Kátia Chiappini

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA

DO R.G.S.

FACULDADE DE FILOSOFIA

CURSO DE PEDAGOGIA - 1º ANO - 1962

"COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA"

Professor - Dr. A. Ribeiro

91940

PÔRTO ALEGRE - Praça D. Sebastião, 2 - BRASIL

I - Introdução aos fundamentos da Matemática Moderna

a) - Teoria de Conjuntos: noções fundamentais e álgebra dos conjuntos.

b) - Teoria de Funções: noções fundamentais e sucessões e progressões.

c) - Teoria de Grupos: conceito de grupo, tipos e exemplos.

II - Pontos de Álgebra Clássica

a) - Logaritmação

b) - Análise combinatória

c) - Binômio de Newton

d) - Números complexos

e) - Divisão por x-a

f) - Equações algébricas

g) - Cálculo com somatórios

III - Noções de Álgebra das Matrizes

a) - Adição e multiplicação matriciais

b) - Determinantes

c) - Matrizes especiais e inversão

D) - Raízes características

e) - Aplicações

IV - Noções de Álgebra Vetorial

a) - Conceiro de vetor

b) - Sistemas de coordenadas cartesianas: Componentes vetoriais algébricas.

c) - Conceitos e propriedades fundamentais da adição e multiplicação vetoriais.

d) - Dependência linear.

V - Iniciação à Geometria Analítica

a) - Equações da reta e do plano

b) - Equações da circunferência e da superfície esférica

c) - Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola

d) - Assíntota de uma curva plana

e) - Aplicações

VI - Limites

a) - Conceito intuitivo de limite de variável e de função

b) - Operações sôbre limites

c) - Convergência e divergência de sucessões e de séries

VII - Cálculo das Derivadas

a) - Conceito de Derivada

b) - Regras e fórmulas para derivar

c) - Derivação sucessiva e parcial

d) - Derivadas em Física, Química, Estatística e em outras ciências

e) - Máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis

f) - Máximos e mínimos condicionados

VIII - Introdução ao Cálculo Integral

a) - Conceito de Diferencial de uma função

b) - Conceito de Primitiva

c) - Integrais imediatas

d) - Integrais definidas

e) - Aplicações elementares

IX - Equações diferenciais ordinárias

a) - Conceito e tipos

b) - Resolução de equações simples

c) - Aplicações

X - Interpolação

a) - Fórmula de interpolação de Newton

b) - Noções sôbre diferenças finitas

c) - Noções sôbre as equações nas diferenças finitas

Capítulo I

INTRODUÇÃO AOS FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA MODERNA

1 - Teoria de Conjuntos
 a) - Noçoes fundamentais
 b) - Álgebra dos Conjuntos

2 - Teoria de Funções
 a) - Noções fundamentais
 b) - Sucessões e progressões

3 - Teoria de Grupos
 a) - Conceito de grupo
 b) - Tipos e exemplos

1 - TEORIA DE CONJUNTOS

a) - NOÇÕES FUNDAMENTAIS

Se imaginarmos o edifício matemático sob a forma de um prisma Triangular ~~tangular~~, então diremos, figurativamente, que os lados de sua base inferior são respectivamente a Teoria de Conjuntos, a Teoria de Funções e a Teoria de Grupos.. (Figura 1)

Assim, verificamos que serão apresentadas, para serem por nós estudadas, as teorias fundamentais da Matemática Moderna.

Começaremos pela Teoria dos Conjuntos , cujo criador foi o matemático Jorge Cantor. Êste nasceu em 1845, na Rússia, e teve a sua formação metemática realizada na Alemanha.

A bibliografia que sugerimos, relativamente à parte histórica, é a seguinte:

"Breve história de la Matemática" - de Francisco Vera
Editorial Losada S.A. - Buenos Ayres.

"História de las Matemáticas" - de Eric Temple Bell
editada por Fondo de Cultura Económica - México.

"Los Grandes Matemáticos" - de Eric Temple Bell
Editorial Losada S.A. - Nuenos Ayres.

Quanto à parte científica, apresentamos os seguintes trabalhos:

"A Álgebra Moderna" - de M. Queysanne e A. Delachet
Coleção Saber Atual , volume 36 - São Paulo

"Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos" - de E.H. Spanier
publicada pela Sociedade Paranaense de Matemática.

"Conjuntos e Funções" - de Leopldo Nachlein ?
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - Rio de Janeiro.

"Thèorie des Ensembles" - de N. Bourbaki - França.

"Introduction to the Theory of Sets" - de Joseph Brower
Editora Prentice-Hall - Nova Jersey - USA

(não)

Breuer

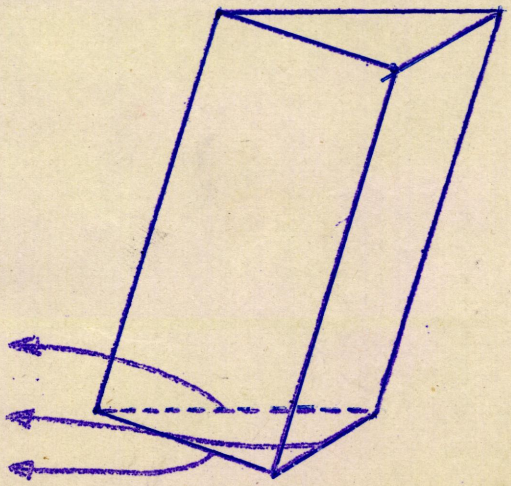
Feita a introdução e indicada a bibliografia, vamos prosseguir, apresentando as noções fundamentais.

