

SEABORNE, P - Trimath, Quadrimath? O.C.D.L. Paris. 1971

Tradução: Profª. Ely Machado de Campos

Organização: Suzana L. Nunes

Neli Teresinha M. Ameretti

Capítulo 2.

Estados e operadores.

Entre os jogos descritos no primeiro capítulo, algumas atividades implicam a comparação de dois elementos do jogo Trimath. Isto significa de fato que a criança é conduzida a descobrir uma relação existente entre dois elementos descobrindo como estas placas são "semelhantes" e de que modo elas "não são semelhantes", isto é, diferentes.

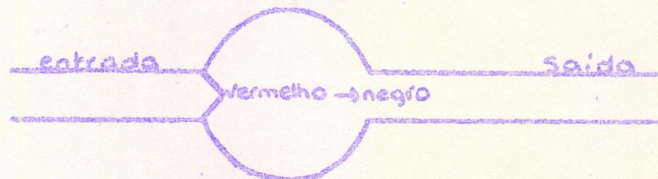
Uma outra atividade consiste em começar com uma peça qualquer e encontrar as regras segundo as quais ela pode mudar. Esta regra de mudança é chamada "operador". A placa pela qual se começa pode ser considerada como o estado de partida e a situação após a aplicação da regra como novo estado. Pode-se igualmente empregar a noção de entrada e de saída falando de máquinas em lugar de operadores.

A regra de mudança pode ser muito aberta. Por exemplo uma mudança de cor. Se o ponto de partida é a placa seguinte



poderemos ter na chegada ou na saída uma das 5 placas que devem ser "pagaias" e ter dois furos, mas que podem ter uma das 5 cores que dispomos.

Um operador pode ser mais restringido. Por exemplo, uma máquina que muda o vermelho em negro.



O operador ao centro exige que as placas vermelhas sejam mudadas em placas negras, e, bem entendido, as placas devem ser semelhantes para todo o resto, isto é, "mesma forma" e "mesmo número de buracos".

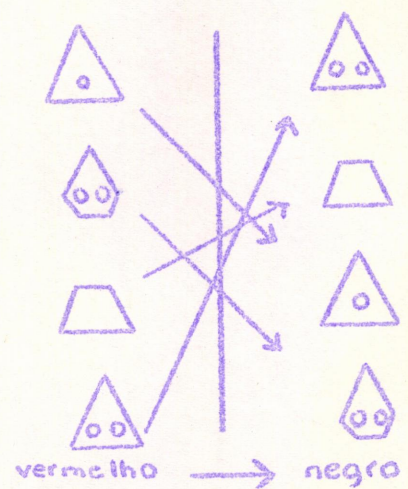
Suponhamos que tenhamos um triângulo vermelho com um buraco na entrada.

Na saída, teremos um triângulo negro com um furo.

É como um distribuidor automático. Sabemos que se colocamos um cruzeiro, receberemos um tablete de chocolate. A peça não se muda por magia em chocolate.

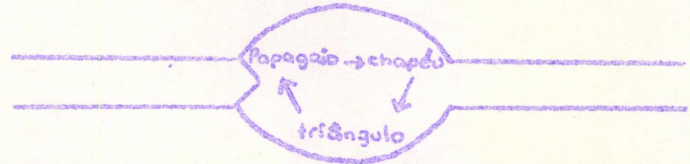
Esta máquina que dá placas negras para placas vermelhas é uma máquina de transformar como e distribuidor automático mas é preciso que aquilo que se coloca nela seja aceita por ela. Assim, não se poderia colocar em nesse distribuidor automático 10 centavos ou 20 centavos se ela não foi fabricada senão para receber peças de uma france. Nessa máquina não aceita as placas amarelas ou verdes e não mais, bem e entendido, as placas negras. Você já experimentou colocar em um distribuidor automático pela fenda reservada as peças de moedas?

A escolha é muito grande para os operadores e se pode colocar no centro da máquina 2 furos, triângulo, 1 furo, trapézio, etc... Em cada caso, pode-se estabelecer uma relação entre uma certa entrada e uma certa saída. Em outros termos, pode-se estabelecer uma correspondência um a um entre o conjunto de entrada e o conjunto de saída. Não é sempre necessário desenhar a máquina. Pode-se construir uma tábua das entradas e das saídas e traçar traços entre os pares de placas.



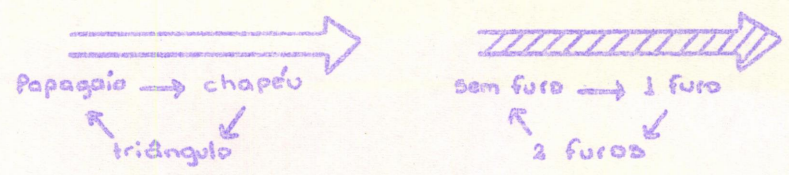
Você notará que com os operadores que vimos de descrever, cada entrada tem uma saída única.

A partir de momento no qual estes operadores simples foram cumpridos pode se referir a este fato para que uma placa qualquer de Trimath seja aceitável. Por exemplo, a máquina abaixo, nos dará para um papagaio de papel na entrada um chapéu na saída, um chapéu na entrada, um triângulo na saída, um triângulo na entrada, um papagaio na saída



Deste modo, todas as placas Trimath convêm como entrada.

