"Mat. Moderna"

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Dienes, Z.P. e Golding, E.W. Trad. A. B. Krebs

Ensembles, Nombres et Puissances

1.6. Operações sôbre os conjuntos (pag. 16)

Reunião e intersecção

Suponhamos que tomamos o conjunto de todos os meninos da classe, depois, o conjunto de tôdas as crianças vestidas de vermelho ou, que tenham qualquer outro atributo; as crianças não procuram mais que exprimir - e mesmo barulhentamente - seu desejo sôbre a maneira de se agrupar em conjuntos. A reunião de dois conjuntos não é nada mais que o fato de reunir as crianças que possuem um ou outro atributo. No nosso exemplo nós reuniremos tôdas as crianças que são meninos com tôdas as crianças vestidasde vermelho incluindo, bem entendido, os meninos vestidos de vermelho. Nós vamos encontrar aqui uma pequena dificuldade devido à realização material da separação entre os meninos e as crianças vestidas de vermelho. Naturalmente, se dispusermos de cordas, passaremos uma ao redor de todos os meninos e uma outra ao redor de tôdas as crianças vestidas de vermelho, e as crianças verão logo que é necessário que as cordas cruzem, se todos devem ser rodeados por cordas; os meninos de vermelho estarão dentro das duas cordas. A única maneira de evitar esta dificuldade é considerar reuniões de conjuntos nos quais não há elementos comuns. Evidentemente, a formação de reuniões assim, se encontrará facilitada, mas estas reuniões teriam um carácter mais geral, e as crianças poderiam deduzir que não se pode fazer reuniões senão de conjuntos que não tenham elementos comuns. Ora, não é nada disso. Evitemos então, colocar no espírito da criança os fundamentos de um falso conceito. Outra maneira de abordar o problema consistirá em considerar as partes comuns dos conjuntos antes de considerar sua reunião. O têrmo técnico geralmente empregado em matéria de conjuntos, quando se fala de suas partes comuns, é a <u>intersecção</u>. Tal como falando em estrada, quando duas estradas se cruzam, a intersecção é esta parte que pertence tanto a uma estrada quanto à outra. A intersecção de cada conjunto é a parte dêste conjunto que está também no outro. (Em nosso exemplo, os meninos vestidos de vermelho formam o conjunto dos elementos que estão ao mesmo tempo no conjunto dos meninos e no conjunto das crianças vestidas de vermelho. Se então nós pegarmos, por assim dizer, o touro pelos chifres, e afrontarmos a dificuldade desde o início, teremos, talvez, menos dificuldades mais tarde. Nós sugerimos, então, estudar as reuniões e as intersecções de conjuntos ao mesmo tempo e não separadamente. Mas, como nós já temos dito, temos também a possibilidade de avançar em pequenos passos, de estudar de início, as reuniões onde não há partes comuns, para passar em seguida às intersecções e, enfim, às reuniões de conjuntos com partes comuns não vazias.

Se as crianças já estão familiarizadas com os blocos lógicos, talvez já tenham feito jogos comportando conjunçoẽs e disjunçoẽs. Um jogo de conjunção é um jôgo sôbre "ao mesmo tempo ...e..." enquanto que um jôgo de disjunção é um jôgo sôbre "ou bien ou bien " Nos jogos conjuntivos, com os blocos lógicos, ensinamos às crianças a considerar os atributos "compostos" que sejam tais que um bloco possa possuí-los ao mesmo tempo. Por exemplo, vermelho e quadrado. Um bloco que é ao mesmo tempo vermelho e quadrado possui o atributo "vermelho" e o atributo "quadrado". Se, pois, nós queremos formar o conjunto de todos os blocos vermelhos e o conjunto de todos os blocos quadrados, então os blocos que são vermelhos e quadrados estarão contidos na intersecção do conjunto dos blocos quadrados. Os jogos conjuntivos quando são jogados com os atributos correspondem aos jogos de intersecção jogados com conjuntos. Assim os diagramas de Venn construídos com os blocos lógicos, correspondem exatamente ao procedimento que consiste em rodear as crianças com cordas e realizar, assim, as intersecçoẽs. Desta maneira será naturalmente possível pensar em mais de dois atributos, três por exemplo, e, tomando as crianças como membros de nosso universo, fazer de um diagrama de Venn em três arcos. Por exemplo, podemos tomar como primeiro atributo a qualidade de menino e pensar no conjunto de todos os meninos. Depois podemos tomar como outro atributo o fato de trajar vermelho e formar o conjunto de tôdas as crianças que trajam vermelho. Enfim, tomar os cabelos loiros como terceiro atributo, constituindo o conjunto de tôdas as crianças de cabelos loiros. Podemos, então, passar cordas ao redor dêste conjuntos e deixar as crianças determinarem aos quais elas pertencem, porque elas bem sabem como estão vestidas, se são meninos ou meninas, se têm ou não cabelos loiros.
Assim, jogar as intersecçoẽs, no caso dos conjuntos, é em suma a "mesma" coisa que jogar o jôgo do "e" com os atributos.

