INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P. FRACTIONS (Trad. A.B.Krebs)

6. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES (pag. 32-37)

6.1. Adição de estados obtidos por meio de operadores fracionários

Admitamos que as crianças já tenham compreendido a possibilidade de interverter a multiplicação e a divisão num operador fracionário e, que elas tenham, igualmente, compreendido que certas sucessões de multiplicações e de divisões são equivalentes - por exemplo, que uma divisão por dois seguida de uma multiplicação por três é realmente equivalente a uma divisão por quatro seguida de uma multiplicação por seis, e, assim por diante, e o que significa a equivalência das frações como três meios e seis quartos, etc..

Suponhamos, agora, que desejamos "adicionar" tais frações. Que significa : adicionar frações? Podemos considerar frações seja como estados, seja como operadores. Por exemplo, se consideramos dois terços como um estado, é o resultado obtido aplicando ao operador-unidade a divisão por três, seguida da multiplicação por dois. Isto é o estado dois terços.

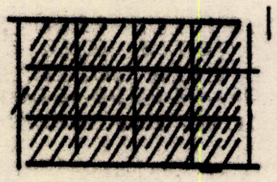
Suponhamos, agora, que queremos adicionar três quartos e dois terços. Queremos formar o conjunto reunião do conjunto que representa dois terços com o conjunto representando três quartos. Ora, três quartos é o resultado de duas operações aplicadas ao estado-unidade de origem a saber, uma divisão por quatro seguida de uma multiplicação por três. Por exemplo, se nosso estado-unidade é vinte e quatro, o estado dois terços é dezeseis. Paralelamente, o estado três quartos é dezoito. Que queremos, então, quando procuramos quanto é dois terços mais três quartos? O resultado será obtido reunindo o conjunto representando um estado ao conjunto representando o outro estado. Tomemos o conjunto representando o estado dezeseis, em seguida o conjunto representando o estado dezoito. Formamos com êsses conjuntos um conjunto reunião que representará o estado trinta e quatro. Nosso estado final é trinta e quatro e nosso estado de origem é vinte e quatro. Assim, quando nosso conjunto de 24 objetos representa nosso estado-unidade, que operador devemos utilizar para obter trinta e quatro? É, evidentemente, uma ~~multiplicação~~ divisão por doze e uma multiplicação por dezesete. Assim, o estado final que nós procuramos é dezesete doze avos e a soma das duas frações dois terços e três quartos é a fração dezesete doze avos.

Examinemos, cuidadosamente, o que fizemos. Se partimos de estado-unidade que chamamos, neste caso, um conjunto de vinte e quatro objetos e se operamos com o operador $\times \frac{2}{3}$, chegamos a dezeseis objetos num novo conjunto. De outro lado, se partimos de nosso estado-unidade de vinte e quatro objetos e, se operamos com o operador três quartos, chegamos a ao novo estado de três quartos do estado-unidade, o que, neste caso é a presença de dezoito objetos no nosso novo conjunto.

Ora, podemos atribuir uma significação qualquer ao fato d de adicionar $x\frac{2}{3}$ e $x\frac{3}{4}$? Certamente, o sentido que é preciso ligar a uma tal "adição" de operadores é o operador que devemos aplicar ao estado-unidade para nos conduzir ao estado:

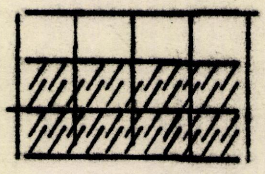
$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, isto é, a soma dos estados $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$; esta soma será o operador $x\frac{17}{12}$ pois $1 \times \frac{17}{12}$ nos conduz ao estado $\frac{17}{12}$ que é o mesmo estado que $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

Estado 1

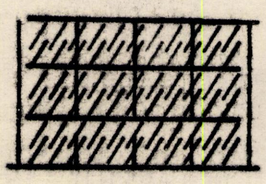


Operddor $x\frac{2}{3}$

Estado $\frac{2}{3}$

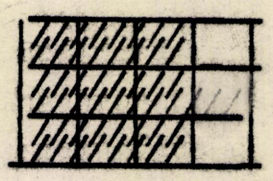


Estado 1

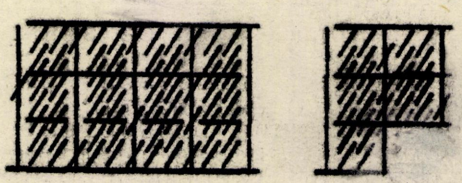


Operador $x\frac{3}{4}$

Estado $\frac{3}{4}$



Estado $\frac{2}{3}$ + Estado $\frac{3}{4}$ =



$\frac{17}{12}$

Assim, o operador $x\frac{2}{3}$ + o operador $x\frac{3}{4}$ = operador $x\frac{17}{12}$

Podemos dizer $x\frac{2}{3} + x\frac{3}{4} = x\frac{17}{12}$ porque $1 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{3}{4} = 1 \times \frac{17}{12}$.