Os jogos que fazem intervir estados e operadores interessam muito às crianças, especialmente quando se faz apelo a mais de um operador. Podemos nos servir de flechas móveis em duas cores com os sentidos seguintes:

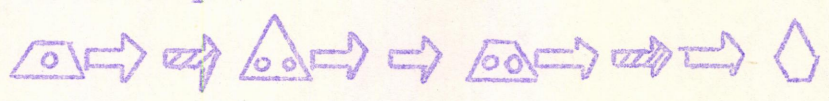



Deste modo, todas as placas Trimath convém com

O primeiro jogador escolheu uma placa e coloca uma flecha. O segundo jogador escolhe a placa correta e coloca uma outra flecha. O terceiro jogador faz o mesmo. O jogo termina quando não há mais placas a utilizar, uma vez que todas foram utilizadas. O jogo pode ser por exemplo, o seguinte:



Um tal jogo exige muita reflexão da parte das crianças pequenas, porque elas devem decidir se uma flecha se refere à mudança de forma ou à mudança de buraco. Em uma fase ulterior pede-se utilizar várias flechas a um tempo.



Há muitas maneiras de desenvolver tais jogos, por exemplo introduzindo uma terceira flecha, descobrindo séries de flechas redundantes (três flechas significando "não faz nada" ) ou bem colocando duas peças uma ao lado da outra e decidindo de qual flecha tem-se necessidade para ter o operador mais curto.

Quadrinath


Todos os jogos indicados acima podem ser jogados com o quadrinath mudando os operadores em função dos atributos.


Capítulo 3

Relações.

Nós já falamos antes de relações e como a idéia de relação é fundamental em toda atividade matemática, consagramos este capítulo a descrição do emprego de Trimath e Quadrinath no estudo das relações em situações práticas.

Uma relação liga sempre 2 "coisas" referindo-se aos atributos dessas coisas. Por exemplo:

Se  é vermelho

e  é vermelho

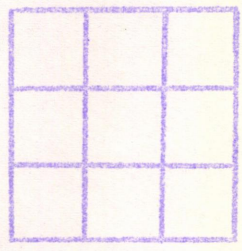
pode-se portanto dizer que  tem a mesma cor que 

A relação que existe entre objetos é naturalmente a melhor maneira de introduzir a noção de relação.

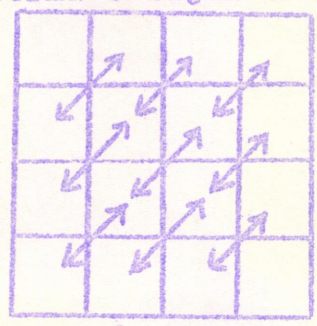
a) As relações "igualdade" "não igualdade" (relações de equivalência, relações de diferença).

1- Pode-se jogar muitos jogos utilizando estas relações. Utilizando todas as placas Trimath de uma mesma cor. Coloca-se uma placa em cada espaço, de tal modo que em 2 espaços vizinhos não haja já mais 2 placas da mesma forma ou tendo o mesmo número de furos.

Pede-se arrumar as placas segundo uma só diferença e entre duas placas em diagonal?

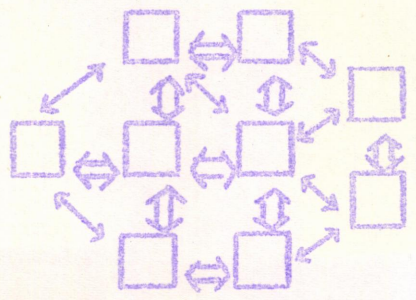


2) Utilizando todas as placas Quadrimath tendo um furo, colocá-las nos espaços da rede abaixo, de tal modo que jamais 2 placas da mesma cor ou da mesma forma estejam em 2 espaços vizinhos.

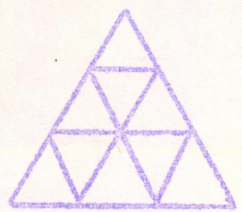


Pede-se colocá-las de tal modo que exista igualmente uma diferença e uma só na direção indicada pelas flechas?

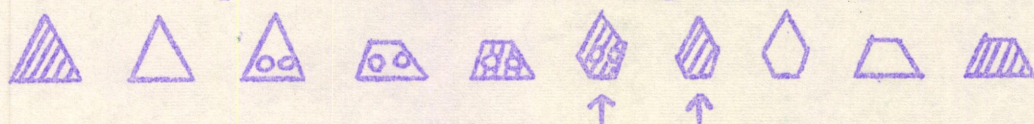
3) Utilizando todas as placas Trimath de uma só cor coloca uma peça em cada espaço de tal modo que entre as placas ligadas por esta flecha não haja senão uma diferença e que entre as placas ligadas por esta flecha existam 2 diferenças.



4) Utilizando todas as placas Trimath de uma mesma cor, coloca uma placa em cada espaço de tal modo que não exista senão uma diferença entre esta placa e aquela que se encontra ao lado



5) As placas de Trimath e de Quadrinath podem ser utilizadas para jogos de dominó. Deixa-se as placas em pilha. Cada jogador por sua vez escolhe uma placa para colocar em relação com uma placa já colocada, de tal modo que exista entre duas placas sempre uma diferença.



(Observar que as placas assinaladas com uma flecha diferem de uma só maneira porque elas têm um número diferente de furos, mas têm a mesma forma e a mesma cor.)

Pode-se, naturalmente, jogar outras variantes de dominó utilizando 2 ou 3 diferenças.

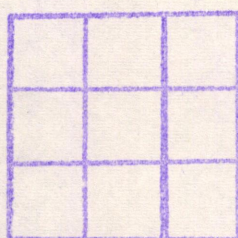
Relações de ordem.

