INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Dienes, Z.P. e Golding, E.W.

"Les premiers pas en mathématique"

LOGIQUE ET JEUX LOGIQUES

Primeira Parte

A Lógica

Trad. A.B.Krebs

9. LES JEUX DE "OU...OU" (pag. 32)

9.1. Primeira versão

Podemos jogar pedindo às crianças para fazerem um conjunto n no qual cada peça é, ou uma determinada coisa ou outra, por exemplo, pod demos fazer as crianças colocarem em um lenço tôda a peça que é <u>ou</u> um quadrado <u>ou</u> que é amarela. Se ela é quadrada ela pode ir para o lenço, se ela é amarela, também. Isto significa que se é um quadrado amarelo, ela pode naturalmente ir para o lenço. Quando cada peça que deve ir para o l lenço foi colocada nêle, é claro que qualquer que seja a peça retirada d do lenço ela será ou um quadrado ou amarela. Assim , o conteúdo do lenço representará um conjunto tal que cada um de seus elementos terá o atribu to <u>ou amarelo ou quadrado</u>.

Uma peça que é um quadrado é, naturalmente, ou quadrado ou a marela. Isto parece a princípio um pouco complicado para as crianças comp preenderem ma s, as peças podem ser retiradas do lenço e escondidas e po demos perguntar: "Ela é um quadrado ou amarela?" Elas voluntàriamente, con cordam. Assim, elas podem olhar a peça e ver se ela é quadrado, ou amarela, ou os dois ao mesmo tempo. Então, insistiremos: "É verdade que a peça que eu tirei é ~~um~~ quadrado ou amarelo?" Elas dirão, sem se fazer rogar, como ela é, de fato, quando elas têm diante dos olhos a peça, verifi cam que ela possui um ou outro atributo, ou os dois ao mesmo tempo.

Na segunda parte do jôgo, podemos pedir às crianças para tirarem do lenço uma peça que não é amarela. Evidentemente, tôda a peça que não é amarela, é obrigatòriamente, um quadrado. Todas as peças não amare las serão retiradas e as crianças ficarão surpresas ao constatarem que t todas são quadrados. Assim, as peças do lenço têm o atributo "se não amarelas, então, quadradas". Elas podem, então, ser recolocadas no lenço e podemos pedir às criança s para pegarem as peças que não são quadradas. Elas verão logo q ue não são quadradas são amarelas. Assim, todas as peça que estão no lenço têm a propriedade: "Se não quadradas, então, amarelas". Esta é ainda uma outra dedução que as crianças terão feito de um enuncia de "ou...ou", ~~prolongando~~ ampliando, assim, as deduções rudimentares feitas quando e la s jogaram o jôgo da Negação. Isto significa que se uma situação "ou.. ou" é proposta, então, uma situação de implicação pode ser deduzida. A situação "ou...ou", aqui, é que cada coisa que está dentro do lenço é "ou um quadrado ou amarelo".

As situações de implicação são "se não amarelo, então, quadrado", "senão quadrado, então, amarelo". Estas implicações <u>são deduzidas</u> da situação "ou bem ....ou bem". As implicações em si, são as propriedades dos conjuntos no lenço e a dedução não é em si uma implicação. Nós <u>deduzimos</u> uma implicação de um atributo "ou...ou". É a primeira vez que será feita uma <u>deduçã</u> o de uma <u>implicação</u>.

Será interessante olhar as peças que não estão no lenço. Esta peças são ao mesmo tempo, não amarelas <u>e</u> não quadradas porque todas as p ças amarelas assim como todas as peças quadradas foram colocadas no lenç ço; estas que não estão no lenço são "não amarelas <u>e</u> não quadradas". Assim, o conjunto que foi deixado fora do lenço é um conjunto "e". Estas p peças que não estão no lenço têm o atributo "não quadrado ou não amarelo" que é o mesmo a tributo que "ao mesmo tempo não quadrado e não amarelo". Nós, aqui, nova mente <u>deduzimos</u> um atributo de outro atributo. Êste atributo é a negação do atributo "ou...ou" e nós vimos que esta negação é um atributo "e" das negações dos atributos constituintes do atributo "ou... ou".

A negação de uma disjunção é a conjunção danegação dos atributos da disjunção; assim, "não quadrado ou amarelo" é idêntico a "não quadrado e ~~ã~~ não amarelo".

