INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P. FRACTIONS Trad, A.B.K.

# 7. PROPORÇÕES E ESCALAS

(38-47

## 7.1. Aplicação de subconjuntos sôbre subconjuntos

Consideremos uma situação na qual se comparem duas quantidades diferentes. Pode ser, por exemplo, que tenha duas pessoas numa peça e três pessoas em uma outra. De que maneira podemos comparar o número de pessoas de uma peça com o número de pessoas da outra?

Para tornar a questão um pouco mais precisa demos um exemplo. Suponhamos que temos quatro pessoas e seis na outra. Se nêste exemplo compararmos as duas peças, obtemos a mesma relação que se as compararmos no primeiro exemplo? Isto depende do que nós comparamos. Se quisermos indicar quantas pessoas a mais há na segunda peça do que na primeira, diremos na primeira comparação que há uma pessoa a mais na segunda peça. No segundo caso diremos que ~~há duas pessoas a mais~~ na segunda peça há duas pessoas a mais do que na primeira. Segundo esta base de comparação as duas situações são diferentes. Mas, se dissermos:"Cada vez que há duas pessoas numa peça, há três na outra", esta explicação englobará as duas situações. No primeiro caso, para as duas pessoas que temos na primeira peça, temos, de fato, três pessoas na outra. Na segunda situação, há quatro pessoas numa peça e seis na outra. às duas primeiras pessoas de uma peça correspondem as três da outra peça que nós contaremos primeiro; Às duas seguintes da primeira peça corresponderão as três que contaremos a seguir na segunda peça.

De modo semelhante, poderiamos ter seis pessoas na primeira peça e nove na segunda. A relação será sempre a mesma se experimirmos esta relação dizendo:

"Cada vez que há duas pessoas na primeira peça, há três na outra".

Poderemos, por certo, expeimir a relação em sentido inverso e, dizer que cada vez que há três pessoas na segunda peça, há duas pe pessoas na primeira. Fizemos uma aplicação entre o conjunto de duas pessoas de uma peça e o conjunto de três pessoas na outra peça. Se isto é possível nós dizemos que a razão ou a proporção das pessoas numa peça com as de outra peça é <u>dois para três</u>.

