DIENES, Z. P. FRACTIONS

4. DIVISÃO DE FRAÇÕES

(Pag. 26-29)

4 .1. A divisão como inverso da multiplicação

(trad. A.B.Krebs)

Nos casos das operações tais como as multiplicações e as divisões, ou as adições e as subtrações, os inversos já serão familiares. Anteriormente notamos que os inversos dos operadores fracionários podiam também ser introduzidos. Assim, o problema da divisão está quase resolvido, porque a divisão é exatamente o inverso da multiplicação. Suponhamos que temos um estado fracionário dois terços. O que devemos fazer a êste estado para obter um estado fracionário cinco sétimos? Êsta é o problema que é normalmente expresso por: cinco sétimos divididos por dois terços. Para fazer a pergunta de um modo marcante (frappante) dizemos: "quantos" dois terços"fazem" cinco sétimos? O"quanto" pergunta que operador é preciso aplicar aos dois terços para obter os cinco sétimos. Fazer a pergunta dessa maneira é fazê-la sob a forma "estado-operador-estado". Naturalmente, nós poderíamos fazê-la sob a forma "operador-operador-operador".

Poderíamos, com efeito, perguntar: se temos um operador d dois terços, que outro operador devemos utilizar conjuntamente para torná-lo equivalente a um operador cinco sétimoos ? Ora, isto é um pouco mais c complicado e alguns professores podem considerar como mais prudente começar pela primeira interpretação. Mas se lhes parecer que o segundo modo de encarar o problema é melhor, cabe a êles decidir; não há regra de ouro sôbre o que deva ser feito em primeiro lugar.

Consideremos a primeira maneira de encarar a questão:"estado-operador-estado". Temos um estado dois terços como estado inicial.Êste estado foi obtido por uma multiplicação por dois e uma divisão por três aplicados a um estado-unidade. Quer dizer que temos uma cadeia:

Estado	Oper.	Estado	Oper.	Estado
1	x 2	2	: 3	$\frac{2}{3}$

Desejamos, agora, encontrar a multiplicação e a divisão suplementares que é preciso fazer para chegar ao estado cinco sétimos.

Evidentemente, um estado de cinco sétimos se obtem partindo de um estado-unidade e fazendo uma multiplicação por cinco seguida de uma divisão por sete, ou ainda, partindo de um estado-unidade fazendo uma divisão por sete seguida de uma multiplicação por cinco. Estamos, em um sentido,voltando à formulação: "operador-operador-operador" do mesmo problema, isto é, que nós temos a cadeia seguinte incompleta de operadores:"multiplique por dois, divida por três, multiplique por qualquer coisa seguida de divida por qualquer outra coisa" o que é equivalente a uma multiplicação por cinco, seguida de uma divisão por sete.

ou formalmente:

x 2	: 3	x □	: □	= x 5	: 7

Temos duas janelas vazias para encher. Como fazer uma multiplicação por cinco de uma multiplicação por dois? Não podemos fazer se multiplicamos sòmente por números inteiros. Também, deveríamos, talvez no princípio, colocar quatro janelas no problema e, sugerir que poderíamos fazer uma multiplicação e uma divisão a fim de trocar uma multiplicação por dois em uma multiplicação por cinco; podemos a seguir ter duas janelas a mais como operadores para trocar a divisão por três em divisão por sete. Nossa cadeia "incompleta" se estabelecerá como segue:

x 2	: 3	x □	: □	x □	: □	= x 5	: 7

Devemos nos lembrar que as janelas, aqui, substituem operadores e não estados. Os operadores são as incognitas do problema; nós experimentamos encontrar qual sucessão de operadores devemos juntar a sucessão de: "multiplique por dois" seguido de "divida por três", a fim de obter uma fila de operadores que, reunidas, equivaleriam à cadeia curta x 5 | : 7. Para trocar uma multiplicação por dois em uma multiplicação por cinco, podemos, por exemplo, dividir por dois e multiplicar por cinco.

Isto não apresentará dificuldade se as crianças jogaram muitas vezes com essas cadeias. Visivelmente, uma multiplicação por dois seguida de uma divisão por dois, seguida ainda de uma multiplicação por cinco equivalem, ao fim de contas, a uma simples multiplicação por cinco.