Podemos entretanto complicar um pouco mais construindo um c conjunto "ou...ou" no qual já há atributos de negação. Nós podemos dizer que desejamos que alguém coloque no lenço peças que sejam "ou azuis ou n não triângulos".Tôda coisa azul pode ir pa ra o lenço ou tôda coisa que não é triângulo. Isto significa que se pegarmos do lenço um triângulo,êle será necessàriamente azul, e se nós tirarmos uma peça que não é azul, ela será necessàriamente, um não triângulo. Aqui ainda nós deduzimos implicações a pa rtir dos atributos "ou...ou" e leva, de modo mais geral, a encontrar nesse caminho no cálculo de atributos.

9.2. Versão competititva

O jôgo anterior pode ser tornado competititvo da mesma maneira que os outros pedindo para as crianças colocarem as peças, uma após outra, no lenço. Novamente cada jogador tem o direito de criticar o jogador precedente e pretender que tal peça não devia ter sido colocada no lenço.

Quando o lenço está completamente cheio, podemos decidir qu as crianças deverão propor certas perguntas ou dar certas ordens que impliquem certos atributos que não estavam incuidos na ordem. Por exemplo a propósito do lenço que contém as peças que são "ou azuis ou não triângulos", é possível,formular uma ordem tal ~~que~~ como "Retira do lenço uma peça que é tal ou tal" de maneira a ser certo que esta que vai ser retirada tenha um outro atributo que não está incluido na ordem? Há,evidentemente, duas maneiras de fazer isto no caso de um conjunto "ou..ou".Neste caso onde tôda peça é "ou azul ou não triângulo" se alguém pede um triângulo, então, êle será azul. Se pedimos uma peça não azul, então esta será uma peça não triângulo. Se ao contrário, pedimos uma peça azul, ela necessàriamente,não será um triângulo, ela poderá ser um não triângulo.

Há duas maneiras de pedir para retirarem as peças de um conjunto " ou...ou" pa ra que resulte que um atributo não incluso na pergunta defina a s peças retiradas. Para tais ordens nós podemos escolher, a partir de dois atributos azul e triângulo é de suas negações, entre as q quatro ordens que podem decorrer:1) um azul, 2) um não azúl, 3) um triângulo, 4) um não triângulo.

Duas destas perguntas conseguem e duas não conseguem, isto duas dentre ela s implicarão alguns outros atributos e as outras duas ~~nã~~ não. É assim, que ~~pedir~~ "Retire um triângulo" significa que será retirad do um triângulo que será necessàriamente azul, mas a ordem "Retira um nã triâ ngulo" significa que se retirará por certo um não triângulo, mas qu será azul ou não azul.

As ordens que darão os pontos podem ser, por exemplo,estas que implicarão inevitavelmente um certo atributo não incluso na pergunta (Aq ui a ordem: "retire um triângulo" porque ela dará um triângulo necessariamente azul: se triângulo,então,azul.) Isto aguçará o raciocínio das crianças e permitirá graças à manipulação que sempre acompanha êsses exercícios, a formação de relações entre os atributos "ou...ou" e os atributos "se...então".

Para torna r êste jôgo mais difícil seria possível começar por um conjunto vermelho e quadrado e de continuar com o complemento dêste conjunto que é "ou não vermelho ou não quadrado". Neste último conjunto tem ou bem peças não vermelhas ou bem peças não quadradas. Podemos pedir, por exemplo,"Retire uma peça vermelha" e, então, naturalmente, isto será uma peça não quadrada. Ou, nós também podemos dizer:Retira uma peça qua drada" e, então evidentemente, isto será também uma peça não vermelha.

O jôgo pode ser tornado ainda mais difícil indo na direção inversa e partindo de um conjunto "e" em lugar de partir de um conjunto "ou...ou". Chamaremos atenção que todo conjunto "e" tem um conjunto complementar "ou....ou" e todo conjunto comple "ou...ou" tem um conjunto co complementa r "e". Estas regras lógicas são habitualmente chamadas regra de De Morgan, por causa (d'aprés) o matemático dêste nome. Poderemos jogar os jogos cuja finalidade seria a aprendizagem das relações de De Morgan.

Os jogos de "ou...ou" de "se...então" podem ser praticados servindo-se de situações definidas verbalmente. Quando as crianças têm s suficiente prática dos blocos, elas se tornam capazes de aplicar as relações assim aprendidas a outras situações. Podemos pedir-lhes para pensarem em situações "se...então" que elas aplicarão sem errar.

Uma criança poderá dizer:"Se chove nossa garagem é inundada" Nós podemos sugerir à criança: a garagem estava inundada uma manhã, podem nos dizer qualquer coisa sôbre a chuva dessa manhã? Se a criança diz "sim choveu", ela tem necessidade de uma prátisa suplementar de situações concretas " se ...então". Ao contrário, se ela diz:"O vizinho tinha molhado a garagem" ou qualquer coisa semelhante, nós saberemos que ela compreendeu a não-inevitabilidade das situações "se... então".