Assim, "adicionar os operadores" não é de modo nenhum a mesma coisa que "multiplicar os operadores" o que temos considerado como sendo equivalente a aplicar um operador após o outro. Por exemplo, "multiplicando os operadores" nós aplicamos o operador $x\frac{2}{3}$ e a seguir o operador $x\frac{3}{4}$ ao estado que resultou e encontramos o estado final. Simbòlicamente, se a cadeia: $x\frac{2}{3}\ x\frac{3}{4}$

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
$\boxed{A}$	$x\frac{2}{3}$	$\boxed{B}$	$x\frac{3}{4}$	$\boxed{C}$

pode ser sempre substituida pela cadeia:

Estado	Oper.	Estado
$\boxed{A}$	$x\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$	$\boxed{C}$

então, nós dizemos que $x\frac{2}{3}\ x\frac{3}{4} = x\left(\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\right)$ neste caso $\frac{1}{2}$. Um operador é aplicado ap primeiro estado, conduzindo a um segundo estado e o segundo operador é aplicado a êste segundo estado. O operador único que fará o mesmo "trabalho" é o"produto" dos dois operadores.

A adição de operadores é um trabalho inteiramente diferente. Aqui nós temos duas cadeias:

Estado	Oper.	Estado
£ $\boxed{A}$	$\times \frac{2}{3}$	$\boxed{B}$
$\boxed{A}$	$\times \frac{3}{4}$	$\boxed{C}$

Se um estado B + C está definido, então, o operador $\times \frac{2}{3} + \frac{3}{4} ==$ ao operador que convém à cadeia.

Estado	Oper.	Estado
$\boxed{A}$	x Oper.	$\boxed{B + C}$

Aqui os dois operadores agiram sôbre o mesmo estado inicial. O operador que produzirá a soma de dois estados assim obtidos será "a soma" dos dois operadores.

Aqui nós tomamos, por exemplo, dois terços como o resultado de uma operação efetuada sôbre um estado. Tomamos três quartos como o resultado de uma outra operação mas, efetuada sôbre o mesmo estado inicial. Em outros têrmos, tomamos $B = \frac{2}{3}$ e $C = \frac{3}{4}$. Depois, nós "adicionamos" êstes resultados e o operador x Oper. que conduz ao estado final: $B + C = \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$, a partir do estado inicial êste é o operador que é o resultado final desta "adição". Vimos então, que a adição é, neste caso,uma noção muito mais complexa do que a multiplicação. Na multiplicação, o fato de utilizar um operador após o outro é uma idéia fácil de compreender porque nós simplesmente trocamos um primeiro estado em um segundo estado com um operador, depois trocamos o segundo estado em um terceiro estado com um segundo operador. Perguntamos, então; que operador trocará o primeiro estado para dar diretamente o terceiro? E êsse operador único é o produto dos dois operadores separados. Adicionando os operadores nós agimos para cada operador sôbre o mesmo estado inicial e procuramos o operador que pode nos levar dêsse estado inicial à soma dos dois estados que obtivemos utilizando nossos operadores.

Uma dificuldade suplementar provém, seguramente, da necessidade de preparar as frações para adicionar-o que chamamos denominador comum porque sem isso os estados não poderão ser adicionados conforme isto que chamamos denominador comum apropriado de modo que podemos construir conjuntos representando estados ~~tais que~~ como nosso estado dois terços e nosso estado três quartos a partir de números de objetos nos conjuntos que representam êsses estados. Nós poderíamos, por exemplo, ter tomado doze como nosso estadp A e dois terços como nosso estado B, o que teria sido representado pela presença de oito objetos e, três quartos como o nosso estado C, o que teria sido representado por nove objetos. A soma dos estados B e C teria, então, sido representada pela presença de dezesete objetos e, assim, para passar do estado A, de doze objetos ao estado B mais C, dezesete, teríamos ainda passado por uma divisão por doze e uma multiplicação por dezesete. O estado apropriado A pode,sempre, ser encontrado se assegurando que as duas divisões que estavam indicadas nos operadores fracionários possam se fazer. Num caso , se divide por três, no outro se divide por quatro.Então, o menor estado A no qual estas duas divisões podem se fazer seria doze, e êste é o <u>denominador comum</u>.

A divisão comum aos dois operadores fracionários na qual cada operador pode ser expresso é a "divisão por doze".