Do mesmo modo fazer reunioẽs, é a mesma coisa que jogar o "ou...ou" com os atributos. Tomemos, por exemplo, a reunião do conjunto dos meninos com o conjunto das crianças vestidas de vermelho; então, a reunião formada pela totalidade das crianças consideradas de um e outro conjunto pode ser definida pelo atributo "ou bem ser um menino ou bem estar vestido de vermelho". Isto significa pois que nós consideramos tôdas as crianças que estão em uma ou outra corda. Naturalmente no caso de três atributos, nós consideramos o conjunto das crianças que é a reunião do conjunto dos meninos com o conjunto das crianças vestidas de vermelho, depois, a reunião desta reunião com o conjunto das crianças de cabelos loiros. Então, nós podemos dizer que, na reunião total, nós consideramos tôda criança que tem um ou outro dos três atributos, isto é:

é necessário que seja um menino, que esteja vestido de vermelho, ou ainda que tenha cabelos loiros.

Podemos tornar o jôgo do "ou ...ou" mais realista e jun tá-lo ao jôgo das reuniões dizendo que vamos fazer um club com regras para nele entrar. Diremos, por exemplo, que todos os meninos tem o direito de fazer parte do club, e do mesmo modo tôda a pessoa vestida de vermelho ou que tenha cabelos loiros. As crianças verão que se não é meninopode ser admitido estando vestido de vermelho; e mesmo não - tendo roupa vermelha e não sendo menino, pode ser recebido pelos cabelos loiros. Podemos é claro, multiplicar os exercícios e as crianças descobrem as situações "se ... então..." correspondentes. Naturalmente, antes de chegar lá, é necessário fazer jogos com as reuniões e será necessário estabelecer que todo elemento de uma reunião de dois - conjuntos possui um ou outro dos atributos que definem cada um dos - dois conjuntos que estão reunidos.

1.7. Simbolização das operações sôbre os conjuntos

Em um determinado estado de aprendizagem podemos introduzir os primeiros símbolos para anotar as operações executadas sôbre - os conjuntos. As reuniões são geralmente designadas por um e as intersecções por um invertido. Por exemplo, se S e T representam dois conjuntos, sua reunião se descreverá S T. A intersecção de S e T se escreverá S T. O conjunto vazio se representará como já sugerimos, - não colocando nada entre as chaves. Assim, para marcar que S e T não têm nenhum elemento comum, escreveremos

$$S \cap T = \{\ \}$$

Isto significa que a intersecção dos conjuntos S e T e o conjunto vazio. Em outros têrmos, o conjunto dos elementos que estão em comum é vazio, ou ainda, êles não têm elemento comum. Pode também acontecer que reunindo dois conjuntos obtenhamos todo o universo. Por exemplo, se o universo é formado das crianças da classe que chamamos M (G) o conjunto dos meninose F o conjunto das meninas, a reunião de M e F dá o conjunto das crianças, portanto, o universo. Podemos empregar a letra maíuscula I, para "identidade". Nós poderíamos, então, em nosso exemplo escrever

