INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Dienes, Z.P.; Golding, E.W. Trad. A.B. Krebs

Ensembles, Nombres et Puissances

1. Ensembles

1. 1. Introdução aos conjuntos

Muitas professôras devem ainda se perguntar porque será necessário estudar os conjuntos para estudar os números. Diremos, então, que êste estudo é necessário porque, querendo facilitar uma melhor compreensão do conceito de número, na aprendizagem da criança, é preciso que o caminho que a êle conduz permita descobrir os diferentes aspectos dêste conceito.

Em nosso mundo moderno, precisamos ajudar aos jovens a compreender como as coisas se encaixam umas nas outras, porque o mundo aumenta muito ràpidamente em complexidade e é necessário ajustar, ~~entre elas, as~~ tais situações cada vez mais complexas. O número não faz excepção. O número é um conceito muito complexo e, para ~~aprender a adaptar entre êles~~ apreender e ajuntar os elementos conceituais que o constituem, será preciso primeiro conhecer êsses elementos. Um dêstes elementos, é a noção de conjunto. Os números são ~~as~~ propriedades dos conjuntos. Por exemplo o número 2, o número 3, ou qualquer outro número, não podem ser aplicados a objetos ~~únicos~~ isolados. ~~É desprovido de~~ Não tem sentido falar de uma mesa 2 ou de uma casa 3. Podemos falar de uma mesa redonda, de uma casa quadrada, mas não de uma casa dois. Falamos de duas casas. Isto quer dizer que dois se refere a um conjunto de casas.

As primeiras experiências das crianças, na escola, deveriam comportar experiências a propósito de conjuntos. Elas deveriam discutir entre elas e com a professôra o que é um conjunto de objetos. Um bom ponto de partida para esta discussão seria falar dos "conjuntos" que elas podem ter em suas casas, mas sem pronunciar de início a palavra "conjunto" da qual elas ainda não conhecem o sentido. Logo as crianças falarão de seu jôgo de cubos, de seu trem, de um jôgo de cartas - as Sete Famílias -, de uma coleção de sêlos, e assim, de muitas outras coisas com as quais elas brincam. Poderemos então discutir com elas para descobrir quantas palavras há para falar destas séries, destas coleções, dêstes jogos; ~~falamos~~ dirão de montes, pilhas, e temos visto muitas crianças ~~muito~~ pequenas sugerirem até duas duzias de palavras diferentes. Diremos, então, que todas estas palavras podem também convir, que todas satisfazem, mas que afinal seria melhor escolher uma só; dêste modo todos saberão do que se fala. E como em todos os casos tratamos de objetos, de coisas que "estão juntas", podemos levá-los a compreender êste último têrmo.

723

Pensando em conjuntos, as crianças pensarão primeiro nos que agrupam os objetos que têm qualquer coisa em cmmum ou nos que têm a mesma utilidade. Por exemplo, o conjunto de trens ou o conjunto de mesas, ou talvez o conjunto das crianças da classe,ou ainda o conjunto das crianças da classe que têm olhos azuis.Em cada um dêsses casos os elementos do conjunto têm, ou, ~~bem~~, qualquer coisa em comum no sentido de que têm a mesma propriedade, ou ~~bem~~ o mesmo uso, o que é,ainda de fato,uma propriedade.

Nota 1. Dizemos que o conjunto é "definido por compreehsão" * mas esta termilogia não será proposta às crianças desta idade.

Assim, nêste caso, nós utilizamos a palavra "conjunto" para designar uma coleção de objetos que têm a mesma propriedade:vamos, primeiro imaginar a propriedade, depois vamos reunir os objetos que a possuem.Mas, não é esta a única maneira em que podemos utilizar a noção de conjunto.Podemos também, tomar uma determinada pessoa, um lápis, uma cidade, uma caixa, uma árvore, uma flor e uma pedra, e os considerar como constituindo um conjunto. Os elementos dêste não possuem nenhuma propriedade comum reconhecível, senão que por um~~a~~ ato de vontade nós decidimos que doravante êles formarão um conjunto.