7

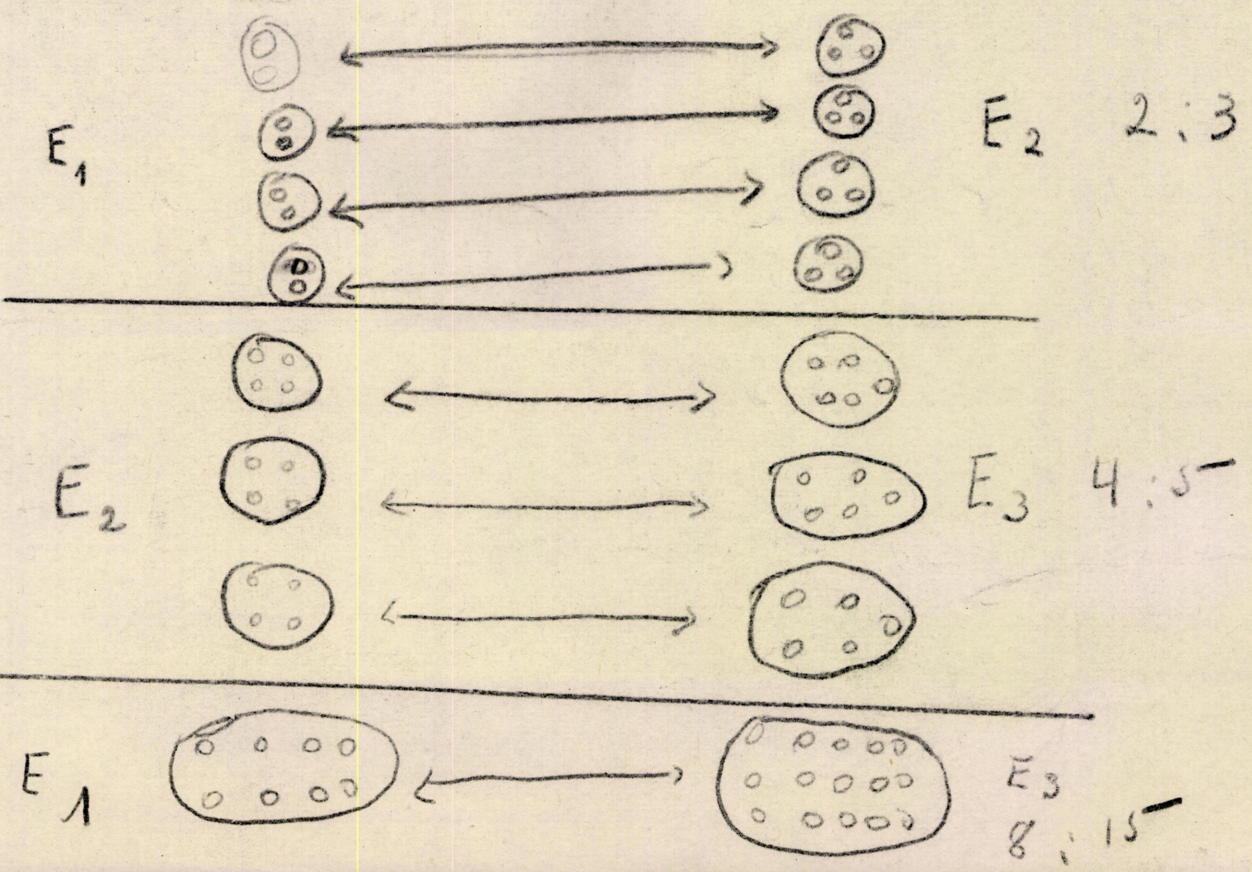
Podemos, por exemplo, realizar materialmente $E_1$ colocando oito objetos sôbre a mesa. Aparece, claramente , que $E_2$ deverá então, ter doze objetos, porque para cada vez que tem dois objetos no conjunto de oito, será preciso ter três objetos no conjunto dos doze. Isto está claro porque podemos dividir um conjunto de oito objetos em quatro subconjuntos distintos de dois objetos cada um, do mesmo modo que podemos dividir um conjunto de doze objetos em quatro subconjuntos distintos de três objetos cada um.

Assim, podemos estabelecer uma correspondência biunívoca entre os subconjuntos de dois elementos de $E_1$ e os subconjuntos de três elementos de $E_2$. O número de elementos de $E_1$ e o número de elementos de $E_2$ estão, então, na razão de dois para três.

Ora, se o número de elementos de $E_2$ está para o número dos elementos de $E_3$ como quatro está para cinco, todas as vezes que tem quatro elementos em $E_2$ deve ter cinco elementos em $E_3$. Mas, há três subconjuntos de quatro em $E_2$ , porque $E_2$ tem doze elementos. Então, deve haver três subconjuntos de cinco no $E_3$. Então, $E_3$ deve ter quinze elementos.

Assim, a razão entre o número de elementos de $E_1$ e o número de elementos de $E_3$ é como oito está para quinze.

Percebe-se que usamos a mesma regra que aquela obtida para multiplicar as frações. Isto não é espantoso porque já vimos que para chegar ao estado doze, partindo do estado quinze, devemos operar com o operador: quatro quintos e que a partir do estado doze para chegar ao estado oito, devemos a seguir operar com o operador dois terços; Em consequência, para ir do estado quinze ao estado oito devemos operar com o operador combinado que se obtém com quatro quintos seguidos de dois terços, o que, depois da regra da multiplicação das frações nós sabemos ser oito quinze avos. Assim, a razão de oito para quinze é obtida por meio do operador fracionário que devemos aplicar a quinze para chegarmos ao ao estado oito.



Êste é, de fato, um caso particular do parentesco entre as razões e as frações. Se temos uma situação: "A está para B"..." podemos chegar ao estado A a partir do estado B por meio do operador $\frac{A}{B}$.