De outra parte, se nós sugerimos que a garagem não estava inundada, então,não pode ter chovido, porque nós sabemos que se tivesse c chovido, então a garagem teria sido inundada.

O desenvolvimento mais acentuado de um tal raciocínio formal é deixado a o estado seguinte da educação primária.

9.3. Conjunto COMPLEMENTAR de um CONJUNTO "ou...ou"

Temos um conjunto "ou....ou", por exemplo:

"ou vermelho ou redondo".

Entrariam nêste conjunto todas as peças que são vermelhas assim como todas as peças que são redondas. Desta maneira o atributo ser "ou vermelho ou redondo" seria representado fisicamente pelo conjunto composto dêstes objetos. Perguntemos, agora,quais objetos estão no conjunto complementar? São as peças que não são nem vermelhas nem redondas. Ou, de outro modo, o conjunto complementar contém as peças que são "ao mesmo tempo não-vermelhos, e não-redondos".

Podemos pedir às crianças para fazerem o conjunto "ou vermelho ou redondo" e, então, ver como elas poderiam descrever o conjunto dos blocos que foram deixados no exterior do conjunto "vermelho ou redondo". Podemos propor uma pergunta como:"Que podemos dizer sôbre todo elemento do conjunto de blocos que não estão no conjunto "vermelho ou redondo"?As crianças descobririam que todo elemento do conjunto complementar não é v vermelho. Elas descobririam também que todo elemento do conjunto complementar também não é redondo. E porque todo elemento do conjunto complementar é "ao mesmo tempo não-vermelho e não-redondo".

Outros conjuntos "ou...ou" podem ser realizados e os conjuntos complementares examinados. A primeira cirança que pode enunciar o que podemos dizer "ao mesmo tempo" dos elementos do conjunto complementar é o vencedor. Ela é que propora um outro conjunto "ou...ou".Dêste modo,as crianças se dão bem conta de que o conjunto complementar de um conjunto "ou...ou" é um conjunto "e". Alguns alunos mais brilhantes conseguem descobrir que a s negações das propriedades que definem o conjunto "ou....ou" devem ser transformadas em conjunto "e" para definir o conjunto complementar.

Esta é uma das regras de De Morgan.Se é claramente compreendido que a negação de uma negação é o atributo de origem, então, não encontraremos nenhuma dificuldade com os conjuntos complementares dos conjunto "ou...ou" tais como "ou amarelo ou não-triângulo","ou não azul ou não quadrado", etc..

9.4. Conjunto COMPLEMENTAR de um CONJUNTO "e".

Consideremos um conjunto "e",por exemplo,"azul e quadrado". Qual é o conjunto complementar dêste conjunto?

Êste conjunto compreenderá os blocos que são ou não azuis ou não quadrados.Podemos propor a pergunta:"Quais as peças do conjunto complementar?"Se a criança não responde podemos ajudá-la perguntando "tôda peça é...?" parando ante a pequena palavra "ou"mas a sugerindo, se for necessário.Assim, será bem compreendido que a propriedade possuida pelo con junto complementar de um conjunto "e" pode se exprimir pelas negações de "ou...ou" das prop riedades determinantes do conjunto original. Em outros têrmos, dizer"não azul"e"não quadrado" é a mesma coisa que dizer "ou não azul ou não qua drado".

O exercício pode ser transformado em jôgo da mesma maneira que o precedente.

10. OS JOGOS DAS TRANSFORMAÇÕES

10. 1. O jôgo de reprodução ou cópia.

Êle é jogado com duas equipes que se defrontam, cada uma dis pondo de uma caixa completa de blocos lógicos. Devemos cuidar para não mi misturar os dois conjuntos de blocos e verificar que não falte nenhuma pe ça num ou noutro.

A primeira reprodução será evidentemente uma forma de reprodu ção idêntica, ou dito de outra forma, cópia: uma equipe fará uma determinada construção, não importa qual, com os blocos, e a outra equipe deverá reproduzí-la exatamente, isto é, copiá-la.