Assim, então em lugar das duas primeiras janelas vazias nós temos agora quatro, devemos colocar primeiro uma divisão por dois seguida de uma multiplicação por cinco.

Voltemos para a divisão. Desejamos encontrar os operadores que, com a divisão por três equivalerão a uma divisão por sete. Isto será obtido "anulando" primeiro a divisão por três por uma multiplicação por três, depois, fazendo a divisão por sete que é o que queremos. Colocamos, então, na terceira janela uma multiplicação por três e na quarta uma divisão por sete. Agora, temos completa a nossa cadeia e colocados operadores nas quatro janelas vazias. A cadeia de operadores se lerá agora como segue:

Multiplique por dois, divida por três, divida por dois, multiplique por cinco, multiplique por três, divida por sete.

Isto é:

x 2 | : 3 | : 2 | x 5 | x 3 | : 7

Há, visivelemnte, nesta série de operadores uma multiplicação por dois e uma divisão por dois: êstes dois operadores podem ser suprimidos. Há, também, uma divisão por três e uma multiplicação por três que, igualmente, podem ser anuladas;

Assim, nossa série de operadores equivale a uma só multi plicação por cinco seguida de uma só divisão por sete, e isto é precisamente o que nós queriamos.

Examinemos, agora, o que se passou. Tomamos um estado dois terços e o aplicamos à cadeia de operadores: divida por dois, multiplique por cinco, multiplique por três, divida por sete, a fim de obter o estado de cinco sétimos.

Em linguagem formal:

Estado	Cadeia-operador				Estado
$\frac{2}{3}$	: 2	x 5	x 3	: 7	$\frac{5}{7}$

Assim, a série dêsses quatro operadores fornecem a solução ao nosso problema; isto é o que nós devemos <u>fazer</u> ao estado dois terços a fim de obter o estado cinco sétimos. Esta série de operações que nós temos de fazer pode ser considerada como comportando duas partes: a primeira pode ser uma multiplicação por três, seguida de uma divisão por dois e a segunda uma multiplicação por cinco e uma divisão por sete, Na notação fracionária habitual, uma multiplicação por três seguida de uma por dois se escreve: $\frac{3}{2}$ e se lê: três meios. A multiplicação por cinco seguida da divisão por sete se escreve $\frac{5}{7}$ e se lê: cinco sétimos. Assim, para obter a resposta ao nosso problema, é preciso "multiplicar" por três meios e por cinco sétimos, ou multiplicar cinco sétimos por três meios.

4.2. Análise do problema

Re-examinemos o problema resolvido. Tratava-se de partir d do estado dois terços e encontrar um operador fracionário que nos levasse ao estado de cinco sétimos. Êsse problema foi resolvido por um operador fracionário de uma multiplicação por quinze e de uma divisão por quatorze. Como esta solução do problema foi obtida a partir dos dados? Os dados são um estado original dois terços e o estado final cinco sétimos. Para obter a solução, devemos multiplicar o inverso do estado dois terços por cinco sétimos; O inverso do estado dois terços é três meios e a multiplicação disto por cinco sétimos nós dá a solução, a saber, quinze quatorze avos. Procurar o operador que troca um estado em outro estado é uma divisão. Nêste caso nós procuramos o operador fracionário que troca o estado dois terços no estado cinco sétimos. É isto o que habitualmente significa "a divisão de cinco sétimos por dois terços". Quando nós perguntamos: "Que fazem cinco sétimos divididos por dois terços?" o que nós queremos dizer é: "Que devemos fazer a dois terços em matéria de operação para obter cinco sétimos?". Nós vimos que o que devemos fazer a dois terços para ter cinco sétimos é aplicar o operador fracionário quinze quatorze avos. Salientaremos que isto é exatamente a regra: "inverta e multiplique". Para dividir cinco sétimos por dois terços, multiplicamos os cinco sétimos por três emios.

<u>Na maioria dos casos é a esta regra que se reduz o ensino</u>, nem mesmo se explica o que significa dividir uma fração por uma fração.