$$M \cup F = I$$

Isto significa que a reunião do conjunto dos meninos e do conjunto das meninas é a mesma coisa que o conjunto de todos os elementos do universo. Nós dizemos, neste caso, que M é o conjunto complementar de F e F é o conjunto complementar de M, mas (somente) se M e F não têm nenhum elemento comum. - Assim, os dois conjuntos M e F são complementares um do outro se sòmente se as duas equações seguintes se verificam:

$$(1) \quad M \cup F = I$$

$$(2) \quad M \cap F = \{\}$$

Estas equações significam, na linguagem menos concisa - de todos os dias: "O conjunto dos meninos e o conjunto das meninas, se os reunimos, nos dá o conjunto de tôdas as crianças da classe e não - há nenhum menino que seja ao mesmo tempo menina nem meninas que sejam ao mesmo tempo no das meninas." Neste caso, é evidente que tôda a -

criança deve ser um menino OU uma menina e nenhuma criança pode ser ao mesmo tempo menino e menina. Exemplos de conjuntos complementares dêste gênero se apresentam seguidamente em matemática, os elementos dos conjuntos sendo os elementos de outras estruturas matemáticas. - Por exemplo, se o universo é composto do conjunto dos números naturais, isto é, 1,2,3,4,5, etc ... podemos dizer que o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares são conjuntos complementares, porque todo número natural é par ou impar e não há número natural que possa ser ao mesmo tempo par e impar. Assim, as equações (1) e (2) são verdadeiras tôdas duas ao mesmo tempo para o conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares. Êstes exemplos podem também servir para ilustrar esta teoria, com a condição de que as crianças já tenham adquirido um conhecimento prático suficiente - dos números. Ora, os números como tais ainda não foram introduzidos nêste estágio; nós nos propuzemos basear a noção de número sôbre esta de conjuntos e, nesta fase, não nos ocupamos ainda dos conjuntos como tal. Mais tarde, quando tivermos introduzido os números, poderemos considerar os conjuntos cujos elementos são os próprios números ou os conjuntos cujos elementos são conjuntos de números, e assim por diante. O céu é o único teto dêste gênero de generalização em matemática, mesmo ao nível do ensino do primeiro período.

### 1.8. Conjunto-diferença, complemento e seus símbolos

Nós vimos que é possível partir o universo em dois conjuntos complementares, tais que o conjunto dos meninos e o conjunto das meninas, se o universo está formado por tôdas as crianças da classe. Bem entendido, esta operação pode ser executada não somente sôbre o universo, mas ainda sôbre não importa qual outro conjunto. Nêste caso, os conjuntos parciais formados pela partição do conjunto de origem se chamam de subconjuntos. Por exemplo, se nós tomamos ainda como universo tôdas as crianças da classe, os meninos constituiram um conjunto e, como subconjunto, poderemos tomar os meninos de - seis anos de idade,. O conjunto dos meninos de seis anos de idade - constitui um subconjunto do conjunto dos meninos. Se entretanto - queremos considerar os elementos do conjunto dos meninos que não estão no subconjunto, nós vamos, naturalmente, tomar os meninos que estão na classe mas que não tem seis anos, isto é, os que cinco anos - ou sete anos, ou oito anos ou tôda outra idade que não seja o seis. A parte restante de um conjunto, que não inclui um certo subconjunto, é o conjunto-diferença do conjunto de base e do subconjunto. Nós - podemos dizer que o conjunto dos meninos que não têm seis anos é o - conjunto diferença entre o conjunto dos meninos e o conjunto dos meninos de seis anos de idade. Podemos empregar uma notação para esta diferença, um pouco como o sinal menos para os números. Empregamos seguidamente um traço oblíquo. Admitamos por exemplo, que M seja -

o conjunto dos meninos e S o conjunto dos meninos de seis anos. O conjunto M S é então o conjunto diferença, isto é, o conjunto dos meninos que não têm seis anos. Chamamos D êste conjunto diferença podemos então escrever:

$$D = M \mid S$$

Podemos igualmente, seguramente, utilizar nesta notação para os conjuntos complementares e, por exemplo, escrever:

$$M = I \mid F$$
$$F = I \mid M$$

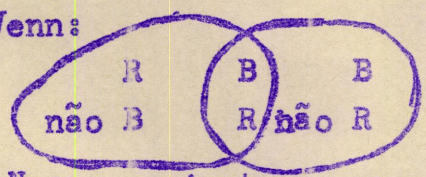
A primeira igualdade significa que o conjunto dos rapazes é o conjunto das crianças que não são meninas. A seguinda igualdade significa que o conjunto das meninas é o conjunto das crianças que não são rapazes. Assim o sinal nos permite designar os conjuntos complementares.

Para começar, é bom utilizar esta noção com parcimônia. Acabaremos por empregá-lo junto com os sinais da reunião e intersecção. Suponhamos, por exemplo, que queremos falar da intersecção de um conjunto com um outro conjunto diferença ou com um conjunto complementar. Seja, ainda uma vez, como universo o conjunto das crianças da classe e um conjunto B formado de tôdas as crianças loiras; se chamamos R o conjunto das crianças vestidas de vermelho, como designaremos o conjunto das crianças vestidas de vermelho que não têm cabelos loiros? As crianças que não têm cabelos loiros vão formar o conjunto complementar dêste das crianças que têm os cabelos loiros. Assim, o conjunto das crianças que não são loiras pode ser escrito I | B . O conjunto das crianças vestidas de vermelho se escreve (R). Ora, o que nos interessa agora, é a parte comum, ou intersecção dêstes dois conjuntos. Nós escrevemos:

$$\{I \mid B\} \cap \{R\}$$

Êste conjunto é aquêle do qual falamos, isto é, o conjunto das crianças não loiras que vestem vermelho ou ainda o conjunto as crianças vestidas de vermelho que não são loiras.

Nunca será demais insistir que êste "cálculo" sôbre os conjuntos não é para ser apresentado a qualquer preço para a criança. O que importa é dar-lhes idéia de conjunto, idéia de relação entre um elemento e o conjunto, as noções de conjunto vazio, de reunião, de intersecção e de complementos dos conjuntos. Se as crianças mostram qualquer dificuldade em utilisar o simbolismo, é necessário renunciar à êle. Seria bem mais fácil, na maior parte dos casos escrever a definição de um conjunto sob a forma de uma frase da linguagem corrente como temos feito muitas vezes até aqui. Por exemplo, em lugar de escrever a definição de um conjunto de uma maneira formal, poderíamos dizer como temos feito: "O conjunto das crianças que não têm cabelos loiros e que vestem vermelho". Em certas idades e em certos estados êste gêneros de descrição verbal convém mais. Há, bem entendido, uma outra maneira de expressão, os diagramas de Venn:




Nosso conjunto se encontra à esquerda (R não B). Esta notação é muito clara e desde que as crianças tenham comprendido - que os limites do diagrama de Venn indicam as condições de pertinência a um conjunto para os objetos que estão dentro e de não-pertinência a um conjunto para os objetos que estão fora não haverá - nenhuma dificuldade em traçar o diagrama de Venn de qualquer conjunto. De fato, êste diagrama fará as crianças compreenderem a noção de conjunto, que nós as queremos fazer adquirir, muito mais rápido e mais eficazmente que tôda outra notação formal. Ao contrário, haverá crianças que apreciarão a concisão e a beleza de uma notação - formal: não devemos privá-los, de sorte quen não se pode impor a - este assunto nenhuma regra rígida. O que não deixa dúvida é que - basta recorrer a uma notação muito simples para conservar o traçado feito, e certas abreviações serão provàvelmente, necessárias. Não é necessário, nem possível, escrever tudo por extenso em linguagem corrente. As crianças são prontas a abreviar; quanto a saber em - que medida fazendo, elas podem progredir para uma linguagem mais - concisa e mais formal, ser-á a situação da classe que permitirá decidir.