Algumas crianças de cinco anos e mesmo de seis anos acham is to na verdade muito difícil. É prudente limitar a 5 ou 6 o número de peça da primeira construção. Se um modelo é feito por uma equipe, a cópia exata, para a equipe que se encontra em frente apresentará alguma dificuldad de.Para ajudar as crianças nêste exercício é necessário que elas possam s se concentrar sôbre as relações espaciais entre as peças. Resultará,então, uma aprendizagem importante. Desde que as crianças saibam reproduzir uma construção com precisão podemos complicar o exercício; por exemplo, podemos decidir que a mesma construção deva ser feita, mas cadas vez que uma peça azul for colocada de um lado, uma peça vermelha (mas da mesma forma, do mesmo tamanho e da mesma espessura) deverá ser colocada em frente; e, paralelamente se uma peça vermelha foi posta de um lado, então, uma peça azul (mas da mesma forma, do mesmo tamanho e da mesma espessura) deve ser colocada do outro.Rent Além de que a uma peça amarela que é colocada de u um la do deverá corresponder uma peça amarela do outro. Assim, a estrutur ra será reproduzida exatamente com a diferença das bixxxs peças azuis e das peças vermelhas que serão intervertidas. Areprodução poderá evidentem mente ser feita de uma maneira diferente, escolhendo uma outra combinação de côr. Cêdo as crianças começam a pensar em uma troca de côr, cíclica,por exemplo: cada azul de um lado poderá ser substituido do outro lado pela m mesma peça na s vermelha, cada vermelha pela mesma peça mas amarela e cad da amarela pela mesma peça mas azul,etc...

Há muitos outros jogos de reprodução possíveis, por exemplo, cada peça grande de um lado pode ser substituida por uma pequena, cada peq uena por uma grandep ou cada espêssa por uma delgada, cada delgada por uma espêssa ou bem podemos fazer duas destas trocas de atributos ao mesmo tempo, etc.

O jôgo pode complicado tanto quanto as crianças o desejem e pode se tornar muito competitivo. É uma introdução importante à idéia de <u>transformação</u> que pode mesmo conduzir as crianças à descoberta de algumas das propriedades dos grupos matemáticos.

Se três equipes jogam um jôgo de reprodução será nêste caso, com três conjuntos de blocos lógicos. Então A pode construir o edifício, B pode reproduzí-lo segundo uma certa regra e depois C pode reproduzir B segundo uma outra regra. Podemos perguntar às crianças qual é a regra que permite reproduzir A em C. Este exercício as fará entrar no domínio da xx teoria das transformações.Naturalmente, as quatro formas podem ser trocadas umas nas outras, e muitas possibilidades podem ser tentadas,por exemplo, os quadrados podem ser trocados em triângulos e os redondos em retân gulos; quatro combinações cíclicas podem também ser ensaiadas, etc...

10.2. Desenvolvimento do jôgo de reprodução

Vemos claramente que o jôgo de reprodução contém os germens de uma a tividade matemática muito avançada. A idéia de transformação, ou função que cria uma situação a partir de uma outra situação está inclusa nêste jôgo. Em outro, a combinação de tais transformações está também incluso como, por exemplo, se o grupo A está reproduzido em B de um certo modo, e Hý B em C de outra maneira, a questão é saber como o grupo A foi transformado em C. É a combinação das duas reproduções.

Talvez que nêste estado, em lugar da palavra reprodução, possamos começar a empregar a palavra "transformação"; não ainda com as crianças ma s na descrição dos jogos.

Tomemos, por exemplo, a transformação que muda o azul em vermelho e o vermelho em azul e deixa o amarelo sem mudar e a outra transformação que reproduz tudo exatamente. Certamente, se continuamos a fazer uma ou a outra dessas transformações, e Talvez uma dentre elas muitas vezes seguidas, depois outra muitas vezes seguidas etc.. nós teremos assim executado muitas vezes uma sucessão de transformações tais que o todo, última construção pode também ser obtida a partir da primeira mas não uma e uma só dessas transformações. Com efeito, a reprodução "copia" simplesmente, isto é, as côres ficam exatamente as mesmas; do outro lado, a troca a zul-vermelho troca simplesmente o azul em vermelho e o vermelho em azul, deixando o ama relo sem trocar; se bem que quando essa troca azul-vermelho foi efetuada duas vezes nós voltamos à situação de origem. As criança s se dão conta que uma cópia seguida de uma troca azul-vermelho produzirá uma transformação completa do azul e do vermelho; e que uma t troca azul ou vermelha seguida por outra troca azul en vermelho produzirá uma nova transformação que equivalerá à cópia ou, se quizermos, uma c cópia seguida por uma dupla transformação será evidentemente, equivalente a uma simples cópia. Não é, por certo, necessário escolher uma troca a zul em vermelho deixando o amarelo sem trocar. Podemos escolher a troca vermelho em amarelo deixando o azul sem trocar, a troca azul em amarelo, deixando o vermelho de ladó. É claro que só há as três maneiras descritas de fazer as transformações de côr.