Nota 2. Conjunto"definido em extensão".

~~Nos encontramos~~ Atingimos, aqui, ~~em~~ um nível talvez um pouco mais artificial do pensamento em matéria de conjuntos; assim, será sem dúvida, preferível não ir muito rápido. O que é sempre necessário é que o professor compreenda bem isto : que a noção de conjunto não implica necessàriamente na prévia existência de uma propriedade comum. [~~Ao contrário, é comum falar de um conjunto de objetos desde que os possuam.~~

1.2. Pertinência e não-pertinência a um conjunto   Jay 8

Observamos ~~já~~ que a noção de pertinência já surgiu na discussão. Como sabemos que um objeto pertence ou não a um conjunto? Que uma certa pessoa, que um certo objeto é ou não ~~é~~ membro, elemento de um conjunto.? Em todo caso, onde procuraremos êsses elementos? O universo é muito vasto e se nós procurarmos por tôda a parte, ~~não~~ jamais estaremos ~~nunca~~ seguras de ter - ou de não ter - a totalidade de elementos de um conjunto. ~~Também reduzimos~~ Assim reduzimos normalmente o universo a uma pequena parte do universo real. Por exemplo, se falamos das "crianças loiras," nós pensamos,geralmente, nas crianças da escola, e nas da classe onde nós lecionamos. Nêste caso,~~se~~ são as crianças da escola ou as da classe que constituem o universo restrito. Ou, ainda,suponhamos que temos um certo ~~gênero~~ espécie de ~~pérolas~~ contas. Nós podemos dizer: "Pensamos nas ~~pérolas~~ contas vermelhas". Nós não pensamos em todas as ~~pérolas~~ contas que existem nêste mundo ou que poderiam mesmo existir em outros mundos, nós pensamos sômente nas ~~pérolas~~ contas vermelhas que ~~não~~ estão na caixa diante de nós.Al-

~~Este~~

gumas são vermelhas, outras não são. Nós dizemos às crianças:"Pensem no conjunto das ~~pérolas~~ contas vermelhas". O que nós queremos dizer, é :Pensem na coleção de ~~pérolas~~ contas vermelhas que podem fazer com as ~~pérolas~~ contas que estão na caixa".Assim, o universo se encontra restrito às ~~pérolas~~ contas que estão na caixa, e o conjunto que vamos tratar tem por elementos as ~~pérola~~ contas vermelhas ~~presas nesta~~ que estão na caixa. Restringindo o universo ao que é pràticamente manipulável é inevitável, se falamos dos conjuntos em têrmos concretos.Mas, bem entendido,se adotamos o segundo método de constituição dos conjuntos, isto é, o que consiste em considerar certos objetos como pertencente a um conjunto por ~~definição~~ extensão?, não há mais necessidade de universo.É suficiente dizer:"Tome isto. Aquilo, E ainda, aquilo".~~Logo que~~ Quando acabamos de dizer o que queremos, nosso conjunto se encontra constituido.O que não sabemos é a extensão do que não pertence ao nosso conjunto.Isto pode ~~nos deixar indiferentes~~ não parecer importante até o momento em que vamos efetuar sôbre nosso conjunto as operações para as quais nós temos necessidade de saber quais são os elementos do universo que não são elementos do nosso conjunto.É esta, precisamente, uma das operações que ~~nós~~ teremos de examinar no decorrer de nosso estudo de conjuntos.