O que significa semelhante divisão, portanto, não é de todo evidente. Isto se torna um pouco mais claro quando se relembra que a divisão é o inverso da multiplicação. Se nós já estabelecemos uma multiplicação para frações, isto é, se podemos ter multiplicadores fracionários, dito de outra maneira, operadores fracionários que podemos aplicar a estados fracionários para obter outros estados fracionários, então, os inversos dêsses operadores fracionários serão os divisores fracionários. É isto o que é conhecido sob o nome de recíprocas das frações. Nós já vimos que dois terços é a inversa ou a recíproca de três meios. Evidentemente, três meios é a inversa ou a recíproca de dois terços. Por consequência, dividir cinco sétimos por dois terços é fazer a pergunta: por quanto devemos multiplicar dois terços para obter cinco sétimos? Quanto é preciso de dois terços para fazer cinco sétimos? Quantas vezes dois terços está contido em cinco sétimos? E veremos que está contido quinze quatorze avos de vez, isto é, um pouco mais de uma vez.

5. COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES

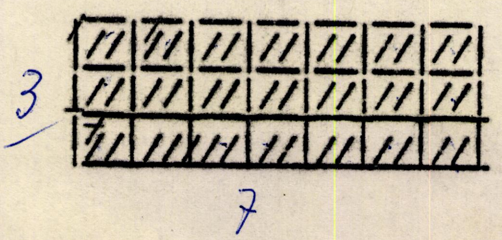
5.1. Comparação de frações

Consideremos, agora, o problema da desigualdade entre as frações. Quando dizemos que uma fração é menor do que uma outra, ou que uma fração é maior do que outra?

Podemos dizer que uma fração é maior do que outra se o resultado da aplicação de um dos operadores fracionários ao estado unidade é uma quantitade maior do que o resultado da aplicação de outro operador ao estado-unidade. Mas é isto, justamente, o que é preciso demonstrar. Como reconhecemos que uma quantidade é maior do que outra? Na prática isto pode ser resolvido escolhendo um estado-unidade compreendendo um número suficiente de objetos para que os estados fracionários consistam em um número definido dêsses objetos. Por exemplo, no caso de dois terços e de cinco sétimos, poderíamos tomar um grupo de vinte e uma crianças como estado-unidade. A fim de comparar dois terços do estado-unidade, só teríamos de operar por meio do operador dois terços sôbre o estado unidade de vinte e uma crianças, depois operar por meio do operador cinco sètimos sôbre o estado-unidade de vinte e uma crianças e ver qual estado dá mais crianças. Tomar dois terços de vinte e um nos dá como resultado um estado de quatorze crianças. Isto será dois terços do estado-unidade. Tomar cinco sétimos de um estado-unidade de vinte e uma crianças nos dará quinze crianças, o que é mais do que quatorze crianças. O estado quatorze crianças é dois terços do estado-unidade vinte e uma crianças. O estado quinze crianças é cinco sétimos do estado-unidade vinte e uma crianças.

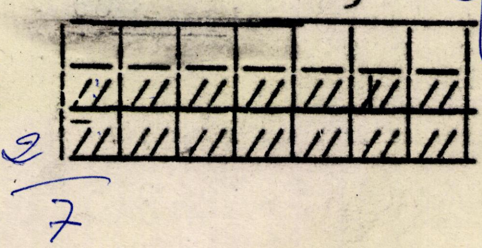
Então, dois terços valem menos do que cinco sétimos, seja, simbòlicamente $\frac{2}{3} < \frac{5}{7}$.