É uma coisa mostrar que dois objetos são diferentes um de outro e uma coisa totalmente diferente colocá-los em ordem. Na maior parte dos casos, a ordem é arbitrária. Não há, por exemplo, nenhuma razão que justifique que as meninas deixem a classe antes dos meninos, se isso não está se referindo às regras da polidez. Algumas ordens são convencionais, por exemplo, a ordem alfabética. Entretanto, ordenar objetos segundo seu peso é mais próximo da idéia fundamental de ordem. Todas as relações de ordem que se pode estabelecer com Trimath e Quadrinath são arbitrárias. Isso significa que as crianças terão que definir elas mesmas um critério de ordem. Por exemplo, utilizando todas as placas Trimath de uma mesma cor, pode-se decidir que os triângulos precedem os papagaios e estes precedem os trapézios "chapeus". De outro modo, pode-se decidir que as placas sem furo vem antes das placas com 1 furo e estas antes das placas com 2 furos. Eis aqui o modelo de um arranjo segundo este critério:

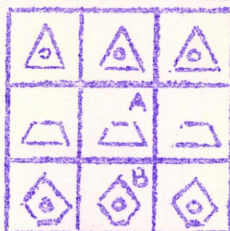


G R A D E S (redes)

1) Utilizando todas as placas de Trimath de uma só cor, colocá-las nos diferentes espaços de tal modo que tenha uma ordem e que forme um "modelo".



Naturalmente uma tal orientação permite uma variedade de diferentes interpretações. É, entretanto, surpreendente constatar quantas crianças arranjarão as placas da maneira seguinte:

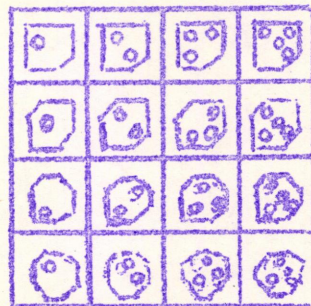
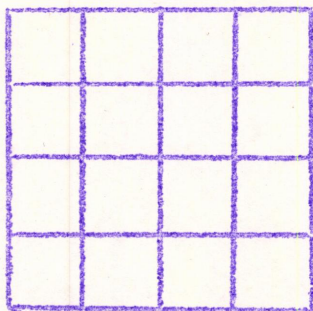


vermelho azul amarelo

A ordem pode ser modificada, pedindo-se talvez, que as placas sejam definidas pelas formas dadas no diagrama acima. Pode-se aceitar não importa que arranjo onde as linhas sejam definidas por uma forma. Dá-se o mesmo se houvesse escolhido o atributo "cor".

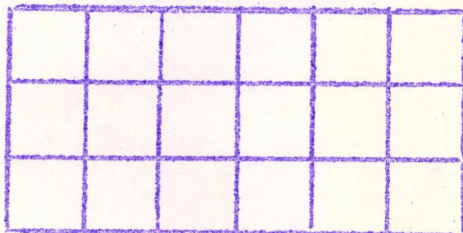
É importante reconhecer que nenhum arranjo é "mau", mas que alguns são melhores que outros. Se, por exemplo, as placas marcadas A e B fossem mudadas no diagrama acima, o conjunto das placas seria ainda ordenado pelos furos, mas não pelas formas. Vemos, assim, que a ordem implica numerosas variáveis e talvez parcialmente completada se nos referirmos a algumas destas variáveis, mas não a todas.

2) Utilizando todas as placas Quadrimath de uma mesma cor, colocá-las nos espaços para ter uma ordem, "um modelo". Por exemplo:



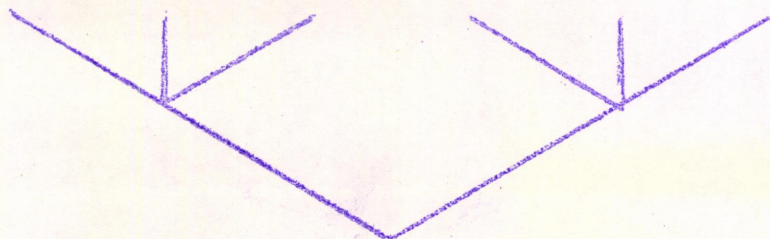
3) Utilizando as placas Trimath sem furos, colocá-las de um modo conveniente, uma placa em cada espaço.

Este arranjo terá uma cor diferente em cada coluna, mas a ordem destas cores é, de fato, arbitrária.