~~Também~~ Assim, o primeiro ponto a abordar, em nosso estudo dos conjuntos, deve ser êste de pertinência e da não pertinência a um conjunto.Mostremos primeiro, claramente, às crianças que é preciso decidir a escolha de um universo.Assim, em cada lição poderá haver uma pequena discussão : qual universo nós vamos ~~tomar~~ escolher hoje? *1 Por exemplo, um decide que será o de todas as crianças da classe.Nêsse caso não se conta a professôra. Ou então,será o de todas as pessoas da classe e, então a professôra é contada.Ou ainda, ~~podemos~~ decidir que é o de todas as criaturas da classe.Se há um pássaro ou alguns ratos brancos, ou outros seres vivos, que não são pessoas, na classe, êles também farão ~~também~~ parte do universo.Depois as crianças vão nomear as propriedades. Por exemplo, ~~todas as criaturas louras, ou~~ todos as criatura ou todos os meninos, ~~ou todos os animais machos~~ ou todos os animais machos poderiam pertencer ao nosso conjunto.Poderemos em seguida fazer todos irem a um mesmo canto da classe, e veremos,então, claramente que todas as ~~criaturas~~ criaturas que estão no mesmo canto da classe pertencem também, ao conjunto dos <u>meninos</u> da classe e que as que não foram pa ra êste canto não pertencem ao conjunto dos "meninos" da classe.Depois, uma criança vai talvez sugerir uma outra propriedade, por exemplo "~~as criaturas~~ sêres de seis anos de idade".Nêste caso todos os que tiverem seis anos pertencerão ao conjunto, e qualquer que seja, ~~animal~~ animal ~~ou criança~~ ou criança, que não tiver seis anos não pertencerá ao conjunto.Segundo todas as probabilidades, não haverá animais de tal idade na classe, de modo que o conjunto se encontrará limitado aos humanos ~~ainda~~ e

Nota 1 - É muito aconselhável coordenar essas discussões com o Estudo de 1 "Centro de Interêsse" ou aproveitar, no momento próprio, como livro texto.

ainda que ~~nêste caso~~ o universo contém lá ~~ainda~~ animais. Assim, são as crianças de seis anos que constituirão o conjunto, enquanto as crianças de cinco anos, ou de mais de seis anos, e os animais constituirão o resto do universo. Damos um nome a ~~isto que~~ o que resta do universo com ~~por~~ referência ao conjunto escolhido e ensinamos a palavra às crianças. Esta palavra é "complemento". O complemento do conjunto é a parte do universo que não constitui o conjunto. Por exemplo, se pensamos no conjunto de contas ~~pérolas~~ vermelhas da caixa, o universo estando formado por tôdas as contas ~~pérolas~~ da caixa, o complemento do conjunto das contas ~~pérolas~~ vermelhas é o conjunto das contas ~~pérola s~~ que não são vermelhas. Podem haver contas ~~ser~~ azuis, amarelas, verdes; todas reunidas ~~ela s~~ formam o complemento, isto é, o conjunto complementar do conjunto ~~dêste~~ das contas ~~pérolas~~ vermelhas. Assim, a pertinência e a não pertinência a um conjunto conduzem à idé ia de conjuntos e de seus complementos. Poderemos mesmo, perguntar o que é o complemento de um complemento. Tomemos o conjunto complementar, das contas ~~pérolas~~ não vermelhas da caixa. Qual é a parte do universo, isto é, a parte do conjunto de toda s as contas ~~pérolas~~ da caixa, que não faz parte do conjunto das contas ~~pérolas~~ não vermelhas? Não é necessário muito tempo para que as crianças digam: "São as contas ~~pérolas~~ vermelhas, claro". Assim, o complemento do complemento de um conjunto, é o próprio ~~êste mesmo~~ conjunto. As contas ~~pérolas~~ não vermelhas, são mas as contas ~~péro las~~ vermelha s, naturalmente.

~~Nós~~ Sugerimos de fazer êstes jogos ao trabalhos com ~~nível dos~~ atributos quando utilizamos os blocos lógicos e seu ma terial associado. O jôgo da negação é um dêsses jogos onde as crianças são incitadas a separar "o conjunto das coisas que eu tenho" e "o conjunto das coisas que eu não tenho". E "se um bloco está no meu conjunto não pode estar no de meu vizinho".+1 Estas considerações formam a base do jôgo da negação. Também é necessário, talvez, associar as considerações relativas aos conjuntos e a seus complementos às considerações que surgem durante o jôgo da negação, ao jôgo do objeto escondido e a todos os outros jogos baseados na ~~sôbre a~~ idéia que "êste pertence a êste lote e por consequência não pode pertencer ao resto da caixa", e assim por diante.