Para dar um outro exemplo numérico: se o número de elementos nos dois conjuntos está na razão de três para quatro, isto é, se por exemplo, um conjunto $E_1$ tem quinze elementos e outro conjunto $E_2$ tem vinte elementos, podemos dizer então, que o número de elementos em $E_1$ está para o número de elementos em $E_2$ como três está para quatro, porque há cinco subconjuntos de três no conjunto de quinze e cinco subconjuntos de quatro no conjunto de vinte e, assim, podemos fazer corresponder, exatamente, os conjuntos de três elementos de um aos conjuntos de quatro elementos do outro. Escrevemos, em têrmos convencionais que os números es - tão na razão 3:4.

Mas, para ir de vinte a quinze, devemos operar com o operador fracionário três quartos. Se 15 está para 20 assim como ~~três~~ 3 está para 4, nós vamos de 20 a 15 por meio do operador três quartos.

Paralelamente nós passamos de quinze a vinte por meio do operador quatro terços que é o inverso do operador três quartos. Isto corresponde à razão do número de elementos em $E_2$ ao número de elementos em $E_1$, isto é, nós falamos, agora da razão de ~~três~~ quatro para três que é a mesma que a de vinte para quinze.

## 7.4. Percentagem

Se numa razão, a grandeza dos subconjuntos em um de nossos conjuntos é cem, nós obtemos o que chamamos uma <u>percentagem</u>. Quando dizemos que ganhamos cinco por cento queremos dizer que cinco francos são ganhos tôda vez que há cem francos. ~~Uma~~ lucro aplicação é feita entre os conjuntos de cinco contidos em nosso benefício e os conjuntos de cem contidos no capital que nós investimos. Assim, por exemplo, se colocamos quatrocentos francos e, se dizemos que o lucro é de cinco por cento, o que nós exprimimos é que o lucro está para o capital assim como cinco está para cem. A soma de dinheiro contida no conjunto de francos do lucro está para a soma de dinheiro contido no conjunto dos francos do capital assim como cinco está para cem: Então, porque os quatrocentos francos do conjunto dos francos do capital podem ser divididos em quatro subconjuntos de cem francos cada um, o lucro deve poder ser dividido em quatro subconjuntos de cinco francos cada um. O lucro então é de vinte francos. É isto o que queremos dizer quando dizemos que vinte francos fazem cinco por cento de quatrocentos francos.

Não vemos porque se faz uma montanha da percentagem, quando ela é apenas um caso particular das razões - que são, por sua vez, apenas um modo diferente de falar de frações. Se as propriedades das frações foram compreendidas, a percentagem deverá ser compreendidas de início e nenhum ensino suplementar deverá sernecessário, salvo a explicação da terminologia.

7.2. Frações e razões (rapports)

Será instrutivo ligar imediatamente êste conceito ao de operador fracionário. Tomemos para exemplo uma peça onde se encontrem quatro pessoas e uma peça onde estejam seis. Que espécie de cadeia de operadores nós precisamos para passar do número da peça de quatro pessoas ao número da peça de seis pessoas? Podemos, por exemplo, dividir por dois obtendo, partindo de um estado de quatro pessoas, um estado de duas pessoas, depois podemos multiplicar por três obtendo, partindo de um estado duas pessoas, um estado de seis pessoas. Podemos, então, passar de um estado quatro a um estado seis por meio de uma divisão por dois seguida de uma multiplicação por três. É êste o operador fracionário três meios cujo estado três pode ser obtido a partir do estado dois pelo operador fracionário três meios. Naturalmente o estado dois pode ser obtido partindo do estado três pelo operador inverso que, nós sabemos, é dois terços. Partindo do estado seis podemos começar pela divisãoppor três, obtendo assim, um estado dois, depois, fazer uma multiplicação por dois, depois, fazer uma multiplicação por dois e obter o estado quatro. Então, quatro é obtido partindo de seis, pela sucessão da operação de divisão por três e da multiplicação por dois. Isto é o operador fracionário dois terços, Para abreviar dizemos que dois é os dois terços de três, quatro os dois terços de seis, seis os dois terços de nove ou, em sentido inverso que três são os três meios de dois, seis, três meios de quatro e nove, três meios de seis.