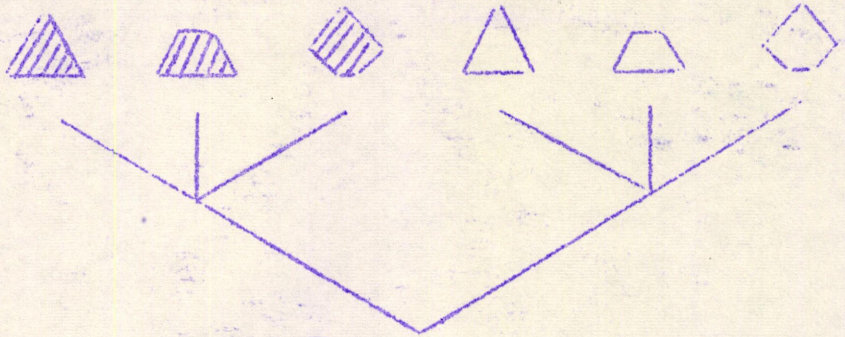


Á R V O R E S

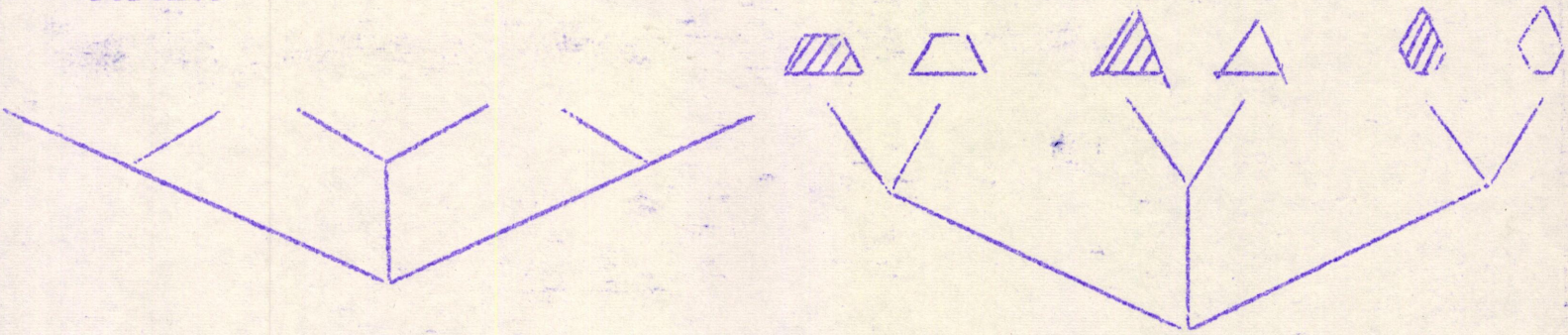
A utilização da árvore para por em evidência uma relação de ordem está estreitamente ligada ao arranjo linear descrito acima. Consideremos, por exemplo, a ordenação das placas Trimath vermelhas e brancas, não tendo furo. Um sistema de caminho conveniente é o seguinte.



O resultado pode ser o seguinte, mas, bem entendido, há, ainda, neste caso, vários soluções aceitáveis.

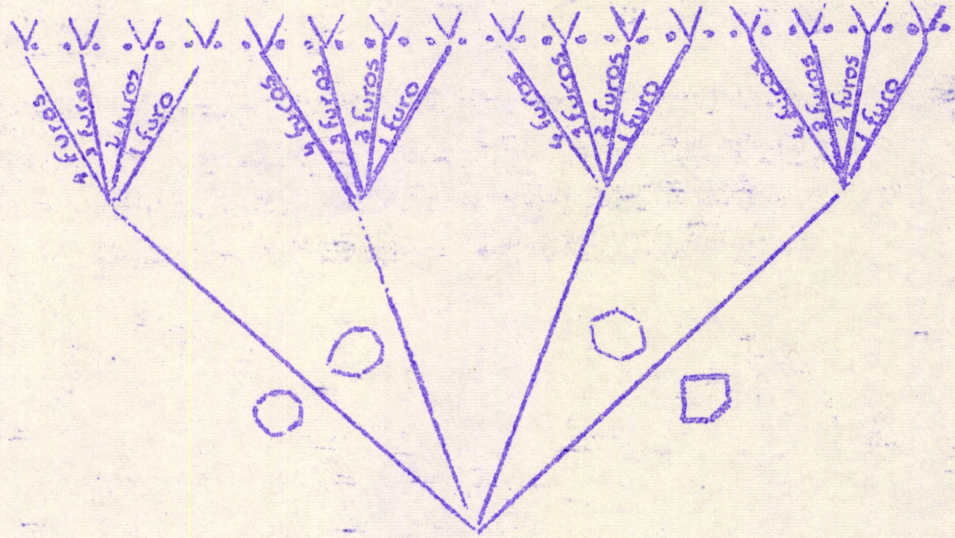


Se se muda a árvore como abaixo, resulta um arranjo diferente

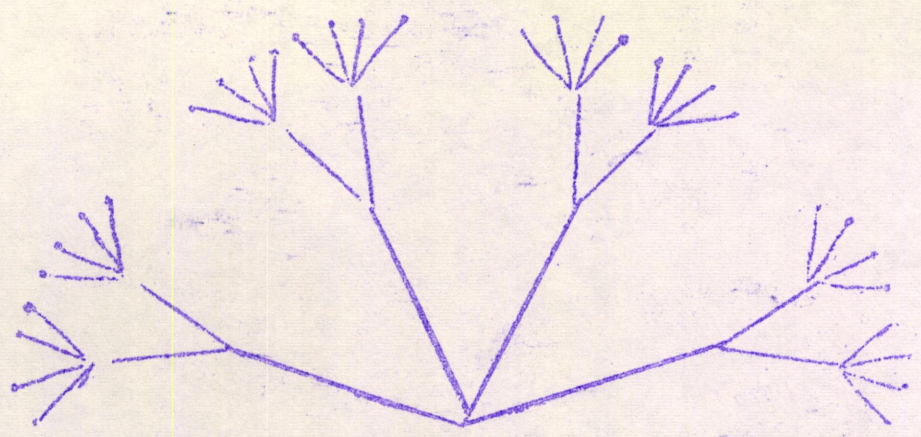


Abaixo, descobrimos sistemas mais complicados que podem ser desenvolvidos a partir das árvores simples que descrevemos.

1) Utilizando as placas negras e vermelhas de Quadrimath, colocá-las na extremidade de cada caminho segundo os atribuyos indicados.