Figura 1

Teoria de Conjuntos

Teoria de Funções

Teoria de Grupos



<u>CONCEITOS PRIMITIVOS</u> de uma ciência são todos aquêles que não podem ser definidos à base de outros conceitos da mesma ciência.

Em Matemática, conceitos primitivos são aquêles que não podem ser definidos à base de outros conceitos matemáticos.

Exemplos: ponto, reta, plano, <u>conjunto</u>, etc.

<u>Contra-exemplos:</u> ângulo, diferença entre dois números, etc.

a)-"Ângulo é a figura constituída por duas semi-retas de origem comum." Não é conceito primitivo porque apela para o conceito de reta e de ponto.

Sabemos que

b)- "Diferença entre dois números a e b, propostos numa certa ordem, é um terceiro número, que, somado ao segundo, dá por resultado o primeiro." - Também não é conceito primitivo, pois apela para o conceito de soma.

<u>Conjunto é um conceito primitivo</u> - segundo Leopoldo Nachbin, matemática brasileiro da atualidade, - "uma das noções <u>primitivas</u> da Matemática é a de <u>conjunto</u>. Com isso queremos dizer que nos limitamos a atribuir ao têrmo <u>conjunto</u> o seu sentido usual de coleção de objetos ou elementos; e não pretendemos defini-lo a partir de outros conceitos matemáticos. Por conveniência, faremos uso também do têrmo "coleção", como sinônimo de <u>conjunto</u> a fim de evitar a repetição deselegante dêste último, no mesmo enunciado."

São sinônimos de <u>conjunto</u>, por fôrça de tradição entre os matemáticos, as expressões: coleção, agrupamento, agregado e classe.

Bento de Jesus Caraça (Portugal) em sua obra "Conceitos Fundamentais da Matemática", página 12, ítem 12, diz:

"Num certo momento, olhamos para uma sala, por exemplo, uma sala de espetáculos, onde está um agrupamento de pessoas. É claro que essas pessoas são, uma a uma, entidades determinadas e gozam em comum da propriedade de, no momento de que falamos, estarem nessa sala; qualquer pessoa que nesse momento passe na rua, não goza dessa propriedade.

Portanto, se falarmos no <u>conjunto de pessoas que estão dentro da sala</u>, referimo-nos a qualquer coisa ~~dd~~ bem determinada, tal que, dada uma pessoa qualquer, poderemos averiguar com rigor, se ela pertence ou não ao conjunto de que se falou."

Êste autor caracteriza o <u>conjunto</u> por um <u>critério de pertinência</u>. Determina, com rigor, se uma pessoa está ou não na sala, isto é, se pertence ou não ao conjunto.

Para BORBAKI, citado na obra "Álgebra Moderna" de M. Queysanne e A. DELACHET, - "Um conjunto é formado de elementos suscetíveis de possuirem certas propriedades e terem entre si, ou com elemntos de outros conjuntos, certas relações."

Sente-se na citação acima a ênfase dada à relação entre os elementos de um conjunto com os de outro conjunto. Isso permite compreender o sentido moderno de contagem que examinaremos na Teoria de Funções.

Voltando a citar Nachbin:

" A Teoria Geral dos Conjuntos não cogita da natureza dos elementos que constituem cada um dos conjuntos, e sim, das relações possíveis entre êsses elementos e conjuntos."

São, pois, objetivos da Teoria de Conjuntos investigar:

a) - As relações possíveis entre os elementos de um conjunto.

b) - As relações entre conjuntos.

São êsses os dois objetivos máximos de um estudante desta teoria e não o conhecimento da natureza dos elementos do conjunto.

CARACTERIZAÇÃO DE UM CONJUNTO

Há dois critérios para a caracterização de um conjunto:

a) - Pela apresentação individual ou nominativa dos seus elementos.

Exemplo: Apresentação nominal dos elementos de uma família.

b)- Por um critério de pertinência.

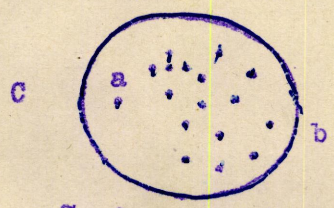
Através de uma proposição por meio da qual sabemos se um elemento pertence ou não ao conjunto dado.

Exemplo: O conjunto dos números primos. (Todos aquêles que admitem por divisores sòmente a unidade ou êles mesmos.)

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

Matematizando o que já foi apresentado, podemos propor, agora, os primeiros simbolismos.

Seja C um conjunto qualquer e a um elemento de C.



A relação $\boxed{a \in C}$ que pode ser lida como: a é elemento de C, ou a pertence a C. Esta relação é chamada "relação de pertinência."

Se b não pertence a C, isto é, b não é elemnto de C, o simbolismo utilizado será $\boxed{b \notin C}$

Êsse simbolismo foi criado por Peano, matemático italiano contemporâneo, falecido em 1932.

EXEMPLIFICAÇÃO

Serão apresentados exemplos dos aspetos seguintes, destinados a fornecer o material para posterior realização de operações:

Explo
Conj

- Teòria de Números
- Teoria de Polinômios
- Geometria Elemantar
- Álgebra das Classes de Congruência.