10.3. Jogos cíclicos e inversos.

Há naturalmente, transformações cíclicas, por exemplo, o v vermelho pode ser transformado em azul, o azul em amarelo, o amarelo em vermelho na transformação de uma construção em uma segunda construção.

Se nós transformamos então êsse segundo edifício em um terceiro edifício, pela troca, desta vez de tôda a peça vermelha do segundo em peça azul do terceiro como de tôda peça azul em peça amarela e de tôda peça ama rela em peça vermelha no terceiro, qual transformação realizamos quando passamos da primeira construção à terceira?

Entretanto, não se trata mais de "transformação-cópia", dito de outro modo, o terceiro edifício não tem, para cada uma de suas formas, as mesmas côres que o primeiro.

Podemos constatar, com efeito, que as peças amarelas do primeiro foram trocadas em peças azuis no terceiro, e do mesmo modo, as peças azuis em peças vermelhas e as peças vermelhas em peças amarelas no t terceiro.

A transformação do edifício 1 em edifício 3 é exatamente o oposto da transformação do edifício 1 em edifício 2. Isto significa que se nós aplicamos no edifício 2 a transformação 1 -→3 que permite passar diretamente do edifício 1 ao edifício 3, nós obteremos a cópia do edifício 1.

Com efeito, na transformação 1 -→3, o vermelho muda em amarelo, o azul muda em vermelho, e o amarelo muda para azul.

Se a aplicamos ao edifício 2 resulta: os azuis trocam para vermelho, o amarelo azul e o azul por amarelo; onde se vê claramente que se voltou ao edifício 1 do princípio.

Em resumo:

```
edifício 1 edifício 2  edifício 3   volta ao edifício 1
  v -------> a ---------->am.-------> v   pela transformação 1 --3
  a ------->am.----------> v -------> a   aplimada ao edifício 2
  am. -----> v ----------> a -------> am.
```

Um par de tais transformações que quando aplicadas úma após a outra produzem a "transformação-cópia" são chamadas inversas uma da outra. A matemática está cheia de inversas. A prática das operações inversas é a cha ve da compreensão das relações entre as operações tais como a ad ção e a subtração, a multiplicação e a divisão, as potências, as raizes, os logarítimos etc...Se as crianças encontram as transformações e suas inversa s cedo, elas terão menos dificuldade em dominar as situações mais difíceis concernentes à adição e à subtração, a multiplicação e a divisã Tendo encontrado as inversas, essas situações serão mais fàcilmente compr preendidas, com efeito, as relações entre as inversas e as transformaçõe direta s serão para elas velhas amigas.

10.4. Os jogos de combinação, as tabelas de compostos

Naturalmente, podemos obter transformações semelhantes com outros atributos. De fato, para a simples reprodução ou cópia e a troca completa, é possível que o espêsso e o delgado, ou o grande e o pequeno sejam ma is fáceis de manipular, se bem que se êsses atributos são apresentados em primeiro lugar, o caminho para a generalização arrisca de apresentar-se mais ~~fó~~ difícil. Assim, preconizamos começar pela troca de côr na s primeiras experiências de transformação que serão seguidas se p possível, pelas trocas de tamanho e de espessura.

No ca so da espessura, pode-se fazer duas coisas, seja copiar exa tamente: é a transformação por reprodução ou cópia, seja substituir uma peça delgada pela mesma peça espêssa. Ou ainda, passando do edifício A para o edifício B as peças espêssas tornam-se delgadas e as delgada s tornam-se espêssas, conservados todos os outros atributos.

Não é necessário prender-se à s trocas de espessura.Para as crianças muito pequenas as trocas de tamanho podem ser mais fáceis de manipular porque uma diferença de tamanho é mais fàcilmente percebida do q que uma diferença de espessura, Nas ~~peças~~ trocas de tamanho as peças grades trocam-se por pequenas e as pequenas trocam-se por grandes. Quando a criança s jogara m com a s trocas de espessura como com as de tamanho, elas chegam a ter vontade de trocar dois atributos ao mesmo tempo.

Nêste caso, uma peça grande e espêssa é trocada por uma peça peq uena e delgada, ou uma peça pequena e espêssa em uma grande e degada etc...Se nós consideramos a espessura e o tamanho nós temos quatro transformações diferentes:

C: cópia;
T: troca de Tamanho;
E: troca de Espêssura;
TE: troca de Tamanho e de Espessura.