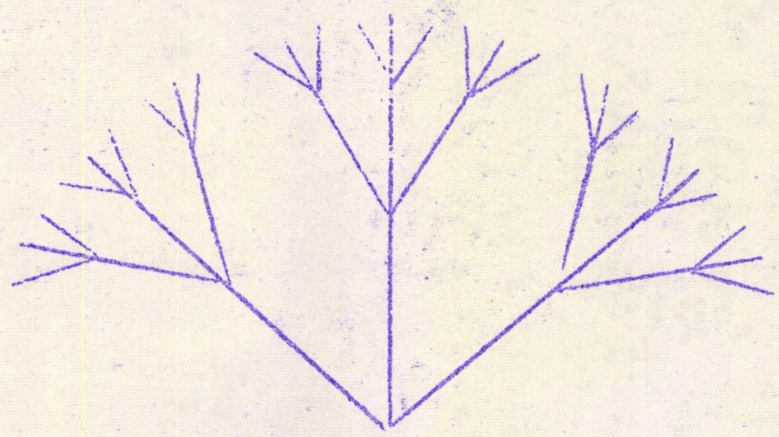


Utilizando as mesmas placas, arranjá-las ao término dos esminhos indicados no diagrama seguinte:

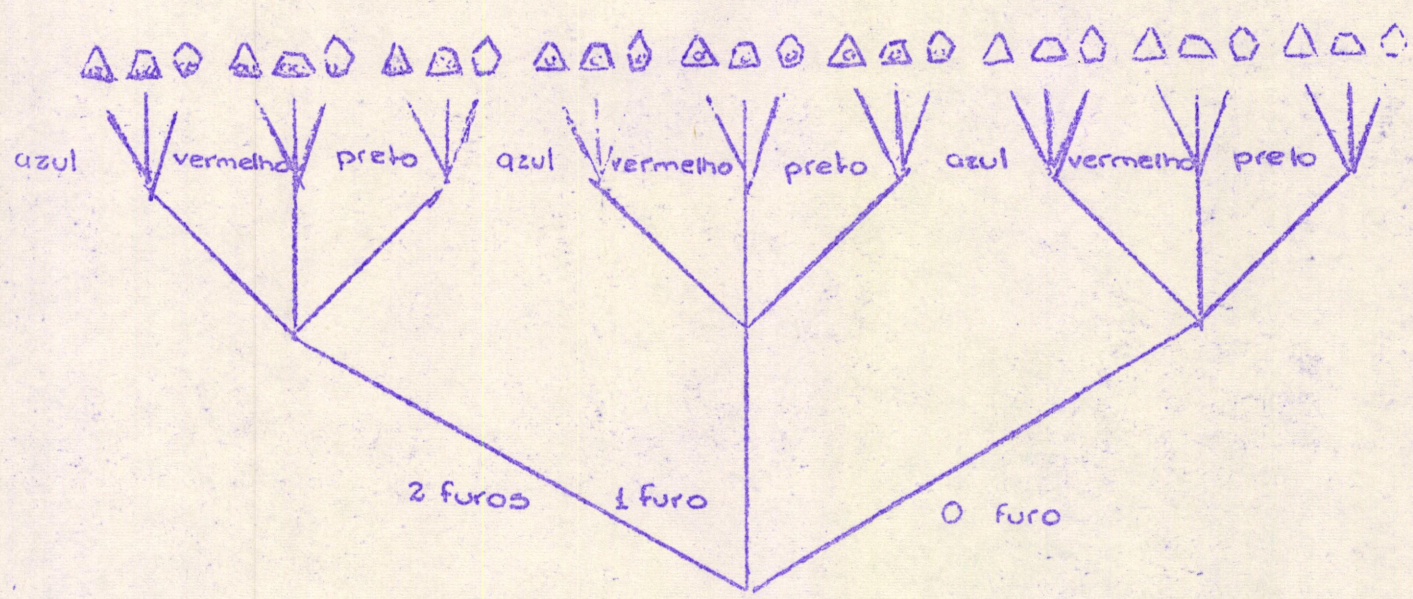


Está claro que existe uma grande variedade de arranjos de modo que um modelo pode ser reconhecido. Cada um destes arranjos corresponde a uma ordem que se pode utilizar para descrever o modelo.


2) Utilizando 3 cores das placas Trimath, arranjá-las na extremidade de cada rua abaixo, com o mesmo género de regras que antes.



A árvore dá uma excelente ocasião para discutir idéias que se referem a figuras significativas. Suponhamos que o arranjo seja o seguinte:



Imaginemos que o diagrama represente o mapa de ruas ou de caminhos em um jardim zoológico. A entrada se encontra na base do diagrama. Cada placa representa um muro.

O leão vive na jaula vermelha . Como podemos encontrá-lo partindo da entrada e como nomear os caminhos tendo como auxílio seus nomes? Não é necessário, digo, difícil de ver que é necessário seguir a rua "1 furo" logo, ao primeiro galho tomar a rua "vermelha" e logo a rua "chapéu". Assim, as direções são: "um furo" - "vermelha" - "chapéu". A primeira destas informações é a mais significativa e a última é muito menos. A ordem na qual as direções são indicadas é importante porque a primeira decisão deve se referir ao número de furos, à segunda a cor e, assim, sucessivamente. Todo o erro feito por ocasião da primeira direção teria por consequência uma marcha muito longa, mas as correções necessárias, em caso de erro na última direção seriam relativamente curtas.

Relações de Equivalência.

Coloquem as placas do Trimath e do Quadrimathem pilha de modo que as placas de mesma cor estejam em conjunto. Uma tal atividade deve dar seqüência a atividades permitindo às crianças descobrir o que é igual ou não igual, isto é, as relações de equivalência ou de diferença, porque nós estamos no segundo nível de abstração. A relação "mesma cor, mesma forma que" é chamada relação de equivalência. O resultado é que duas placas escolhidas na mesma pilha satisfazem a relação, uma vez que 2 placas escolhidas em pilhas diferentes não a satisfazem.