Podemos dizer que o estado $\frac{2}{3}$ pode ser obtido a partir do estado 1 não sòmente pela cadeia:

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
1	: 3	$\frac{1}{3}$	x 2	$\frac{2}{3}$

mas, também, pela cadeia:

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
1	: 12	$\frac{1}{12}$	x 8	$\frac{8}{12}$

porque o estado $\frac{8}{12}$ é um outro nome para o estado $\frac{2}{3}$. E isto porque, qualquer que seja o estado-unidade do quàl nós partimos, a operação de uma ou outra cadeia nos dará um estado representado de modo concreto exatamente pelo mesmo número de objetos em cada caso. Uma divisão por doze seguida de uma multiplicação por oito tem exatamente o mesmo efeito que uma divisão por três seguida de uma multiplicação por dois. É por isso que os estados que resultam podem ser identidicados como "os mesmos" ou "equivalentes".

Exatamente do mesmo modo, a cadeia:

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
1	: 4	$\frac{1}{4}$	x 3	$\frac{3}{4}$
tem o mesmo efeito que a cadeia:				
1	: 12	$\frac{1}{12}$	x 9	$\frac{9}{12}$

porque o estado $\frac{8}{12}$ é um outro nome para o estado $\frac{2}{3}$. E isto porque qualquer que seja o estadp-unidade do qual partimos, a operação de uma ou outra cadeia nos dará um estado representado de modo concreto exatamente pelo mesmo número de objetos em dada caso. Uma divisão por doze se guida de uma multiplicação por oito tem exatamente o mesmo efeito que uma divisão por três seguida de uma multiplicação por dois. É por isto que os estados resultantes podem ser identificados como "os mesmos" ou "equivalentes".

Exatamente do mesmo modo, a cadeia:

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
1	: 4	$\frac{1}{4}$	x 3	$\frac{3}{4}$
tem o mesmo efeito que a cadeia:				
1	:12	$\frac{1}{12}$	x 9	$\frac{9}{12}$

porque o estado $\frac{3}{4}$ pode ser chamado pelo nome de $\frac{9}{12}$. Isto é possível po porque partindo de não importa qual "estado-unidade" arbitrário ou "estado A" uma ou outra cadeia nos levará a um estado representado de modo concreto pela presença, exatamente, do mesmo número de objetos em cada caso. Uma divisão por 12 seguida de uma multiplicação por 9 tem exatamente o mesmo efeito que uma divisão por 4 seguida de uma multiplicação por 3.

É por isto que podemos considerar os estados $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{12}$ como "os mesmos" ou "eauivalentes".

Podemos ver que " levar (amener) uma fração a um outro denominador" significa substituir uma dada sucessão de uma divisão e de u uma multiplicação por uma outr a sucessão de uma divisão e uma multiplie cação. Reduzir duas frações a um "denominador comum" quer dizer fazer isto para cada fração, mas de tal modo que a cadeia de operações reduzindo cada um dos estados fracionários contenha em cada cadeia uma divisão exatamente pelo mesmo número. Em nosso caso, nós substituimos as cadeias de operadores:

:3 x2 e :4 x3

respectivamente, pelas cadeias de operadores:

:12 x8 e :12 x9

e, nas duas cadeias nós temos, agora, uma divisão por doze.

A maneira mais convencional de exprimir essas cadeias seria:

$$\times \frac{2}{3} \quad e \quad \times \frac{3}{4}$$

que são substituidas pelas cadeias equivalentes:

$$\times \frac{8}{12} \quad e \quad \frac{9}{12} \,;$$

Vimos que podemos identificar os estados resultantes das cadeias $\times \frac{2}{3}$ e $\times \frac{8}{12}$. Escrevemos, então, convencionalmente $\times \frac{2}{3} = \times \frac{8}{12}$

e, paralelamente $\times \frac{3}{4} = \times \frac{9}{}$

e, paralelamente $x\frac{3}{4} = x\frac{9}{12}$, o sinal de igualdade podendo designar, seja a equivalência das cadeias indicadas pelos algarismos nessas frações, seja a identidade dos estados obtidos como resultantes da operação sôbre o estado-unidade, por uma ou outra cadeia. Pode-se escrever de um modo mais apropriado:

$$\frac{2}{3} = \frac{8}{12} \text{ e } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}.$$

Estamos, agora, prontos a "adicionar" os estados assim obtidos.

Se nosso "estado A" inicial estava representado pelo número de objetos de um conjunto de 12 objetos, nosso estado $\frac{8}{12}$ será representado de modo concreto pela presença de um conjunto de 8 objetos num novo conjunto. Do mesmo modo o estado $\frac{9}{12}$ será representada pela presença de um conjunto de 9 objetos num outro novo conjunto.