1.3. Simbolismo dos conjuntos

pag 10

Os professores nem sempre têm consciência do fôsso profundo que existe entre a experiência das crianças e a expressão simbólica desta experiência. De fato, quando uma criança chega a escola, ela sabe fala r, mas ela o faz inconscientemente. Ele não joga efetivamente o jôgo no qual fala; Também, quando fala o faz por intermédio de símbolos, isto é, de frases compostas de palavras que sabe utilizar com muita eficácia. A linguagem é uma forma muito complexa de simbolismo para a qual uma quantidade enorme de informações pode ser transmitida de uma pessoa à outra. Uma criança de cinco anos está inteirame

+1 E ainda, ~~de~~ "Ele não está no meu conjunto, então, êle está no do vizinho".

aprendê-la

te versado na arte de transmitir esta informação porque ela está se exercitando (s'est entraîné) a aprendizagem ~~aprendê-la.~~ Para satisfazer essas ~~as necessidades,~~ necessidade ela tem , se podemos dizer, tido dificuldade de aprender essa linguagem. O esforço é recompensado ~~tem sido pago,~~ uma vez que graças a essa linguagem, ela pode dizar a sua mãe que quer isso ou aquilo, ou que ela nã o gosta desta ou tal coisa, e assim por diante. É evidente q que isto é para ela de uma importância capital. Em matemática, nós da mos para a criança utilizar uma outra linguagem que ela não tem ne nhuma pressa de utilizar, porque as experiências que estes símbolos descrevem lhe são demasiado estranhas. Mas se fornecermos às crian ças um número suficiente de experiências criadoras e que vivendo-as elas aprendem o espécie ~~gênero~~ de conceitos que simbolisa a linguagem matemática, é certo que elas terminam por adquirir agilidade para utili zar êsse sistema de símbolos como adquiriram o manejo de sua língua materna. Mas é preciso ~~necessário~~ dar-se conta de que a aquisição de um tal sistema de símbolos não se faz em um dia. O desenvolvimento da linguagem nas crianças se desenvolve em vários anos. É também a conse - quência da formação, em seu espírito, de um certo número de conceitos e, uma vez esta formação adquirida, pela ~~da~~ associação a êsses concei tos das expressões correspondentes. Por exemplo, palavras como "antes" "depois", "entre", "em cima de", "em baixo de", "e", "se", "a menos que", só ~~não~~ se esta belecem no espírito da criança ~~senão~~ depois de númerosas experiências de situações simbolizadas por êstes têrmos. Também, não devemos esperar que um sistema completo de símbolos lógicos e matemá ticos se instalem sòlidamente de um dia para o outro. Precisamos de muita pa ciência a fim de que mesmo as crianças mais lentas tenham o casião de passar por um número suficiente de experiências variadas, que lhe s serão indispensáveis para que o ~~antes do~~ simbolismo matemático tenham ~~tomar~~ para elas tôda sua significação. Caso contrário, este simbolismo não lhes tra rá nenhuma informação profunda sôbre o que a matemática re presenta rea lmente: isso ~~não~~ será apenas ~~mais do~~ que uma coleção de fórmulas cuidadosamente aprendidas ~~estudadas~~ de cor vi sando responder corretamente nos exames e obter boas notas.