A partição de materiais em classes de equivalências é um aspecto essencial da atividade matemática. Por exemplo, é exatamente esta idéia que se utiliza na adição de frações como $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$, onde encontrar o denominador comum, é um instrumento para nos auxiliar a escolher uma fração conveniente da classe de equivalência contendo $\frac{1}{5}$.

Está claro que muitas outras relações de equivalência são possíveis com o Trimath e o Quadrimath e, com efeito, todas as relações "ser semelhante" descritas acima são relações de equivalência, quando se as aplica às placas de nosso jogo. Naturalmente, não é sempre o caso que se utiliza outros materiais.

As classes de equivalência estabelecidas segundo a relação "mesma cor" podem ser utilizados para outras atividades. Por exemplo, escolhendo somente uma placa de cada classe de equivalência, jogar o jogo de diferença descrito anteriormente. É igualmente útil ordenar as classes de equivalência segundo uma certa regra e logo ordenar as placas nas diferentes classes para que elas formem uma série linear completa.

Capítulo 4

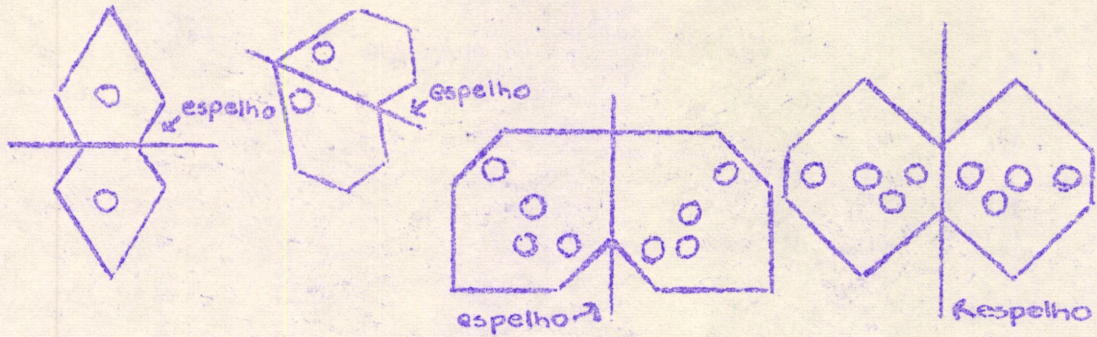
A t i v i d a d e s G e o m é t r i c a s

Simetria

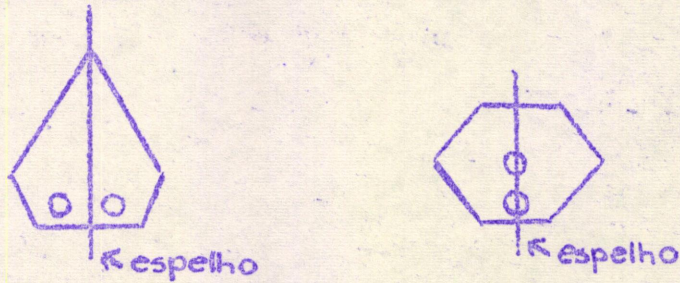
As placas Trimath e Quadrimath tem um grande número de aplicações no estudo das relações geométricas, especialmente examinando as diferentes formas de simetria. As crianças muito pequenas tem já uma certa idéia da reflexão, todas as propriedades da reflexão não são totalmente conhecidas.

Para começar de maneira simples, pode-se convidar as crianças a tomar uma placa, vermelha por exemplo, e a colocar um espelho de um lado, logo a examinar a reflexão no espelho. Tomar uma placa branca conveniente e colocá-la atrás do espelho para que ela fique igual à imagem no espelho, com exceção da cor. Logo colocar o espelho de acordo com os diferentes lados: outra placa é, então, colocada na nova posição conveniente, por exemplo:

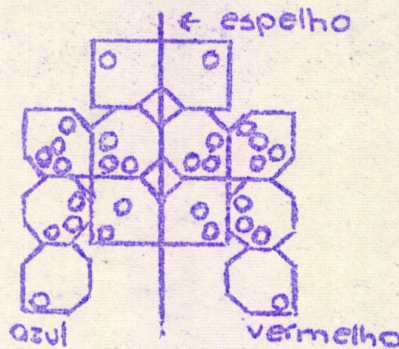
11/10/50



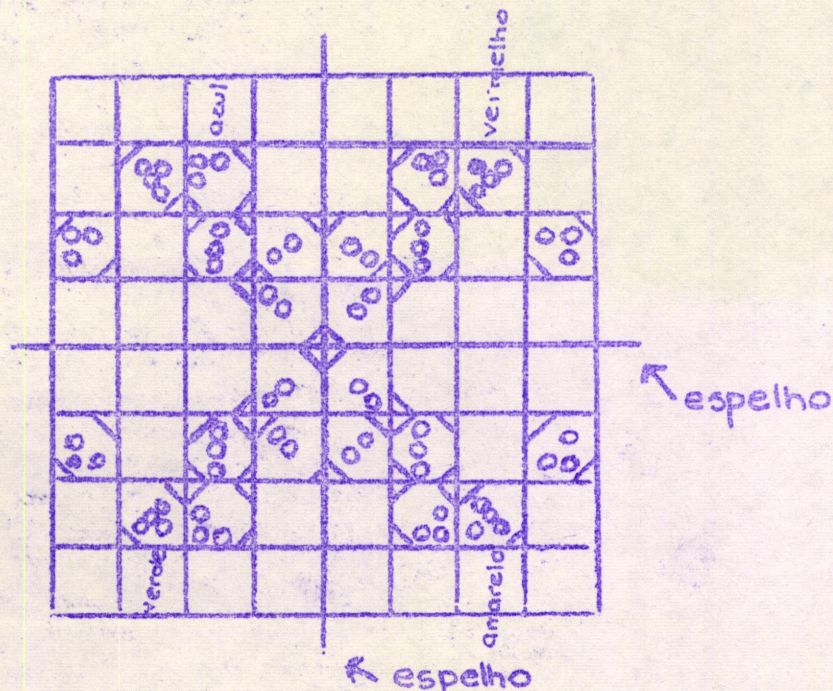
16 placas no conjunto Quadrimath foram concebidas de tal modo que são assimétricas. São as placas com 4 furos. São as únicas placas que é preciso girar para obter um arranjo conveniente de furos. Este fato pode se facilmente descoberto examinando as simetrias das peças com o auxílio de um espelho colocado de pé.