TEORIA DE NÚMEROS

Os diferentes conjuntos numéricos

O problema da contagem gerou, sob o ponto de vista histórico, o conjunto de números naturais. É por meio dêstes números que se responde à pergunta: "Quantos são?"

O conjunto de números naturais é apresentado pelo seguinte simbolismo: $N = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ n, \ldots\ldots\ldots)$

Necessidade operacional de ampliação dêsse campo

A análise das ampliações feitas no conjunto de números naturais mostra que elas são determinadas pelas operações com êsses números. Essas operações são sete:

3 diretas		4 inversas
adição	→	subtração
multiplicação	→	divisão
potenciação	→	radiciação
	→	logaritmação

A potenciação tem duas operações inversas conforme se observa a seguir.

Sejam os números 2, 5 e 32. Verifica-se serem três operações distintas entre dois quaisquer dêles para se ter o terceiro. Assim, dados 2 e 5, deve-se realizar uma potenciação entre êles para gerar o 32.

De outra forma, conhecidos 32 e 5, a operação entre êles para se obter 2, é a radiciação.

Finalmente, a operação entre 32 e 2, para se conseguir o expoente 5, é a logaritmação.

Simbòlicamente: $2^5 = 32$, no primeiro caso.

$\sqrt[5]{32} = 2$, no segundo caso.

$\log_2 32 = 5$, no último caso.

A análise de operação por operação demonstra que, enquanto as diretas são pacíficas, as inversas são mais exigentes.

A ADIÇÃO não oferece problemas pois, dados dois números naturais, sempre se consegue determinar um terceiro, chamado soma.

Na SUBTRAÇÃO há uma problemática.

Exemplificando:

1) = 15 - 12 = 3, possível no campo dos números naturais, porque existe o número 3, com a propriedade de, somado a 12, reproduz15.

2) = 15 - 15 = ? Impossível no campo dos números naturais.

Surge, então, o primeiro número artificial, o zero, que vem solucionar essa impossibilidade no campo dos naturais, e escreve-se:

$$15 - 15 = 0$$

Lembre-se que as propriedades definitórias de zero são:

$$a + 0 = a$$
$$a \times 0 = 0$$
$$a^0 = 1$$

A criação do zero amplia o campo dos números naturais e surge o segundo campo, ou conjunto dos inteiros absolutos: naturais e zero.

$$I_a = (0, 1, 2, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots)$$

Subtração é uma operação perturbadora:

7 - 12 = ? Impossível nos dois campos já existentes. Faz-se necessário criar um terceiro campo de números: conjunto dos números inteiros relativos, compreendendo positivos e negativos.

$$I_r = (0 \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\ldots \pm n, \ldots\ldots)$$

Nesses três campos a subtração se realiza plenamente.

Nesses três campos

A Multiplicação , como a Adição, não oferece dificuldades. Pode-se multiplicar quaisquer pares de números naturais, pares de números inteiros absolutos e pares de números inteiros relativos.

a Divisão só é possível no conjunto de números inteiros absolutos quando o dividendo fôrmúltiplo do divisor. Porém, a sua generalização é responsável pela criação do querto campo de números, ou conjunto dos números fracionários: absolutos e relativos.

$$F = (\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \ldots\ldots \frac{p}{q} \ldots\ldots)$$

ESTUDO DAS"RELAÇÕES ENTRE" os conjuntos de números inteiros e e de números fracionários:

Tanto os números inteiros como os fracionários admitem a forma de razão. Surge, então, um quinto conjunto, o conjunto dos números racionais, abrangendo o conjunto dos inteiros e o dos fracionários, isto é, números que podem ser postos sob a forma de razão entre dois números inteiros quaisquer, dados em certa ordem e sendo o segundo diferente de zero.

Exemplificando:

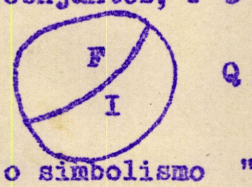
5 é racional porque pode ser posto sob a forma de razão:

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3}, \text{ etc.}$$

3,5 também é racional:

$$3{,}5 = \frac{35}{10} = \frac{350}{100}, \text{ etc.}$$

Anota-se por "Q" o conjunto dos números racionais, o qual é um conjunto de dois conjuntos, F e I, ambos conjuntos com infinitos elementos.



Justifica-se o simbolismo "Q", pois em Matemática "Razão" é sinônimo de quociente.

Voltando à operações:

Potenciação com expoente inteiro e positivo é sempre possível.

Exemplo: 3^{85} é possível.

Radiciação - exige a criação de um novo campo numérico: o dos irracionais

Exemplo: $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$

O estudo dêstes problemas exige a criação do campo numérico dos números irracionais.

Anota-se por NQ (não aceitam a forma de razão) êste campo.

$\sqrt{-4}$, e outros similares, justificam o aparecimento do campo dos números complexos, porque não há, no conjunto dos campos anteriores, número que multiplicado por si mesmo dê -4.

O campo de números complexos, conforme tese demonstrada pelo matemático alemão KUMMER, é a máxima acepção numérica. Logo, a logaritmação será plenamente realizável dentro do mesmo.

