Manchester por Sealey e Oldridge em Leicestershire, pela "National Fundation for Educacional Research for England Wales" e alhures, por Robert Davis em Syracuse N.Y. e por Suppes Na Califórnia. Outros planos de pesquisa foram lançados em Florença, em Budapeste, em Adelaide, nas ilhas Havaí, em Minesota e ainda outros.

****