Também êsse é ~~Tal é certamente~~ o caso em matéria de conjuntos. Suponha mos que as crianças tenham trabalhado com ~~discutido~~ conjuntos durante algum tempo e que uma delas diga: "Olha êste ~~Aquele~~ está bom! E se o fizermos novamente ~~ainda~~ amanhã?" A professôra poderá dizer: "Sim, é uma boa idéia. Mas como vão nos ~~se~~ lembrar? Tra ta-se, talvez, de crianças que ainda não saibam escrever." "Se ~~nós~~ o desenhássemos?" ~~desenha rmos?"~~ dirá uma das crianças. Suponhamos que se trate de todo o mobiliário da classe: desenharão o bureau da professôra, sua cadeira, as mesa s, os bancos, o armário, as ~~prateleiras~~ estantes, etc... e eles terão a ssim, uma representação simbólica do conjunto de móveis consi derados ~~hoje~~ nesse dia. Então as crianças não esquecerão na manhã seguinte ~~amanhã~~, sua exata compo sição; elas poderão mesmo, ~~lembrar~~ olhar ~~de tarde~~ à tarde em casa, porque o terão em símbolos sôbre um pedaço de papel. Mas, atenção! ~~Não~~ Este é o próprio conjunto que ~~está~~ sôbre esta folha, é um conjunto de símbolos representando os elementos do conjunto estudado. É evidente que a imagem da mesa não é a própria mesa. Tem apenas o valor de um símbolo destinado a nos lembrar que pensamos na mesa. Do mesmo modo para os outros elementos. Até aqui, temos apenas um aglomerado de símbolos correspondentes aos diversos elementos constitutivos do conjunto. Mas nós não traçamos no papel nenhuma indicação, nenhum sinal lembrando que êsses elementos são considerados, na sua totalidade, como formando um conjunto. Existe um símbolo para isto: são as chaves {eis}. Também poderemos colocar uma chave numa extremidade do papel e uma chave na outra extremidade. Entre essas chaves nós poderemos fazer pequenos desenhos representando os diferentes elementos do conjunto. Estaremos, então, talvez, em presença de nossa primeira representação, de nosso primeiro sistema utilizável para um conjunto. As crianças ficarão ~~felizes~~ muito satisfeitas de fazerem os pequenos desenhos representando es elementos e de desenhar o símbolo de conjunto para ~~marcar o fato~~ assinalar que deravante nós consideramos certos elementos como constituindo um conjunto.

Bem entendido, não é necessário representar todos os elementos do conjunto. Se êles são muito numerosos, isto será pouco praticável. Quando os elementos de um conjunto são muito numerosos, há muitas probabilidades de que seja definido por um atributo que todos os elementos devam possuir para dele fazer parte. Por exemplo, as ~~pérolas~~ contas vermelhas da caixa. Nêste caso nós poderemos, então, usar as chaves e no interior, traçar uma linha vermelha indicando por sua côr, que pensamos nos objetos vermelhos, e poderemos mesmo, juntar a palavra "~~pérolas~~ contas" se já sabem escrever. Colocar uma palavra, é entrar já em um outro sistema de simbolização. Uma linha vermelha, a imagem de uma mesa são símbolos "falantes" imediatos, correspondendo imediatamente à idéia que a criança faz dos elementos de nosso conjunto. Se escrevemos a palavra "~~pérolas~~ chaves" nas chaves, recorremos a um simbolismo que não é tão ilustrativo quanto a linha vermelha ou os pequenos desenhos que lembram, pela côr ou ~~as~~ pelas formas, ~~d~~as ~~pérolas~~ contas ou ~~d~~os móveis. As letras que compõem a palavra ~~pérola~~ contas não lembram em nada as ~~pérolas~~ contas, e são uma forma de representação nitidamente diferente. Esta forma, as crianças aceitarão porque elas já têm uma linguagem. Trata-se apenas, de um outro modo de comunicação da linguagem, a forma escrita em oposição à forma falada. ~~A maior parte da dificuldade da transição da representação ilustrada para a representação verbal se encontra afastada pelo simples fato de que a criança já aprendeu a falar. E desde que estamos prontos a empregarcomo representação simbólica, as palavras, não há mais necessidade de traçar uma linha vermelha.~~ Tanto faz empregar a palavra "vermelho" e escrever entre