~~Sintetizando:~~ O conj. dos racionais e o dos não racionais

~~Q~~ - conjunto dos racionais

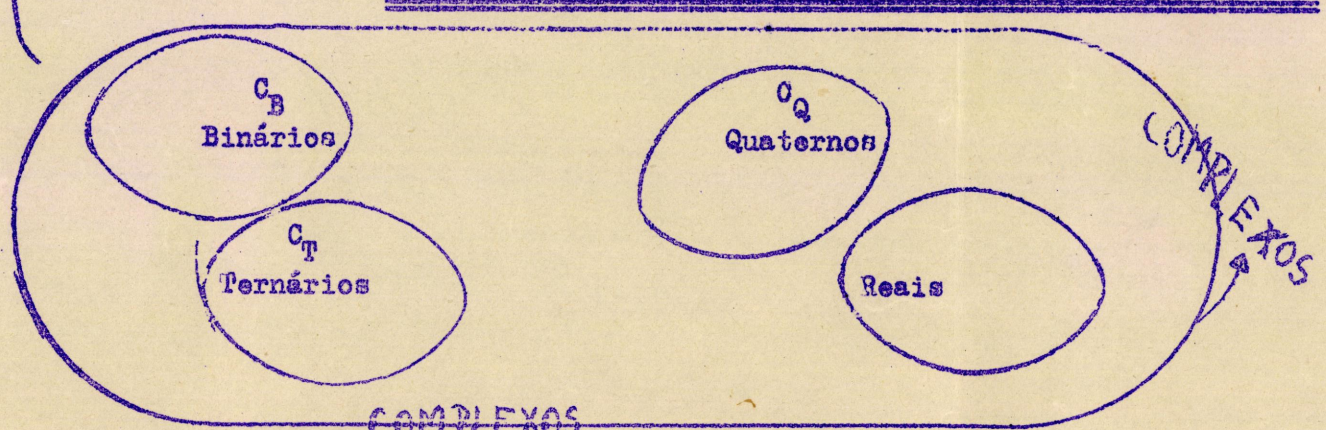
~~NQ~~ - conjunto dos não racionais.

~~Estes~~ formam o conjunto dos reais, que são casos particulares dos números complexos.

ESQUEMA GERAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

- Pròpriamente ditos
  - Binários - pares ordenados de números reais
  - Ternários - ternos ordenados de números reais
  - Quaternários - conjuntos de quatro números reais dados numa certa ordem.
- Reais
  - Racionais
    - Inteiros
      - Absolutos
        - Naturais
        - Zero
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos
    - Fracionários
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos
        - Negativos
  - Irracionais
    - Algébricos $\sqrt{3}\ \sqrt{2}\ \sqrt{5}$
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos.
        - Negativos.
    - Transcendentes $+\pi\ -\pi = 3,1416$
      - Absolutos
      - Relativos
        - Positivos.
        - Negativos.

VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DOS CAMPOS DE NÚMEROS



Conhecemos, pois, os diferentes conjuntos numéricos que anotaremos por: N, I, F, Q, NQ, R e C, os quais são denominados respectivamente por: conjunto dos números Naturais, (N)
" " Inteiros, (I) (Ia e Ir.)
" " Fracionários, (F)
" " Racionais, (Q)
" " Irracionais, (NQ)
" " Reais, (R)
" " Complexos (C)

Se apelarmos para a relação de pertinência, então poderemos escrever: $5 \in N$, $-3 \in I$, $\frac{3}{7} \in F$, $\sqrt{2} \in NQ$ e $3+5 \in C$.

2 -) A Teoria dos Polinômios apresenta-nos inúmeros exemplos de conjuntos.

O primeiro é o conjunto de todos os polinômios racionais e inteiros da forma $ax+b$ ou a_0x+a_1 onde x é uma variável e os demais elementos a, b ou a_0, a_1, são coeficientes.

O segundo é o conjunto de todos os polinômios da forma ax^2+bx+c ou $a_0x^2+a_1x+a_2$ nos quais x é uma variável e a, b, c ou a_0, a_1, a_2 são coeficientes.

O terceiro é o conjunto de todos os polinômios da forma ax^3+bx^2+cx+d ou $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ com as mesmas significações para os símbolos

- -

- -

- -

O enésimo é o conjunto dos polinômios da forma
$a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \cdots + a_{n-1}x+a_n$.

E assim por diante.

Consideremos, finalmente, o conjunto dêstes conjuntos de polinômios. Julgamos interessante salientar que êste último conjunto tem para elementos n conjuntos.

A GEOMETRIA ELEMENTAR também nos oferece exemplos de conjuntos. A <u>reta</u>, concebida como conjunto de pontos, é um primeiro exemplo.

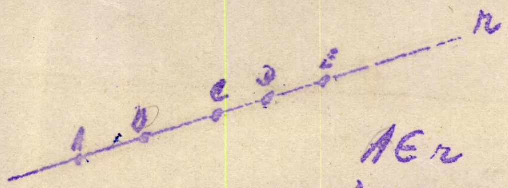


figura 2

$1 \in r$
$2 \in r$

O plano, como conjunto de pontos, é um segundo exemplo. É fácil verificarmos que êste último pode também ser encarado como uma coleção, cujos elementos são igualmente conjuntos, isto é, conjunto de retas.