Estado 1

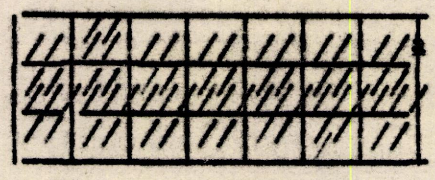


Oper. x $\frac{2}{3}$

Estado $\frac{2}{3}$

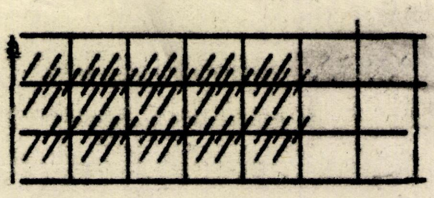


Estado 1



Oper. x $\frac{5}{7}$

Estado $\frac{5}{7}$



O problema da grandeza relativa pode sempre ser resolvido admitindo que se possa escolher estados-unidade apropriados, nos quais a as divisões possam se fazer de tal modo que tenhamos sempre um certo número de objetos separados representando estados fracionários. Mandar as crianças encontrarem estados-unidade onde um número dado de divisões possam ser executadas, consistirá um exercício interessante. Aparecerá de modo c claro que as multiplicações podem sempre ser feitas. Mas, a menos que se precise cortar os objetos em pedaços, as divisões só serão possíveis se h há ceros números especiais de objetos no conjunto que representa o estado unidade. Por exemplo, suponhamos que numa determinada série de multiplicações e de divisões, nós temos uma divisão por sete, uma divisão por cinco, uma divisão por dois, e diversas multiplicações. Se nós queremos criar uma situação na qual tudo isso possa ser materialmente executado, o menor número de objetos que deverá compreender o estado-unidade será setenta. Isto porque nós teríamos de separar nosso conjunto representativo do estado unidade, em sete. Em seguida, teríamos, ainda de separar cada um dêsses conjuntos em dois subconjuntos equivalentes, de modo que as três partições sucessivas equivalessem a uma partição em setenta subconjuntos equivalentes. A única operação que poderá recolocar as partições sucessivas primeiro por sete, depois por cinco, em seguida por dois será uma divisão única por setenta .

Então, a menos que se tenha setenta objetos ou um múltiplo de setenta objetos em nosso conjunto, representativo do estado-unidade, a ação de repartir em setenta subconjuntos equivalentes não se poderá executar materialmente.

Esta espécie de experiência prepara o caminho ao processo conhecido sob o nome de :"pesquisa do denominador comum". Suponhamos que temos duas frações, sejam três sétimos e dois quintos e por uma razão qualquer nós queremos compará-las. Precisamos um conjunto representativo do estado-unidade o qual tenha trinta e cinco objetos, porque devemos partir nosso conjunto em sete conjuntos equivalentes em um momento dado e em cinco conjuntos equivalentes em outro dado momento. Trinta e cinco é o menor número que pode ser dividido por sete ao mesmo tempo que por cinco. Ora, quantos objetos terá num conjunto que representa três sétimos de um conjunto de trinta e cinco?

É preciso lembrar aqui que se trata concretamente da equivalência de uma divisão por sete seguida de uma multiplicação por três de modo que no conjunto resultante haverá quinze objetos. Teríamos igualmente podido repartir nosso conjunto de trinta e cinco objetos em trinta e cinco subconjuntos equivalentes e, tomando quinze dêsses subconjuntos teríamos, ainda, chegado a quinze objetos.

Assim, quinze trinta quintos é um outro "nome" para o operador três sétimos porque a sucessão de uma multiplicação por três e de uma divisão por sete é equivalente à sucessão de uma multiplicação por quinze e de uma divisão por trinta e cinco.

Mas, o que é dois quintos de trinta e cinco? É uma divisão por cinco seguida de uma multiplicação por dois. A divisão por cinco nos dá sete e a multiplicação por dois nos dá quatorze. Um conjunto constituido por um objeto é, naturalmente, o resultado da divisão (partage) de nosso conjunto em trinta e cinco subconjuntos equivalentes, de modo que um conjunto de quatorze objetos representa o resultado de uma multiplicação do estado correspondente por quatorze. Assim, uma multiplicação por dois e uma divisão por cinco podem ser representadas por uma multiplicação por quatorze e uma divisão por trinta e cinco. Em lugar de comparar os três s ~~três~~ sétimos e os dois quintos, podemos,agora, comparar os quinze trinta quintos e os quatorze trinta quintos.

Os trinta quintos são todos os mesmos porque cada trinta quintos é representado por um conjunto compreendendo um objeto e, é fácil de ver qual é o conjunto que tem mais objetos. É claro que quinze objetos é mais que quatorze objetos de modo que o estado quinze trinta quintos é considerado como "maior" ou "superior" ao estado quatorze trinta quintos Vemos,então, que o processo que consiste em encontrar o denominador comum é na verdade a mesma coisa que encontrar mdos equivalentes de exprimir o os operadores fracionários para que êles se tornem mais fàcilmente comparáveis.