Será interessante de ver a que ponto as crianças são capaze de encontrar a s relações entre as transformações acima. Por exemplo,se:

o edifício A é transformado em edifício B pela troca de Tamanho
e o edifício B é transformado em edifício C pela troca de Espessura
depois o edifício A é transformado em edifício C pela troca de Espessura e de Tamanho, ou se:

o edifício A é transformado em edifício B pela troca de Tamanho
e o edifício B é transformado em edifício C pela troca de Tamanho e de Espessura
depois o edifício A é transformado em edifício C pela troca de Espessura

uma vez que a Tamanho de cada peça terá sido trocado duas vezes, uma vez de A em B e uma segunda vez de B em C e que cada peça retomou seu Tamanho de origem, constata-se que a troca de A em C foi sòmente uma troca d Espessura.

Compreende-se, após um certo tempo que, se duas das transforma ções acima são feitas uma após outra, a transformação equivalente composta, será sempre sòmente uma das quatro transformações indicadas.

Lembra-se que essas trocas já foram encontradas na última f forma de jôgo de matrizes na secção 7. Vê-se que:

troca de Tamanho seguida por troca de Tamanho restaura a situação inicial

troca de Espessura seguida por troca de Espessura restaura a situação inicial

troca de Tam.e Esp. seguida por troca de Tam.e Esp. restaura a situação inicial

Resulta que tôda a transformação dêste gênero se ela é repetida restaura a situação inicial. É porque uma tal sucessão de operações é equivalente de uma simples cópia.

Isto será também fàcilmente verificado pelas três transformações: (T) (E) e (TE).

Se duas entre elas são feitas uma após a outra, o resultado será equivalente à terceira.

Formalmente:

(TE) (T) = (E),(T) (E) = (TE),(TE) (E) = (T)

a ssim como

(T) (TE) = (E),(E) (T) = (TE), (E) (TE) = (T)

A estrutura posta em fóco pelo conjunto dessas transformações é conhecida sob o nome de grupo de Klein. Como se verificará fàcilmente, a tabela completa dessas transformações é a seguinte:

C. C = C	C. E = E	C. T = T	C. TE = TE
E. C = E	E. E.= C	E. T = TE	E. TE = T
T. C = T	T. E = TE	T. T = C	T. TE = E
TE. C = TE	TE.E = T	TE. T = E	TE. TE = C

Fig. 6

Podemos também jogar jogos semelhantes trocando seja as côres, sejam as formas, sejam todos outros atr ibutos. Por exemplo, uma tra nsformação pode ser esta do vermelho e do azul, ficando o amarelo se trocar. Esta poderia ser nossa troca de côr; uma troca de forma poderia ser esta na qual os quadrados seriam transformados em triângulos, ou be redondos em retângulos. Nossa terceira transformação seria aquela na qual de cada vez duas das trocas acima seriam feitas ao mesmo tempo. Se nós introduzimos também a simples cópia como uma transformação, nós teremos um conjunto de transforma ções que obedecem às mesmas regras indicadas na fig. 6 tanto quanto (aussi longtemps) suas relações foram respeitadas. Em lugar do tamanho e da espessura, nós vamos simplesmente fazer variar a côr e a forma. Para assegurar que obteremos as mesmas regras, é necessário tomar algumas precauções. É necessário tomar transformações q que feitas duas vezes, sejam equivalentes à transformação de reprodução (cópia). Esta exigência é realizada por nossa nova transformação de troca de côr do mesmo modo que pela troca de forma. Será instrutivo construir a tabela dêste novo conjunto de trans

10.5. Estudo mais acentuado dos jogos cíclicos

Consideremos por exemplo, a transformação cíclica seguinte, relacionada sòmente às formas

quadrado em triângulo, triângulo em retângulo
retângulo em redondo, redondo em quadrado } PRIMEIRO CÍCLO

e, depois o cíclo de sentido oposto:

quadrado em redondo, redondo em retângulo
retângulo em triângulo, triângulo em quadrado } SEGUNDO CÍCLO

Se aplicamos o primeiro cíclo depois o segundo, restauramos a situação inicia l, porque o segundo cíclo desfaz tudo o que foi feito pelo primeiro. Do mesmo modo se aplicamos o segundo cíclo primeiro e depois o ~~segundo~~ primeiro cíclo, nós restauramos ainda, a situação inicial, porque o primeiro cíclo desfaz também tudo o que foi feito pelo segundo. Que resultará se aplicamos o mesmo cíclo duas vezes em seguida? Verifica-se fàcilmente que se aplicamos duas vezes em seguida o mesmo cíclo, obteremos a transformações

quadrado em retângulo, triângulo em redondo } TROCA
retângulo em quadrado, redondo em triângulo }

Constatamos a Troca dos quadrados por retângulos do mesmo modo que dos triângulos por redondos. De mesmo modo com o segundo ciclo se nós aplicarmos duas vezes em seguida e, igualmente com o ciclo composto Troca Cópia (T.C= T ou C.T=T). Teremos esgotado o jôgo ? Por exemplo, teremos necessidade de introduzir uma nova transformação como a composta do primeiro ciclo e da Troca? ou do segundo ciclo e da Troca? Vê-se, consultando a figura 7 q ue o jôgo está bem terminado. Se empregarmos as abreviações seguintes: C= Cópia P = Primeiro ciclo S = Segundo ciclo T = Troca, verificamos que as relações entre as transformações acima são expressas na tabela abaixo.