Podemos estabelecer uma bijecção entre os dois conjuntos repartindo um conjunto em subconjuntos distintos de dois elementos cada um, e repartindo outro conjunto em subconjuntos distintos de três elementos cada um. Se a cada um dêsses subconjuntos de dois elementos num dos conjuntos corresponde um e sòmente um subconjunto de três elementos num outro conjunto e vice-versa, podemos, então, dizer que as propriedades dos números dos dois conjuntos estão como dois está para três, um em relação ao outro. Nêste caso, o conjunto que vamos dividir em subconjuntos de três elementos pode ser obtido partindo do conjunto que dividimos em subconjuntos de dois elementos, utilizando o equivalente concreto do operador fracionário três meios e, naturalmente, podemos fazer o inverso utilizando o equivalente concreto do operador fracionário dois terços. Assim, o número de elementos do primeiro conjunto está para o número de elementos do segundo conjunto como dois está para três. O número de elementos do segundo conjunto está para o número de elementos do primeiro conjunto como três está para dois. Em outros têrmos, as razões nada mais são do que uma outra maneira de falar de frações.

7.3. Combinações de razões

Vejamos como podemos combinar as razões. Consideremos três conjuntos $E_1$, $E_2$, $E_3$. Admitámos que o número de elementos em $E_1$ esteja para o número de elementos em $E_2$ como dois está para três, e o número de elementos em $E_2$ para o número de elementos em $E_3$ como quatro está para cinco. Como encontraremos a razão do número de elementos em $E_1$ para o número de elementos em $E_3$?

| Estado | Oper. | Estado | Oper. | Estado | Oper. | Estado | Oper. | Estado |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| □ | x 3 | □ | x 5 | □ | : 2 | □ | : 7 | □ |

ou, deixando de lado os estados em branco, constatamos que as cadeias de operadores:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x 3 | : 2 | x 5 | :7 e x 3 | x 5 | : 2 | : 7 |

são equivalentes.

Sabemos que na segunda das cadeias acima, a sucessão dos dois primeiros operadores pode ser substituida pelo operador "multiplique por quinze" e, a sucessão toda dos dois últimos operadores por "divida por quatorze"; por conseguinte, a cadeia de operação ~~pode~~ é equivalente ao operador fracionário:

$$\times \frac{15}{14} \text{ ; donde } \times \frac{3}{2} \text{ "multiplicado por" } \times \frac{5}{7} \text{ igual } \times \frac{15}{14}$$

ou, de um modo mais formal:

$$\left(\square \times \frac{3}{2}\right) \times \frac{5}{7} \equiv \square \times \frac{15}{14} \quad \text{onde } \square$$

indica nosso estado inicial nos dois casos. Isto fará aparecer a "regra" habitual da multiplicação de frações.

Se a maneira de proceder foi compreendida, não deverá haver dificuldade em escrever a sucessão dos operadores de diferentes modos Pode-se, de fato, discutir com as crianças sôbre outras maneiras possíveis de escrever uma sucessão de dois operadores. Afinal, uma fração é simplesmente indicada por uma sucessão de dois sinais; escrever $\times \frac{3}{2}$ é uma maneira de escrever o três e o dois em seguida, na qual o primeiro sinal indica sempre uma multiplicação e o segundo,uma divisão. Nós sabemos, por convenção que o sinal escrito acima da barra indica uma multiplicação, e o sinal escrito em baixo, uma divisão. É porque $\times \frac{2}{3}$ não indica a mesma sucessão de operações que $\times \frac{3}{2}$, porque $\times \frac{2}{3}$ indicará uma multiplicação por dois e uma divisão por três e, simbolizará o operador fracionário dois terços.