5.2. Resumo

Chegando a êsse ponto, os conceitos seguintes terão sidô estabelecidos:

1º A possibilidade de modificar as multiplicações e as divisões numa cadeia de operações de multiplicações e de divisões.

2º A possibilidade de substituir uma sucessão de multiplicações por uma só multiplicação, e a possibilidaded de substituir uma sucessão de divisões por uma só divisão.

3º Dos princípios a cima extraimos a regra da multiplicação de uma fração por uma fração.

4º A fração recíproca se obtém substituindo uma divisão por um número pela multiplicação por êsse mesmo número e, substituindo a multiplicação por um número pela divisão por êsse número.

Em linguagem formal isto significa que o inverso de uma fração se obtém fazendo de seu numerador o denominador e de seu denominador o numerador da fração inversa. Os inversos são também ~~aplicados~~ chamados recíprocos. O conhecimento do inverso nos permite encontrar uma regra para a divisão.

5º A divisão é o inverso da multiplicação. A regra da divisão é multiplicar pelo inverso. Esta é a regra:"multiplicar pela fração d divisor invertida".

6º A comparação de uma fração com outra se torna possível quando se transforma cada fração a comparar de tal modo que cada uma contenha em sua cadeia uma divisão pelo mesmo número. Aplicando êsses operadores fracionários transformados mas equivalentes ao estado-unidade, obtemos em cada caso um múltiplo do mesmo estado fracionário, e, podemos assim, comparar êsses estados.

Veremos que o terreno está agora pronto para o estudo da adição e da subtração de frações. Reconhecemos que foi preciso muito trabalho para permitir chegar a êsse estado. Compreende-se que tudo o que foi explicado antes deve ser abundantemente acompanhado de exercícios concretos, não sòmente de demonstrações magistrais no quadro negro, pelo professor, mas de experiências pessoais de parte de cada aluno.

Até cerca da idade de onze anos, a aprendizagem é muito mais eficaz nas crianças, se apresentada como resultado de suas próprias experiências. Nada, verdadeiramente, pode substituir a experiência se queremos que o estudo seja uma compreensão das coisas em profundidade e, não apenas, uma sucessão de respostas aprendidas de cor, maquinalmente. Sem dúvida, é possível ensinar às crianças, as regras necessárias para obter as respostas corretas a certas situações matemàticamente ininteligíveis por si; mas, nêsse caso, lhes será muito difícil aplicá-las a situações concretas. É preciso ensinar separadamente cada aplicação e, quando um problema novo se apresentar, uma criança a quem não se tiver ensinado dêste modo não será capaz de resolvê-lo. Ela dirá: "nós não fizemos esta espécie de problema até agora."

Em outras palavras, ela não compreendeu a natureza abstrata das estruturas matemáticas que supunha ter aprendido. Sòmente aprendeu um conjunto de regras relativas à maneira de mudar certos conjuntos de símbolos em determinados outros conjuntos de símbolos, assim como a maneira de aplicar essas acrobacias a certos exemplos particulares, habitualmente colocados nos exames passados e, simplesmente para chegar em boa cl classificação nêsses exames. Cada professor sabe bem que é possível "pegar" a maioria da classe sôbre qualquer parte da matemática tomando exemplos que não são habituais. Isto, de fato, deveria ser pràticamente impossível. Não são as crianças que fracassam, é a maneira de ensiná-las que é insuficiente. As crianças deveriam ser capazes de descobrir a estrutura matemática aplicável a cada exemplo se elas tivessem aprendido essa estrutura matemática num processo de abstração a partir de sua própria experiêência. Elas lá não chegarão simplesmente escutando explicações ou mesmo demonstrações concretas, dadas pelo professor.