Pode-se construir muitos modelos utilizando um espelho e formas de duas cores. Por exemplo:



Utilizando uma segunda linha de reflexão, pode-se construir modelos ainda mais complexos. Colocar as placas corretamente é mais fácil se se fornece uma rede conveniente, mas se deve prestar atenção particular à posição das placas tendo 4 furos.



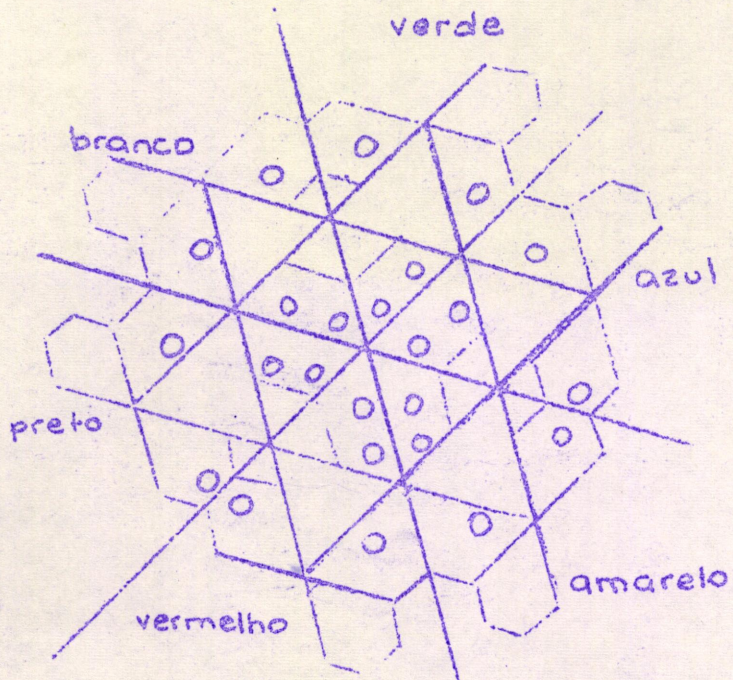
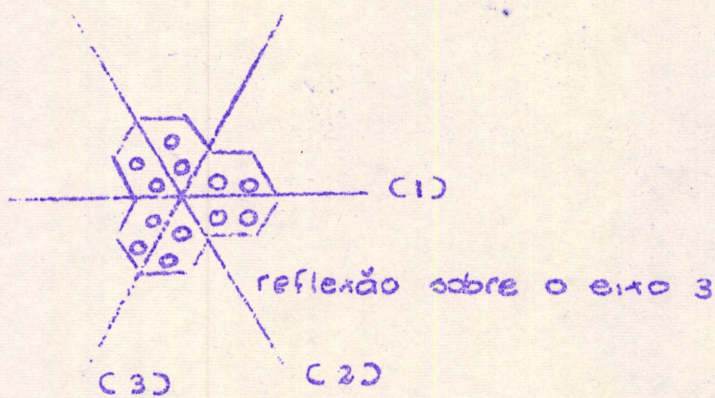
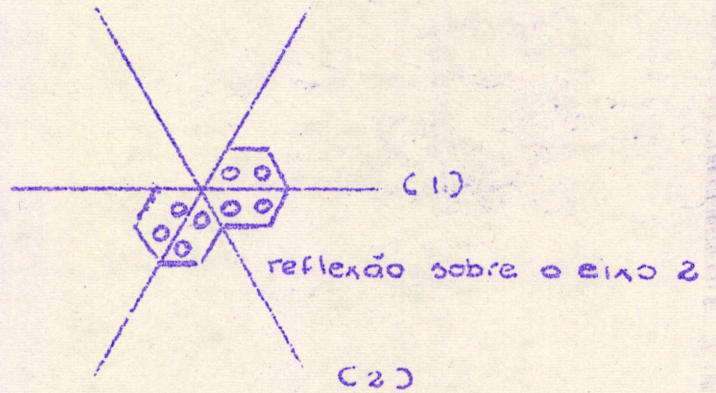
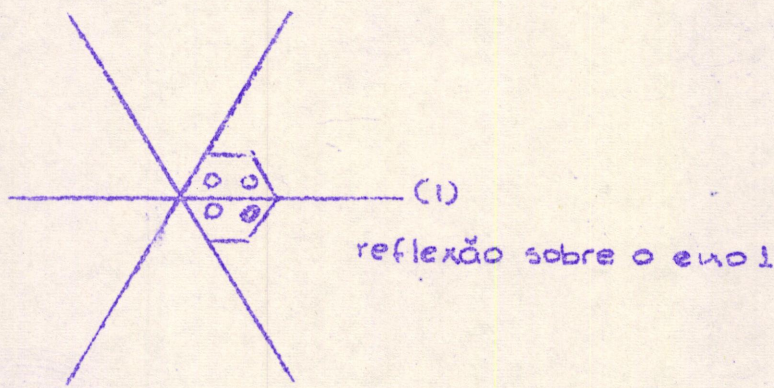
Descobre-se as propriedades da reflexão das 2 maneiras seguintes:

1ª - com o auxílio de um espelho. Ele deve nos auxiliar a estabelecer a posição da reflexão.