Qual é o "nome do número fracionário" dêste novo estado resultante da reunião de dois conjuntos? Se encontra estabelecendo como é preciso proceder para passar do estado inicial representado pela presença de doze objetos ao estado final representado pela presença de dezesete objetos. Está claro que uma divisão por 12 seguida de uma multiplicação por 17 nos levará de um estado de 12 a um estado de 17. É esta, então, a cadeia que dá ao nosso último estado seu "nome fracionário", e êste será $\frac{17}{12}$. Assim, nós executamos a adição:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

porque esta adição é equivalente à adição:

$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$$

A técnica para "reduzir a um denominador comum" pode se sere exedutada por meio da técnica de alongamento de uma cadeia como vimos no capítulo sôbre a comparação das frações. As crianças saberão que a cadeia de operadores:

:3 | x2 | pode ser alongada em:

:3 | :4 | x2 | x4 |

que pode, por sua vez, ser abreviada em:

:12 | x8 |.

A notação mais convencional pode, também, ser utilizada, isto é, $\frac{2}{3}$ pode ser alongada em $\frac{2 \times 4}{3 \times 4}$ depois, abreviada em $\frac{8}{12}$. Na notação convencional, poderá ser menos evidente, para as crianças, que a d divisão deve ser feita por 3, depois por 4, porque o sinal x4 poderá na verdade, ser interpretado por elas como "multiplique por 4" bem como no denominador êle significa "divida por 4". O "multiplique por 4" se refere ao 3. A divisão poderá ser executada de uma só vez, após ter calculado (3 x 4). A divisão a fazer, então, será por (3 x 4), isto é, por 12.

Após ter tratado da adição, a subtração não deveria apr presentar nenhuma dificuldade. Os conjuntos representando certos estados podem ser obtidos de conjuntos representando outros estados e conduzir, dêste modo à subtração de um estado fracionário de um outro estado fraci nnário.

É preciso, contudo, estar atenta para que as crianças possam dizer qual, de duas frações quaisquer, é a maior, antes de lançá-las na subtração.

Evidentemente, não será possível subtrair $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, porque $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$.

6. 2. O emprêgo de recursos auxiliares.

Reconhecemos que abstrações de uma ordem bastante elevada entram em jôgo no estudo das frações. As crianças pequenas não construirão fàcilmente essas abstrações a partir de outras abstrações já à sua disposição; uma tal construção de conceitos abstratos é uma atividade que exige maturidade para a qual as crianças terão, mais tarde, necessidade de muito treinamenteo; mas, nas etapas elementares, as crianças, em conjunto, aprenderão de modo muito mais eficaz partindo de uma profusão de experiências concretas, tão variadas e tão numerosas quanto seja possível dar na escola.

Vimos que para adicionar frações nos encontramos diante de um modo de manejar os estados e os operadores diferente daquele com o qual se manejava para multiplicar as frações. É muito importante que estas relações se tornem claras para as crianças se quisermos que compreendam a significação matemática das quatro operações fundamentais aplicadas às frações.

Os estados podem ser representados concretamente por meio de conjuntos de objetos que podem ser postos sôbre a mesa, ou por meio de conjuntos de crianças que podem ser agrupadas em diferentes partes da classe. O sentido da visão e o sentido do tato deveriam, tanto quanto possível, ser postos em jôgo ao mesmo tempo. Os representantes dos estados deveriam não sòmente ser vistos mas, também, manipulados pelas crianças. Compreenderão, pouco a pouco, que um estado é uma <u>propriedade</u> matemática de qualquer situação presente, passada ou futura. De outro lado, o operador é qualquer coisa que é preciso <u>fazer</u> para passar de um estado de coisas a um outro estado de coisas. Assim, os estados devem ser representados por situações e os operadores por ações. Êste modo de proceder ajudará as crianças a compreender o sentido da relação: estado-operador ~~bem~~ muito mais eficazmente do que todas as explicações ou demonstrações feitas pelo professor.

É preciso, de outro lado cuidar para que as situações reais não sejam confundidas com as propriedades matemáticas dessas situações, nem as ações reais com as propriedades matemáticas possuidas por essas ações.

Uma situação não é, em si, um estado, uma ação não é, por si só, um operador. Uma situação <u>representa</u> um estado e, as ações podem <u>representar</u> os operadores. Uma situação que nós utilizamos para representar um estado pode ter uma propriedade matemática mas, a própria situação não é idêntica à esta propriedade matemática. Uma ação pode ser utilizada para representar um operador matemático, mas, a ação não é, em si idêntica a êste operador matemático.

Organização por Westphal em 28/10/80

....