....

três, depois uma multiplicação por dois. Em outras palavras, tendo obtido um estado de três meios, para voltar ao estado um, devemos fazer uma divisão por três que trará como resultado o estado um meio e, para voltar ao estado um, precisamos ainda fazer uma multiplicação por dois. Assim, a cadeia seguinte equivale a operar "1 para 1" ("1 pour 1"):

x 3	: 2	: 3	x 2	= x 1

e, não terá para resultado nenhuma troca de estado. Isto deverá ser inteiramente evidente para as crianças que reconheceram a reversibilidade da ordem das operações, e as propriedades inversas da multiplicação e da divisão dos números naturais. Em nosso exemplo, nós temos uma multiplicação por três numa parte da cadeia e na outra uma divisão por três. Se essas duas operações são postas lado a lado trocando a ordem das operações, nós teremos:

x 3	: 3	: 2	x 2

e as operações <u>combinadas</u> para multiplicar por três e dividir por três não tem o efeito sôbre o estado sôbre o qual nós operamos. Assim nossa cadeia equivale a:

x 1	: 2	x 2

Nós temos ainda uma divisão por dois e uma multiplicação por dois na cadeia restante. Juntas elas não terão o efeito sôbre o estado sôbre o qual nós operamos, de modo que nossa cadeia é, finalmente, equivalente a x 1| x 1|, isto é, a x1.

O operador <u>três meios</u> seguido do operador <u>dois terços</u> equivale ao operador <u>neutro</u>, a saber, a uma multiplicação por um ou $x\frac{1}{1}$.

Pode-se também, fazer isto na notação convencional. Podemos escrever, por exemplo, $x\frac{3}{2}$ como sendo o operador que indica que devemos fazer uma multiplicação por três seguida de uma divisão por dois. Será claro, neste momento, que um segundo operador fracionário que se sobrepõe ao primeiro é indicado por uma multiplicação. Assim, nós multiplicamos por $x\frac{2}{3}$ a fim de obter o operador neutro, que é o operador "multiplique por um". Isto dá:

$$x\frac{3}{2} \; x\frac{2}{3} = x\,1$$

Se nós quizermos considerar isto não como um jôgo: operador-operador-operador, mas como um jôgo: estado-operador-estado, é preciso considerarmos os "três meios" do princípio não como um operador, mas como um estado de coisas obtido operando sôbre o estado-unidade com o o operador $x\frac{3}{2}$. De modo que então, três meios será um estado de coisas; tomamos dois terços como o operador que aplicaremos ao estado três meios, e obteremos de novo o estado-unidade.

Sob uma forma clássica, uma vez que:

Estado	Oper.	Estado
1	x $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

isto é:

Estado	Oper.	Estado
1	x $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

e, uma vez que:

(não encontrei o [illegible])

Estado	Oper.	Estado
$\frac{3}{2}$	x $\frac{2}{3}$	1

isto é:

Estado	Oper.	Estado
$\frac{3}{2}$	x $\frac{2}{3}$	= 1

deveria ser claro que o que nós dissemos é que dois terços de três meios fazem um, isto é, que o estado-unidade é obtido operando com o operador dois terços sôbre o estado três meios. Paralelamente, se nós temos um estado de dois terços, o operador três meios aplicado a êste último tornará a dar o estado um. Aqui, todas as multiplicações sãoconsideradas como operando sôbre estados e dando outros estados.

3.5. Experiências concretas para compreender os inversos.

Insistimos: para a maioria dos alunos será importante executar (o equivalente material dessas) operações com objetos reais.Ésses objetos podemão ser a s próprias crianças. Por exemplo, o "estado um" poderá ser um grupo de seis crianças, isto será nosso estado-unidade. Se desejarmos criar o "estado três meios", podemos fazer de duas maneiras. Podemos multiplicar por três e dividir por dois, Neste caso teremos primeiro um estado de dezoito crianças, obtido a partir do estado de seis crianças, multiplicando por três, isto é, aplicando o operador "3 para 1" Podemos criar êste estado de dezoito crianças colocando três conjuntos de seis crianças em frente à classe. Podemos em seguida executar a divisão por dois dividindo o conjunto dos alunos que se encontram em frente à ela classe em dois conjuntos equivalentes e separando um dêsses conjuntos.Isto resulta num estado de nove crianças o que é evidentemente o estado de três meios aplicado ao estado-unidade. Podemos mesmo ver onde estão os três "meios", dois meios de num grupo representam o estado-unidade e um outro meio no resto do grupo de crianças composto de nove crianças. Assim, um grupo de nove crianças indicará o estado de três meios.