~~chaves~~ chaves {~~contas vermelhas~~} ~~ou ainda~~ se empregamos os bloc

A maior parte da dificuldade na transição da representação ilustrada à representação verbal, se encontra afastada pelo simples fato que a criança já aprendeu a falar. E, desde que nós estamos prontos a empregar como representações simbólicas, co palavras, não há mais necessidade de traçar uma linha vermelha. Tanto faz empregar a palavra "vermelho" e escrever entre chaves { ~~pérolas~~ contas vermelhas } ou ainda, si empregamos os blocos lógicos, { blocos vermelhos } ou { quadrados vermelhos } ou { triângulos azuis ~~azuis~~ delgados } ou qualquer outro atibuto que no quadro do conjunto universal dos blocos l-ógicos, permitirá definir um conjunto.

1.4. Conjuntos e atributos

As crianças não tardam em imaginar atributos cada vez mais complicados para definir ~~os~~ conjuntos. Bem entendido, sublinhamos que é indispensável definir um universo antes de definir os conjuntos em função dos atributos. É precisa ~~necessário~~ saber do que se fala antes de dizer que entre as coisas das quais se fala vamos pensar em um certo conjunto tal como o dos blocos vermelhos entre todos os blocos lógicos, ou de todas as crianças loiras entre todas as crianças da classe, ou da escola, e, assim, por diante. Êsses atributos tornam-se progressivamente mais complexos. Por exemplo, podemos pensar, não só nas crianças loiras, mas nas crianças loiras que estão de sapatos pretos e roupas vermelhas, e nas meninas que têm ao mesmo tempo cabêlos crespos, olhos azuis, a cabeleira loira e, assim por diante. Podemos assim, empilhar atributos sôbre atributos e criar novos atributos, isto é, atributos compostos a partir de atributos simples. Êste será um exercício que as crianças acharão muito divertido, e elas encontrarão um grande parzer em imaginar atributos cada vez mais complicados. Ao fim de contas, se os atributos são tão complicados, pode acontecer que não exista no universo escolhido nenhum elemento que lhe corresponda. Suponhamos, por exemplo, que tomamos o universo das crianças da classe e que queremos isolar as meninas loiras, e cacheados, olhos azuis, tendo também sapatos pretos e um "Agasalho ~~cardigan~~" verde. Pode ~~mos~~ muito bem acontecer ~~fazer~~ com que não tenha na classe nenhuma criança satisfazendo a todas essas condições. Pode ~~mos~~ mesmo acontecer ~~fazer~~ de modo que não haja necessidade de procurar atributos tão complicados para não encontrar nenhum elemento. Em todo o caso, temos um - ou vários - atributo e, de certo modo, é necessário ter um conjunto que lhe c corresponda, mesmo que não tenha nenhum elemento. Um tal conjunto é chamado <u>conjunto vazio</u>. É vazio porque êle não contém nenhum elemento. E o atributo é tal que nenehum membro do universo possui êsse ~~um tal~~ atributo e êle define, por consequência, um conjunto vazio em um determinado ~~certo~~ universo. É entretanto, possível que passando para outro universo nosso atributo defina um conjunto que não seja vazio. A noção de <u>conjunto vazio</u> é uma noção muito importante para as crianças; é necessário que elas a possuam bem, porque, logo que elas chegam ao estudo dos números, é o número de elementos do conjunto vazio que elas designarão pelo número <u>zero</u>. É por isso ~~isto~~ que as crianças confundem o <u>número zero</u> com <u>nada</u> que elas se chocam mais tarde com certas dificuldades na ~~em~~ matemática. O conjunto vazio não é o próprio zero. O conjunto vazio tem a propriedade zero. Do mesmo modo que um conjunto de duas crianças tem a propriedade dois. O conjunto de duas crianças <u>não é</u> em si mesmo a propriedade dois. Êle apenas <u>tem</u> a propriedade dois. Um conjunto vazio pode ser ~~representado~~ simbolizado por um par de chaves sem nada dentro { } . Assim, por exemplo, poderemos dizer que no universo dos blocos lógicos, os quadrados que são ao mesmo tempo redondos formam um conjunto vazio, do mesmo modo que os ~~redondos~~ que vermelhos que são ao mesmo tempo azuis, ou os espêssos que são delgados e, assim por diante.