C. C = C	C. P = P	C. S = S	C. T = T
P. C = P	P. P = T	P. S = C.	P. T = S
S. C = S	S. P = C	S. S = T	S. T = P
T. C = T	T. P = S	T. S = P	T. T = C

Fig. 7

A medida em que as crianças possam jogar êste jôgo, elas descobrirão a propriedade do zero na adição, do mesmo modo que os "fatos" de adição entre todos os primeiros números. Podemos pedir que façam um círculo de números como indicado na figura 8. Com êste círculo podemos jogar o jôgo de números da seguinte maneira: o ponto de partida é não importa qual dos zeros; da-se nenhum passo, ou um passo, dois passos, ou três passos, no sentido das flechas.

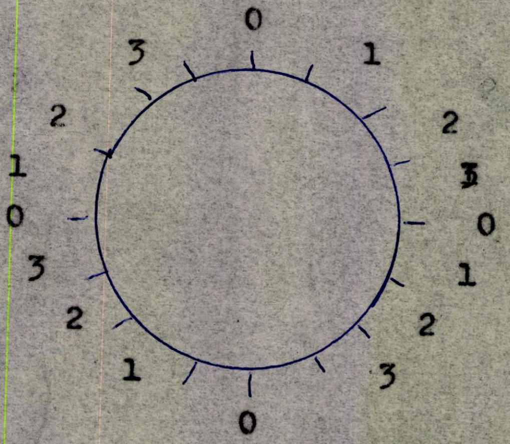

Fig. 8

O jôgo "cíclico"
com quatro números

De mesmo modo nós examinamos os números 0,1,2, ou 3 respectivamente. Suponhamos que demos um passo e que viemos repousar no 1 que segue o zero de nossa pa rtida. Suponhamos que fizemos um outro passo no sentido da s flechas Chegaremos à posição marcada por um 2. Podemos dizer que:

1 + 1 = 2. Isto corresponderá a P.P=T

Mas suponhamos que partimos do zero e fizemos três passos, Isto nos levará ao 3. Suponhamos que fizemos agora ~~xxxxxxxxx~~ mais 3 passos, nós chegaremos a um 2. Isto significa que no "jôgo dos números" 3 + 3 = 2, o que corresponde a S.S=T no jôgo das transformações. Isto corresponde ao fato q ue no jôgo de transformações, a aplicação sucessiva da mesma transformação cíclica duas vezes em seguida conduz, em cada caso à transformação Troca (P.P=T) e S.S=T) como com a aplicação da composta (C.T=T). Vêmos talvez, mais claramente a correspondência se apresentamos o conjunto formal com referencia a quàlquer aplicação, como se encontra abaixo:

Cópia : 0 ou nenhum passo ao redor do círculo
Primeiro ciclo: 1 ou 1 passo no sentido das flechas
Troca : 2 ou 2 passos no sentido das flechas
Segundo ciclo : 3 ou 3 passos no sentido das flechas

Primeiro ciclo seguido por Primeiro ciclo equivalente à Troca
1 + 1 = 2
ou Primero ciclo seguido por Segundo ciclo equivalente à Cópia
1 + 3 = 0
ou Troca seguida por Primeiro ciclo equivalente a Segundo ciclo
2 + 1 = 3
etc.

Se a divisão por 4 foi estudada com as crianças pode-se pedir para classificar os números em quatro classes.

A classe 0. A esta classe pertencem os números que quando divididos por 4 deixam um resto igual a 0, isto é, os números divisiveis por 4.
A classe 1. A esta classe pertencem os números que quando divididos por 4 deixam um resto igual a 1.
A classe 2. A esta classe pertencem os números que divididos por 4 deixam um resto igual a 2.
A classe 3. A esta classe pertencem os números que divididos por 4 deixam um resto igual a 3.

Vimos, por exemplo, que um número da classe 1 adicionado a um outro número da classe 1 dará um número da classe 2. Podemos exprimir isto simbòlicamente escrevendo 1 + 1 = 2. Um número da classe 1 adicionado a um número da classe 3 dará um número da classe 0, etc.. Vimos que êste "jôgo de adição" é o mesmo que aquêle que consiste em dar passos ao redor do círculo dos números e o mesmo que o das transformações do qual nós já falamos.