Tomemos, agora, o operador x $\frac{2}{3}$. Uma vez, ainda, podemos fazer primeiro a divisão e em seguida a multiplicação, ou vice-versa.Escolhemos fazer primeiro a divisão. Aplicando uma divisão três a um estado de nove crianças, obteremos um estado de três crianças. Haverá então,sòmente três crianças de pé diante da classe, o resto estará sentado. Aplicando a multiplicação por dois ao estado de três crianças, obteremos o estado seis crianças, que é precisamente o estado de nosso grupo-unidade.Assim, operando sôbre o estado três meios, ilustrado em nosso caso por um estado de nove crianças, com o operador dois terços, obtemos o estado de seis crianças que é aqui, por definição, o estado-unidade. Isto mostra qu operar com o operador x $\frac{2}{3}$ sôbre o estado de $\frac{3}{2}$, torna a dar o estado u um.

Do mesmo modo poderíamos tomar o estado de dois terços. Um estado dois terços teria sido obtido fazendo uma divisão por três e uma multiplicação por dois, ou vice-versa. Partindo de um estado-unidade de seis crianças, podemos fazer uma divisão por três, cujo resultado é um estado de duas crianças (isto é o estado de um terço se utilizamos esta dos fracionários). Depois fazemos uma multiplicação por dois, isto nos dá um estado de quatro crianças que é o estado fracionário de dois terços do estado-unidade de seis crianças. Temos, agora então, um estado de dois terços ilustrado pela presença de quatro crianças diante da classe. Podemos agora aplicar o operador $\times \frac{3}{2}$. Isto é, podemos multiplicar por três e dividir por dois ou dividir por dois e multiplicar por três. Façamos, neste caso a multiplicação primeiro. Temos um estado de quatro crianças, multiplicando por três obteremos um estado doze crianças, que é, evidentemente, um estado de duas unidades. Temos ainda de dividir por dois, o qu que a partir do estado doze crianças, produzirá um estado de seis crianças. Em outros têrmos, sôbre um estado de duas unidades, uma divisão por dois produzirá um estado de uma unidade. Assim, ainda uma vez, o operador $\times \frac{3}{2}$ aplicado ao estado $\frac{2}{3}$, dá, o estado unidade, um.

Será preciso, sem dúvida, fazer um grande número de exercícios semelhantes antes para que as crianças estejam inteiramente familiarizadas com a idéia do inverso. O inverso de um operador fracionário é o operador no qual a divisão é substituida por uma multiplicação e a multiplicação pela divisão correspondente. A maneira formal de idzer isto é que nós trocamos o numerador em denominador e o denominador em numerador. Nós reviramos a fração "em desordem" de cima para baixo. Será preferível não empregar expressões puramente formais antes que a compreensão em profundidade esteja bem estabelecida.

Dizemos muitas vezes aos alunos, desde o princípio, que os inversos, ou recíprocos, das frações se obtém revirando, simplesmente, a fração (em desordem), "de cima para baixo" ("sens-dessus-dessous"). Resulta pouca compreensão matemática, a reviravolta não terá nenhuma ligação particular com a operação em causa e será mal utilizada na maior parte dos casos.

Ainda uma vez, o inverso pode ser considerado como um processo "operador-operador-estado", ou como um processo "operador-estado". O operador dois terços é o operador inverso do operador três meios. Provavelemente, nesta fase será mais fácil considerar todas as frações como operadores; os estados correspondentes podem sempre ser obtidos fazendo operar os operadores sôbre o estado-unidade. O modo de manejar êste problema deve ser deixado a critério do professor. Alguns professores pensam qu que as crianças são mais capazes de considerar as frações como estados de coisas, outras podem ser mais levadas a considerar as frações como coisas que se faz para trocar os estados em outros estados. É claro que devemos levar as crianças a considerar as fraçoes sôb seus dois ângulos; mas por razões de técnica os professores podem preferir o emprego de uma ou de outra dessas interpretações.

....

Em 28/08/80