Simbòlicamente podemos escrever :

$$\{ \text{quadrado redondo} \} = \{ \ \}$$

e, assim por diante.

1.5. Idéia de semelhança ~~e~~ e de igualdade

O que consideramos como semelhante? A questão é muito difícil. É ~~bem~~ evidente que dois objetos distintos não podem ser o mesmo objeto. Também quando dizemos que êste prato é o mesmo que aquêle, não queremos dizer que se trata do mesmo prato. O que queremos dizer é que certas propriedades dos dois pratos são as mesmas. Êles podem ter a mesma côr, a mesma forma, o mesmo pêso, o mesmo desenho, ser da mesma matéria, e, enfim, serem semelhantes de muitas maneiras diferentes. Mas, êles são, apesar disso, dois pratos diferentes. Isto pode ser uma verdade de "La Palisse", mas que é necessário compreender se quizermos chegar a destacar o sentido da palavra "mesmo", que um objeto não é, e não pode ser idêntico senão ~~a~~ êle mesmo! Paralelamente, um conjunto de objetos não pode ser o mesmo conjunto ~~que~~ a não ser que contenha os mesmos objetos, isto é, os mesmos elementos: êstes podem estar arranjados em uma ordem diferente. UM conjunto de objetos permanece em si <u>o mesmo</u> se os elementos, sem mudar intrinsecamente, são trocados de lugar ou de ordem.

Assim, um conjunto de objetos, isto é, um conjunto de elementos quaisquer dum conjunto qualquer, sòmente pode ser "o mesmo" que o conjunto constituido por êsses mesmos elementos. ~~Pode aqui, se~~ Isso pode produzir uma ligeira confusão ~~do~~ pelo fato de que quando desenhamos a representação de um conjunto, naõ vemos sempre, claramente, quais são exatamente os objetos que nós representamos efetivamente. Suponhamos, por exemplo, que desenhamos uma árvore e uma casa e, que colocamos êsses dois desenhos entre chaves, depois, nós dizemos que êste conjunto é igual a outro conjunto formado por uma árvore e uma casa, colocados entre chaves. Ora, isto pode não ser verdadeiro. Isto será verdade se a árvore da primeira imagem representa exatamente a mesma árvore da segunda imagem, se a casa da primeira imagem representa, exatamente, a mesma casa da segunda imagem (e não uma casa <u>semelhante</u>). Nêste caso será verdadeiro dizer que

$$\{ \text{árvore, casa} \} = \{ \text{árvore, casa} \}$$

ou, ainda, certamente

$$\{ \text{árvore, casa} \} = \{ \text{casa, árvore} \}$$

uma vez dito que a ordem na qual os elementos são enumerados não importa. A ausência de incidência de ordem dos elementos sôbre a identidade de um conjunto é conhecida sob o nome de conservação dos conjuntos.

Se, pelo contrário, a árvore de um dos desenhos representa uma ~~certa~~ determinada árvore ~~de um~~ e se a casa do outro desenho, representa uma outra árvore, mesm o que estejam desenhados exatamente da mesma maneira, o primeiro conjunto não é o mesmo, porque a composição do primeiro conjunto não é a mesma que esta do segundo. Pode muito bem ~~precisar~~ ser preciso muita discussão antes das crianças compreenderem claramente que quando se diz o "mesmo", não se trata das imagens dos objetos, mas dos próprios objetos. Se desenhamos uma árvore num pedaço de papel e uma outra árvore em um outro pedaço, por mais semelhantes que as façamos, eles representarão a mesma árvore, a ~~não ser~~ por um ato de vontade de nossa parte, claramente manifesto. Se, ~~de súbito~~ entretanto, nós pensamos em um dos d dois desenhos como representando uma árvore de nosso jardim e no outro como representando uma árvore do jardim público fronteiro, então, o primeiro dos dois desenhos não é mais "igual" ao segundo.