As operações sôbre conjuntos que vão ter influência - importante sôbre a introdução das operações aritméticas sobre os números são:

1) a operação que constroi o conjunto-reunião
2) a operação que constroi o conjunto-diferença

A reunião de dois conjuntos, no caso onde a intersecção dêstes dois conjuntos é vazia, constituirá o estado o anterior, preparatório (préalable) da operação aritmética de adição. A descoberta da diférença entre dois conjuntos conduz à descoberta da diferença entre dois números, isto,é, à operação aritmética de subtração. Mas antes de abordar estas operações, é necessário descobrir o conceito de número como propriedade de um conjunto, como mostraremos no 2º capítulo.

1.9. Efeitos de uma troca de universo

Para poder introduzir a operação de multiplicação, é - necessário que as crianças tenham experiência não sòmente dos conjuntos de objetos, mas, ainda de conjuntos de conjuntos de objetos. Por exemplo, organizamos as crianças da classe aos pares; podemos em seguida falar de um conjunto de pares das crianças da classe, e os elementos dêste conjunto não serão mais constituidos cada um por uma - criança mas por um par de crianças. Fazendo isto passamos do univer so das crianças para o universo dos conjuntos de crianças. Trata-se de um universo muito mais vasto, com as trinta crianças da classe podemos constituir literalmente milhões de conjuntos de crianças. Existem de fato, numerosas maneiras de constituir, a partir de trinta crianças, conjuntos de três crianças, de quatro crianças, etc. Deixemos nosso leitor, se isto o interessa, calcular quantos conjuntos diferentes podemos fazer com trinta crianças ou trinta objetos, de um universo. O leitor não matemático ficará surprêso com a resposta. Não é só a vasta extensão da pertinência que é uma fonte de dificuldades nesta parte, mais ainda a diferença de natureza desta pertinencia. É muitas vêzes porque as crianças não aprenderam a manipular os conju conjuntos como elementos de outros conjuntos que elas não são capazes de compreender plenamente todos os aspectos do problema da multiplicação. Pensamos que é necessário demorar nos conjuntos cujos elementos são conjuntos. Podemos, por exemplo, tomar como universo não somente conjuntos de crianças, mas ainda conjuntos dos blocos lógicos ou conjuntos de móveis, etc. ... A todo o momento será necessário lembrar as crianças que êstes não são mais objetos isolados mas grupos ou conjuntos de objetos que são os elementos do conjunto. Os diagramas de Venn proporcionam bons exemplos da diferença entre um problema posto no universo dos blocos lógicos e o mesmo problema posto no universo dos conjuntos de blocos lógicos. Por exemplo, se tomamos um diagrama de Venn composto de dois círculos, e num dos dois círculos colocamos os blocos azuis e no outro os blocos vermelhos, na intersecção não poderemos colocar bloco algum porque não há blocos vermelhosque sejam ao mesmo tempo azuis, nem blocos azuis que sejam ao mesmo tempo vermelhos. Ao contrário, se o universo é constituido por conjuntos de blocos, então podemos ter conjuntos de blocos que são vermelhos e azuis, porque no conjunto nós podemos colocar certos blocos azuis e certos blocos vermelhos, Então, no diagrama de Venn, nêste caso, a pertinência consistirá em pilhas de blocos. As pilhas nas partes do conjunto vermelho, que não estão no conjunto azul, serão compostas inteiramente de blocos vermelhos. Na parte do conjunto azul, o que não está no conjunto vermelho, as pilhas serão feitas inteiramente de blocos azuis. Mas na intersecção, isto é, na parte do conjunto vermelho que está também no conjunto azul, nós faremos pilhas contendo ao mesmo tempo, blocos vermelhos e blocos azuis. Assim, se o universo composto de conjuntos de blocos, a intersecção do diagrama de Venn não está vazia; se o universo é composto de blocos, a intersecção do mesmo diagrama de Venn está vazia.

Arquivado
[illegible]
4/9/80