4 - A ÁLGEBRA DAS CLASSES DE CONGRUÊNCIA proporciona mais exemplos. Por definição, Classes de Congruência módulo "n" (n natural) são conjuntos cujos elementos são números inteiros, que, divididos por n deixam o mesmo resto.

A módulo n existem "n" classes que anotaremos por:

$$C_0 \quad C_1 \quad C_2 \ldots\ldots C_{n-1}$$

Com módulo 2, temos: $C_0 = (0, 2, 4, 6, \ldots\ldots 2a, \ldots)$ e a classe:

$$C_1 = (1, 3, 5, 7, \ldots\ldots 2a+1, \ldots)$$

Com módulo 3, temos: $C_0 = (0, 3, 6, 9, \ldots\ldots 3a, \ldots)$

$$C_1 = (1, 4, 7, 10, \ldots\ldots 3a+1, \ldots)$$

$$C_2 = (2, 5, 8, 11, \ldots\ldots 3a+2, \ldots)$$

É interessante mostrarmos as operações entre duas classes de mesmo módulo, chamadas de adição e multiplicação, as quais são geradoras das classes soma e produto que a seguir definiremos. Ao conjunto destas operações e de suas propriedades, damos o nome de Álgebra das Classes de Congruência.

Sejam C_a e C_b duas classes de congruência a módulo n, e α um elemento de C_a e β um elemento de C_b.

A classe que contiver $\alpha+\beta$ é a classe soma e a que contiver $\alpha \times \beta$ é a classe produto. (definição importante)

Em símbolos: $\alpha + \beta \in C_s = C_a + C_b$

$$\alpha \times \beta \in C_p = C_a \times C_b$$

Como já são conhecidas as classes de congruências vamos formar tabuadas de somar e de multiplicar.

O dispositico utilizado é o seguinte:

MÓDULO 2

+	C_0	C_1
C_0	C_0	C_1
C_1	C_1	C_0

Tabuada de somar

×	C_0	C_1
C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1

Tabuada de multiplicar

C_0 $(0, 5, 10, \ldots n)$
C_1 $(1, 6, 11 \ldots 2n+1)$
C_2 $(2, 7, 12 \ldots \ldots)$
C_3 $(3, 8, 13 \ldots)$
C_4 $(4, 9, 14 \ldots)$

Módulo 5:

Tabuada de somar

+	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_0	C_1	C_2	C_3

Tabuada de multiplicar

X	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_0	C_0	C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	C_0	C_2	C_4	C_1	C_3
C_3	C_0	C_3	C_1	C_4	C_2
C_4	C_0	C_4	C_3	C_2	C_1

Já conhecemos a formação das tabuadas de adicionar e multiplicar classes de congruência, de módulo 2 e de módulo 5.

Antes de formar outras tabuadas vamos conceituar elmento neutro em um conjunto dado e relativamente a uma operação conhecida.

Sejam $C = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots)$ um conjunto, e " $\circ$ " uma operação binária entre os seus elementos. Se existir em C um elemento a_n tal que $a_n \circ a_p = a_p$, então a_n é chamado de elemento neutro.

Se $\circ$ fôr a adição em qualquer sentido, então o elemento neutro recebe a denominação de zero ou elemento nulo. Por outro lado, se fôr uma multiplicação, então a_n é chamado de elemento unidade.

Na Teoria de Números os elementos neutros para adição e multiplicação clássicas são, respectivamente, o zero e o um.

Nas tabuadas que já realizamos com as classes de congruência, a módulo 2, o zero é a classe C_0 e o elemento unidade é C_1 .

Observamos que $C_0 + C_a = C_a$ e $C_0 + C_a = C_0$, isto é, as propriedades definitórias do zero nos campos numéricos estão se conservando.

Formemos, agora, as clásses de congruência módulo 3 e as respectivas tabuadas.

As classes são: $C_0 = (0, 3, 6, 9, \ldots, m3, \ldots)$
$C_1 = (1, 4, 7, 10, \ldots, m3+1, \ldots)$
$C_2 = (2, 5, 8, 11, \ldots m3+2, \ldots)$

e as tabuadas correspondentes:

+	C_0	C_1	C_2
C_0	C_0	C_1	C_2
C_1	C_1	C_2	C_0
C_2	C_2	C_0	C_1

X	C_0	C_1	C_2
C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2
C_2	C_0	C_2	C_1

O zero e o elemento unidade são respectivamente C_0 e C_1.

Com módulo 6 - as classes de congruência são:

$$C_0 = (0, 6, 12, 18, \ldots, m.6, \ldots)$$
$$C_1 = (1, 7, 13, 19, \ldots, m.6+1, \ldots)$$
$$C_2 = (2, 8, 14, 20, \ldots, m.6+2, \ldots)$$
$$C_3 = (3, 9, 15, 21, \ldots, m.6+3, \ldots)$$
$$C_4 = (4, 10, 16, 22, \ldots, m.6+4, \ldots)$$
$$C_5 = (5, 11, 17, 23, \ldots, m.6+5, \ldots)$$

As tabuadas são apresentadas como segue:

$+$	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_0	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0
C_2	C_2	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1
C_3	C_3	C_4	C_5	C_0	C_1	C_2
C_4	C_4	C_5	C_0	C_1	C_2	C_3
C_5	C_5	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4

$\times$	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_0	C_0	C_0	C_0	C_0	C_0	C_0
C_1	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
C_2	C_0	C_2	C_4	C_0	C_2	C_4
C_3	C_0	C_3	C_0	C_3	C_0	C_3
C_4	C_0	C_4	C_2	C_0	C_4	C_2
C_5	C_0	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1

A classe neutra, dita zero ou elemento nulo, é C_0 e a classe unidade é C_1.