Nós podemos recorrer à idéia de igualdade dos conjuntos para indicar que ~~certos~~ alguns conjuntos são vazios. Por exemplo, poderemos escrever

{ círculos quadrados } = { }

Isto significa que o atributo "círculos quadrados", aplicado ao universo dos blocos lógicos não se aplica, de fato, a nenhum elemento. O atributo "círculos quadrados" define o conjunto vazio em nosso universo. Do ~~mesmo~~ modo, "vermelho azul", e assim por diante. Ou ainda, podemos empregar o sinal igual para ~~marcar~~ assinalar a igualdade entre a definição de um conjunto por certos atributos e a definição de um conjunto pela notação simbólica de todos os elementos dêste conjunto. Por exemplo, a propósito dos blocos lógicos, podemos dizer :

{ redondos espêssos vermelhos } = { ○ ○ }

Desta maneira, as crianças compreenderão que as definições de conjuntos sob a forma de enunciação do ~~gênero~~ espécie de coisas que êles contém podem ser equivalentes às definições de conjuntos sob a forma de enumeração exata do que êles contém. A primeira é uma definição por atributos. Nós dizemos que queremos considerar em nosso conjunto todos os elementos de nosso ~~XXXXX~~ universo que são êste e aquêle. Na segunda definição, nós dizemos: "Nós queremos considerar em nosso conjunto todos os membros de nosso conjunto". Se, em cada caso, nós conseguimos definir exatamente o mesmo conjunto de objetos, nós podemos colocar um sinal igual entre o conjunto definido pelos atributos e o conjunto definido pela enumeração dos elementos. Por exemplo, suponhamos que há três meninas loiras de olhos azuis na classe, e que elas se chamem Valéria, Rosina, Catarina. Nós podemos então dizer

{ meninas loiras de olhos azuis } = { Valéria, Rosina, Catarina }

Os professôres não terão dificuldade em imaginar exercícios para permitirem às crianças ~~deXXXXXXXX~~ praticarem essas equivalências. Eles poderão, por exemplo, fazer jogos nos quais um primeiro grupo de crianças enumere ~~certos camaradas~~ alguns companheiros enquanto que um segundo grupo deve advinhar quais são os atributos que definem exatamente êsses colegas e não outros. Ou, inversamente. ~~Certas~~ Algumas crianças propõem um atributo e, os outros devem descobrir os elementos que pertencem ao c conjunto possuindo o atributo proposto pelo primeiro grupo de crianças.

As crianças têm por vezes necessidade de meios materiais para separar os elementos ~~dXXXXXXXX~~.de um conjunto do resto dos elementos do universo. Se êste são as crianças da classe que constituem o universo, poderemos, para isolar as crianças que nós consideramos como formando um conjunto, por exemplo, os meninos da classe, tomar uma grande corda que passaremos ao redor de todos os meninos. Ou ainda, se a classe não é muito grande (~~n'est pas trop importante~~) poderemos nos servir de um arco, ou de ma rcas de giz; êsses não têm a mesma eficácia que uma coisa que se pode materialme nte passar ao redor das crianças. As crianças pequenas têm dificuldade em conceber que logo que traçamos em giz um círculo sôbre o solo e que êlas entrem dentro, êlas estão de fa to no interior da curva. Elas, provàvelme nte, pensam que estão em cima enquanto que se estão contornadas por um arco ou por uma corda, elas sentirão que verdadeiramente estão dentro. Esta "interiorização" pode constituir a ajuda material graças à qual as crianças podem ser conduzidas a descobrir a pertinência a um conjunto. Tôda pessoa que está no bucle é membro, elemento do conjunto, e tôda pessoa que não está dentro não é membro.