2ª - sem espelho, quando se trata de imaginar a posição da reflexão relacionando uma placa dada e logo (talvez) controlar esta posição com o auxílio de um espelho.

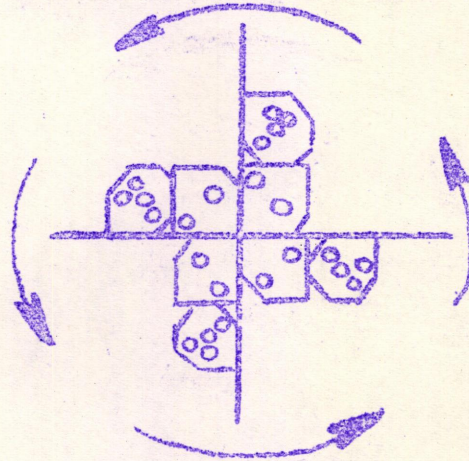
Identificar corretamente a imagem sem o espelho uma indicação importante a respeito das atitudes, de compreensão da criança, principalmente nas situações mais complexas.

Com as placas Trimath, é possível utilizar 3 eixos de simetria a 60° um em relação ao outro. Um dos arranjos possíveis é dado abaixo:

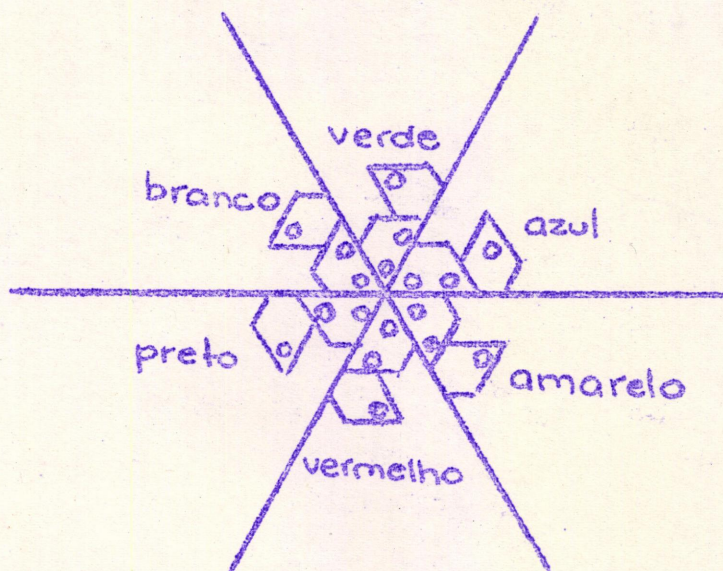


R O T A Ç Õ E S

As placas Trimath e Quadrimath se prestam utilmente à exploração da simetria de rotação. Nestes casos, as mesmas redes podem ser utilizadas como nos exercícios sobre a reflexão, mudando as regras naturalmente. Para as placas Quadrimath 2 linhas no ângulo reto oferecem as mesmas possibilidades, mas é preciso, evidentemente explorar as linhas que se reencontram nos outros ângulos. Uma situação pode ser a seguinte:



As placas Trimath que existem em 6 cores permitem o estudo das rotações repetidas por 60°. Ver o modelo abaixo:



Descobre-se que estes modelos de simetria reflexiva contem também algumas rotações. De fato, é impossível construir reflexões. As reflexões sucessivas em uma série de linhas paralelas produzem uma translação.

Utilizando as placas Quadrimath, pode-se demonstrar que a simetria de rotação para 180° e a reflexão sobre um eixo implicam necessariamente a reflexão sobre um segundo eixo em ângulo reto em relação ao primeiro. Esse resultado pode ser estendido para cobrir rotações a 120° ou outras rotações $\frac{360^\circ}{n}$

CALÇAMENTO

As crianças gostam muito de fazer modelos com as placas Trimath e Quadrimath. Entre as perguntas interessantes relacionadas com as possibilidades de modelos, há um que é de saber quais são as formas que, utilizadas sós, dão um calçamento tendo um certo número de formas mais interessantes para pavimentar que o quadrado tradicional? Outra pergunta: é possível cobrir uma superfície utilizando todas as peças Trimath ou Quadrimath de tal modo que não haja espaço vazio com a exceção dos buracos? Esta pergunta no caso do Trimath conduz a toda uma variedade de soluções possíveis.

Uma destas soluções permite colocar todas as peças em um quadrado do qual o lado tem 5 vezes o comprimento do triângulo. O perímetro mínimo para um tal arranjo parece ser 19 vezes o lado do triângulo, mas isto poderia ser muito menos que aquilo.

Conclusão

Este livrinho não tem por finalidade tratar de uma maneira exaustiva a aplicação de jogos Trimath e Quadrimath. Se tivessemos êxito em dar ao leitor algumas idéias sobre a variedade das utilizações, atingirmos nossa finalidade. É certo que o leitor descobrirá muitas outras possibilidades.