Observando a última tabuada de multiplicar salientamos um fato deveras notável, isto é: $C_3 \times C_2 = C_0$

O produto é nulo, embora os dois fatores sejam diferentes de zero.

Acreditamos que através de exemplos de diferentes disciplinas matemáticas o leitor já esteja familiarizado com o conceito primitivo e fundamental da Teoria.

Na Álgebra das Classes de Congruência aprendemos a operar aditiva e multiplicativamente com as classes que são notòriamente conjuntos.

Prosseguiremos na apresentação da Teoria de Conjuntos:

CONJUNTO VAZIO -

é um conjunto caracterizado por um critério de pertinência, tal que nenhum elemento o satisfaça.

É anotado por $\emptyset$

Exemplo 1 - O conjunto das capitais brasileiras, cuja letra inicial de seu nome é X.

Exemplo 2 - O conjunto C de elementos x que pertençam a I e que satisfaçam a equação $2x-1=0$

Com efeito, a equação $2x-1=0$ admite só e sòmente uma solução fracionária $(2x=1;\ x=\frac{1}{2})$ e como $x \in I$ então, C é vazio.

Usamos na Teoria dos Conjuntos o seguinte simbolismo para êste exemplo

$C = (x;\ x \in I;\ 2x-1=0)$ para leitura dêste simbolismo utilizamos a seguinte linguagem:

Conjunto C, de elementos x, pertencentes ao conjunto I e satisfazendo a equação $2x-1=0$

O papel do conjunto vazio na Teoria dos Conjuntos é semelhante ao do número zero na Teoria de Números.

<u>SUB-CONJUNTOS</u> DIZEMOS QUE UM CONJUNTO X é uma parte do conjunto Y ou ainda: que X está contido em Y ; ou ainda: que X é subconjunto de Y, se todos os elementos de X pertencerem também a Y (figura 3)

Usamos o simbolismo: $X \subset Y$, chamado <u>RELAÇÃO DE INCLUSÃO,</u> cuja leitura é realizada como segue: - " X está contido em Y ."

A relação $A \not\subset B$ (A não contido em B) indica que ~~nenhum~~ nem todos elemento de A estão em B .

Consideraremos imediatas as duas propriedades da inclusão que apresentamos a seguir

1 - Se $X \subset Y$ e $Y \subset Z$, então $X \subset Z$, (figura 4).

2 - Se $X \subset Y$ e $Y \subset X$, então $X = Y$, isto é, os conjuntos X e Y têm em comum todos os seus elementos. Dois conjuntos, nestas condições, são ditos iguais.

Os conjuntos numéricos N, I, F, Q, NQ, R e C permitem escrever as seguintes relações:

1º - $N \subset I$ $Q \subset R$ $R \subset C$

2º - Se $N \subset I$ e $I \subset Q$ então, $N \subset Q$

3º - $N \subset I \subset Q \subset R \subset C$

Observamos que $\emptyset$ (vazio) está contido em qualquer conjunto e escrevemos a relação de inclusão $\emptyset \subset C$.

fig. 3

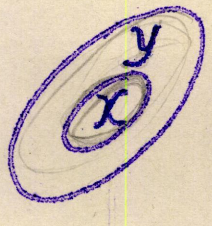
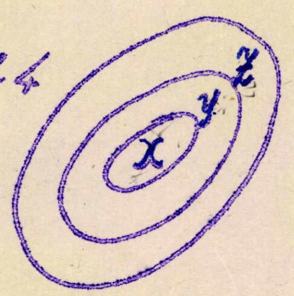


fig. 4



N C I Q C R C Complexos

 Katia

1 - TEORIA DE CONJUNTOS:

b) - ÁLGEBRA DOS CONJUNTOS

As operações entre conjuntos, chamadas de <u>intersecção</u>, <u>reunião</u> e <u>complementação</u> e as <u>respectivas propriedades</u>, constituem a <u>Álgebra dos Conjuntos</u>. Estas operações possuem analogias formais com o Cálculo das Proposições, um dos três principais capítulos da Lógica Matemática e estudados pelo matemático inglês do século XIX, Jorge Boole. Aos interessados sugerimos a leitura do capítulo II de "<u>Introducción a la Epistemologia y Fundamentación de la Matemática</u>", por Fausto Toranjos - Editora Espasa-Calpe - Argentina, S.A.

Acreditamos existir na Álgebra dos Conjuntos imperfeições de vocabúlário. As palavras: <u>intersecção e reunião</u> - denominam conjuntos e não operações. Lembramos que na Teoria dos Polinômios, os vocábulos: <u>adição e multiplicação</u>, denominam operações que geram respectivamente os polinômios soma e produto.

Intersecção de Conjuntos

Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto S, isto é, $A \subset S$ e $B \subset S$. Chamamos de elemento comum aos conjuntos A e B a um elemento x que pertença a ambos.