Podemos realizar êste mesmo jôgo fazendo as crianças girare a o red or do círculo. Por exemplo, podemos tomar uma volta completa como regra do jôgo, isto é, que uma criança gire à direita até que volte aonde estava, seja que ela gire sôbre si mesma ao redor de um eixo vertical passa ndo pela cirança seja que ela viaje ao longo da circunferência. Podemos também fazer a criança girar na direção dos ponteiros do relógio, isto é, à direita, um quarto de volta (um ângulo reto), ou no sentido inverso ao dos ponteiros do relógio, isto é, à esquerda. O quarto movimento será uma meia volta; qualquer que seja a direção na qual ela olha na partida, após uma meia volta ela olhará na direção oposta. Há então quatro movimentos nêste "jôgo": 1º a volta completa; 2º o quarto de volta à direita da criança; 3º o quarto de volta à esquerda da criança; 4º a meia volta. Vimos que êstes movimentos se combinam exatamente do mesmo modo que no jôgo com 0,1,2,3, o jôgo de adição e o jôgo de transformação em dois movimentos cíclicos comportando um movimento de troca.

A transcrição será:

0 corresponde a 1 volta completa,
1 corresponde a 1/4 de volta pela direita da criança,
2 corresponde a 1/2 volta,
3 corresponde a 1/4 de volta pela esquerda da criança.

Podemos obter uma transcrição também clara fazendo corresponder o 1 com o 1/4 de volta à esquerda e o 3 com 1/4 de volta à direta.

As correspondências com o jôgo das trocas serão:
Cópia corresponde a 1 volta completa,
Primeiro ciclo corresponde a 1/4 de volta pela direita da criança,
Troca corresponde a 1/2 volta
Segundo ciclo corresponde a 1/4 de volta à esquerda da criança.

A transcrição seria igualmente correta se se fizesse corresponder ao Primeiro ciclo o 1/4 de volta à esquerda e ao Segundo ciclo 1/4 de volta à direita.

Êste jôgo conduz ao estudo dos restos da divisão de um número por 4. Do mesmo modo os jogos com trocas de Espessura e Cópia, por exemplo, conduzem a os restos da divisão por 2, isto é, ao estudos das propr

priedades dos números pares e ímpares.Um número par dividido por 2 deixa
um resto igual a zero, um número impar dividido por dois deixa um resto i-
gual a 1. Estes são os únicos restos possíveis quando nós dividimos um nú
mero natural por 2. As regras obtidas combinando as operações de Troca de
Espessura e de Cópia são as mesmas que as regras da adição dos números pare
e ímpares..

Nós temos as correspondências:
Troca de Espessura corresponde a números ímpares,
Cópia corresponde a números pares.

Por exemplo; troca de Espessura seguida de Cópia é equivale
te a troca de Espessura e um número ímpar mais um número par dá um número
impa r.Pode-se verificar que as correspondências são válidas em todos os
casos.

Mais tarde as crianças encontrarão esta mesma estrutura quan
do elas começarem a aprender os números positivos e negativos.A multiplica
ção dos números positivos e negativos segue as mesmas regras que a adição
dos números pares e ímpares ou a combinação de transformações tais como a
Cópia e a Troca de Espessura.

+.+=+ corresponde à Cópia seguida de Cópia que dá Cópia: C.C=C
-.-=+ corresponde à troca de Espessura seguida de uma outra troca se Espes-
sura que equivale a uma Cópia: E.E=C.

Verifica-se de novo que a correspondência combina igualmente
em todos os outros casos.

Se as crianças são ainda muito pequenas para apreciar a "ma-
gia", pode-se dizer-lhes que as transformações são mágicas quando elas são
executadas por barrinhas mágicas, pràticamente por cartazes sôbre os quais
se escreve, por exemplo;

"Espesso troca em delgado"
"Delgado troca em espesso"

A palavra "CÓPIA" poderá ser escrita sôbre uma outra placa.No
caso das côres, elas poderiam ser convenientemente representadas por mancha
coloridas ou pelos nomes dessas côres, se elas já são familiares às crianç
as. Flechas podem ser colocadas entre as côres na direção da troca indicad
da pela "barrinha" particular. As crianças inventarão imediatamente novas
"barrinhas" cada uma indicando as espécies de "magias" diferentes e os pro-
blemas que resultarão das relações entre suas novas "barrinhas" as conduzi-
rão a muitas noções matemáticas muito úteis.

....