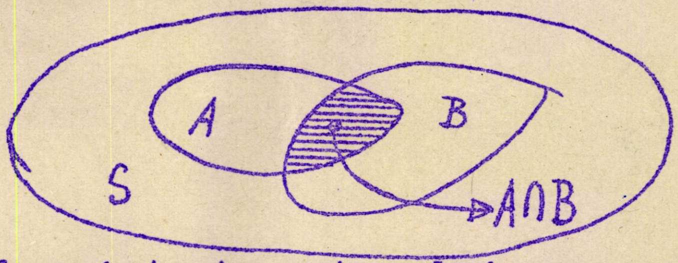
Na Geometria Elementar, temos um exemplo: duas retas concorrentes e pensadas como conjunto de pontos, têm o ponto P como elemento comum. Figura 5.

fig. 5

Definimos intersecção dos conjuntos A e B, antes citados, pelo conjunto de seus elementos comuns e empregamos o simbolismo $A \cap B$ para indicá-la.

Uma visualização geométrica podemos apresentar através do diagrama ou esquema de Venn; fig.6

fig. 6



Intersecção de conjuntos tem certa analogia com o conceito de produto de números e como tal certos autores chamam também de produto e usam a notação AB. $A \cap B = AB$.

Queremos dar ênfase à notação usada por E. H. Spanier, professor da Universidade de Chicado, em seu livro "Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos", já citado na bibliografia.

$A \cap B = (x \in S \mid x \in A$ e $x \in B)$ Esta é a notação. Para leitura da mesma empregamos o seguinte vocabulário:

A intersecção B é o conjunto de elementos x pertencentes a S e com a propriedade de também pertencerem aos conjuntos A e B.

Se não houver elementos em $A\cap B$, então diremos que $A\cap B$ é vazio e aos subconjuntos A e B damos o nome de <u>disjuntos</u>.

Citamos exemplos:

Se α e β forem dois planos paralelos, então $\alpha\cap\beta=\Phi$.

Também é vazio $Q\cap NQ$.

Semelhantemente, é vazia a intersecção dos conjuntos dos inteiros pares I_p com o dos inteiros ímpares I_i ou simbòlicamente, $I_p\cap I_i=\Phi$.

Observemos que a intersecção de dois conjuntos pode ser um dêles. Ê o caso de $Q\cap I=I$, fig. 7.

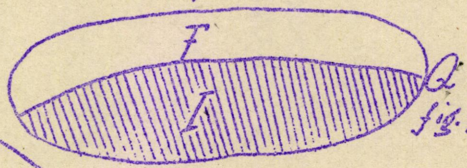


fig. 7

Queremos salientar que quase sempre a intersecção de duas superfícies é uma curva. Por fôrça da figura 8, $\sigma_1\cap\sigma_2=c$

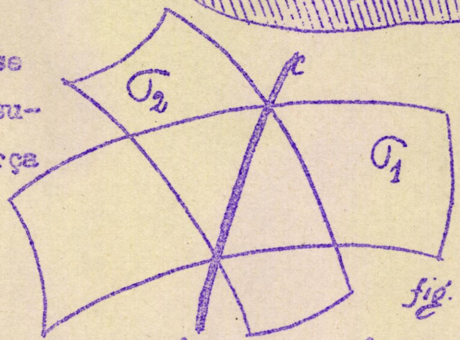


fig. 8

Realizaremos a seguir, um exercício, isto é, procuraremos a intersecção de A com B, sendo êstes conjuntos assim caracterizados:

$$A=(a\in R \mid 0<a<2) \text{ e } B=(b\in R \mid 1\le b\le 3)$$

Ora, se os elementos de A estão no subconjunto ~~aberto~~ de extremos 0 e 2, e os de B no subconjunto aberto de extremos 1 e 3, então os elementos de $A\cap B$ estão na classe de extremos 1 e 2, feita a exclusão dêstes. Logo,

$$A\cap B=(x\in R \mid 1\le x\le 2).$$

Estenderemos o conceito de intersecção para um número qualquer, porém finito de conjuntos,

Se A_1, A_2 e A_3 forem três subconjuntos de um conjunto S, então nós dizemos que $A_1\cap A_2\cap A_3$ é o cônjunto de todos os elemntos comuns aos três. O diagrama de Venn visualiza êste conceito na figura 9.

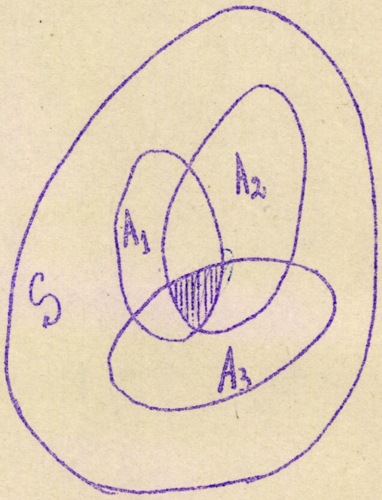


fig. 9

Se tivermos n subconjuntos de S então nós escreveremos

$$A_1\cap A_2\cap \ldots\ldots \cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

O símbolo $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ é lido da seguinte maneira: Intersecção dos conjuntos A_i quando i varia de 1 até n.

PROPRIEDADES DA INTERSEÇÃO

É notòriamente comutativa, isto é $A \cap B = B \cap A$ pois $A \cap B$ e $B \cap A$ indicam respectivamente o conjunto dos elementos comuns a A e B e a B e A e como tal afirmamos $A \cap B = B \cap A$.

Dizemos também que a interseção goza da propriedade associativa, isto é, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ onde A, B e C são três subconjuntos de um conjunto dado. Por meio da definição de interseção verificamos a veracidade desta ~~afirmação~~ relçaõ.

Deixamos para o leitor a iniciativa de verificar a associatividade da interseção para os conjuntos numéricos Q, R e C.

REUNIÃO DE CONJUNTOS

No livro "Álgebra Moderna", volume 36, da coleção "Saber Atual", página 50, encontramos a seguinte definição:

"Reunião de dois conjuntos A e B, onde A e B estão contidos em um conjunto S, é o conjunto constituído pelos elementos comuns e não comuns a A e B."

Afirmamos a existência de certa analogia dêste conceito com o de soma de números e por fôrça dêste fato encontramos autores que denominam a reunião de conjuntos por soma. Também é usual a denominação união.

O simbolismo tradicional é $A \cup B$ e, às vezes, $A + B$.

Para exemplificar vamos considerar os subconjuntos I e F de R. É imediato que $I \cup F = I + F = Q$

O diagrama, ou esquema de Venn é o da figura 10.

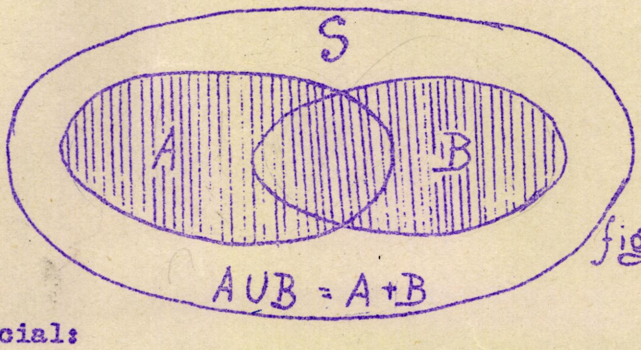


fig. 10

Também queremos registrar as seguintes formas para definir reunião, as quais, em nosso entender, equivalem à definição inicial:

- Leopoldo NachBin, ilustre matemático brasileiro, diz: "Reunião de dois conjuntos A e B, representado por $A \cup B$, é a coleção dos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B."
- O professor Êlon Lages de Lima, em seu livro "Topologia dos Espaços Métricos", afirma:

"Reunião de A e B, partes de um mesmo conjunto M, é o conjunto, anotado por $A \cup B$, formado pelos elementos de A mais os de B."

– Na página 7 do livro "Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos", de E.H. Spanier, encontramos a definição simbólica de reunião de conjuntos, assim como segue:

Se A e B forem partes de S, então definimos a reunião de A e B por

$$A \cup B = (x \in S \mid x \in A \text{ ou } x \in B)$$

Êste simbolismo difere apenas pela conjunção alternativa ou daquêle já conhecido, isto é, $A \cap B = (x \in S \mid x \in A \text{ e } x \in B)$

Vejamos mais um exemplo:

Seja A o conjunto de todas as letras do alfabeto; e V e C os subconjuntos das vogais e das consoantes. Isto pôsto, escrevemos:

$$V \cap C = \Phi \quad \text{e} \quad V \cup C = A$$

Observamos que a adição de classes de congruência difere de reunião das mesmas classes!

Com efeito, a módulo 2, e por fôrça da tabuada 15 de somar classes, temos:

$C_0 + C_1 = C_1$ e $C_0 \cup C_1 = I_a$

e a módulo 5 encontramos $C_3 + C_2 = C_0$

porém $C_3 \cup C_2$ difere de todas as classes.

Para maior esclarecimento afirmamos que se A e B forem subconjuntos de uma coleção S, então $A \cup B$ conterá os elementos de A e os de B, exeção feita para os comuns, – caso existam, – que pertencerão ao conjunto-união sòmente uma vez.

Acreditamos que o exemplo abaixo evidenciará o nosso pensamento:

Se $C_1 = (a, b, c, d)$ e $C_2 = (a, c, e, f)$ então

$$C_1 \cap C_2 = (a, c) \text{ e } C_1 \cup C_2 = (a, b, c, d, e, f).$$

Vamos realizar a extensão de dois conjuntos para o caso de um número finito e qualquer de conjuntos.

Se A_1, A_2 e A_3 forem três subconjuntos de B, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ é o conjunto dos elementos comuns e não comuns aos três subconjuntos dados, figura 11.

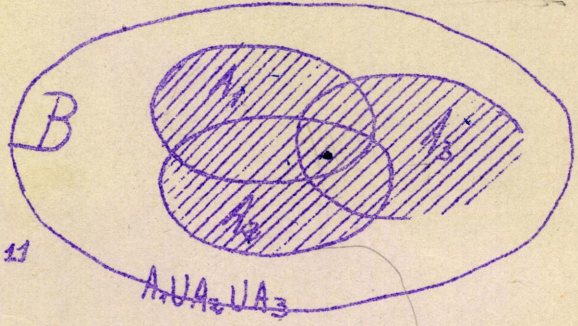


fig 11

Se "n" fôr um número natural e finito, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$ é definida da mesma maneira e escrevemos ainda $A_1 \cup A_2 \cup_3 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Para ler a notação abreviada $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ usamos da seguinte linguagem: União ou reunião dos conjuntos A_i quando i varia dêsde 1 até n.