3.4. Inversos ou recíprocos das frações.

Será, então, possível procurar os inversos. Introduzindo os operadores fracionários como operadores combinados que equivalem a uma sucessão de multiplicações e divisões, ou de divisões e multiplicações, nós podemos agora procurar que outros operadores combinados ou fracionários do mesmo gênero nós teremos de utilizar para restabelecer o estado de coisas no qual estava nosso estado de origem antes de nós começarmos a operar. É procurar o operador inverso. Por exemplo, se tomamos o operador três meios isto é, se nós temos uma multiplicação por três seguida de uma divisão por dois, nós transformamos nosso estado-unidade em estado de três meios.Como poderemos retornar ao nosso estado-unidade? Não será preciso muito tempo para as crianças compreenderem que o que nós devemos fazer é uma multiplicação por dois e uma divisão por três, ou bem, primeiro uma divisão por

| | | |
|---|---|---|
| 100 F | FF<br>FFF | |
| 100 F | FFF<br>FF | Conjunto de F (francos) representando o lucro. |
| 100 F | FF<br>FFF | |
| 100 F | FF<br>FFF | |

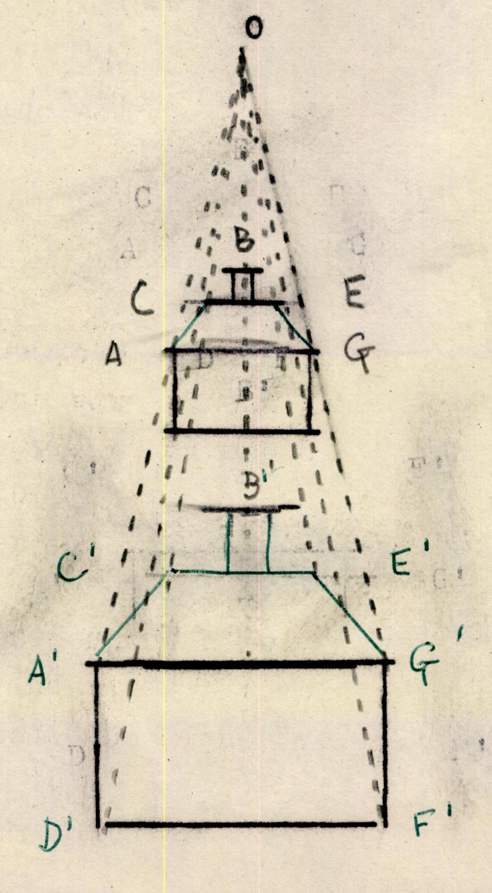
Da esquerda para a direita: 100 para 5.
Da direita para a esquerda: 5 para 100.
20 para 400 está como 5 para 100.

Eis o que significa que 20 é 5% de 400. E cinco por cento exprime a bijecção entre os conjuntos de cinco e os conjuntos de cem. Para cada cinco há um cem , e ~~cada~~ para cada vez um cento há um cinco. As crianças que tem à sua disposição o conceito de correspondência biunívoca não experimentam nenhuma dificuldade em fazer corresponder biunivicamente subconjuntos com outros subconjuntos e, em consequência, em manejar as razões, as proporções ou as percentagens, dêste modo. Isto não representa para elas nenhum quebra-cabeça matemático.

7.5. Desenhos de escals e de mapas

Um conjunto evidente de razões e proporções é o desenho de uma escala (de mapa, de planta,etc...). Por exemplo, poderíamos começar com a razão de 1 para dois. Poderemos desenhar uma casa, sôbre uma folha de papel, depois desenhar uma outra na qual cada parte da primeira seja simplesmente o dôbro do comprimento. Teremos uma casa maior, na qual cada janela, cada porta, cada chaminé, cada muro seria duas vezes maior do que a parte correspondente na outra casa.

CASA




OA' = 20A
OB'= 2 OB
OC' = 20C
OD' = 20D
OE' = 20E
OF' = 20F
OG' = 20G

Lá, ainda realizamos uma bijecção entre os pontos de uma casa e os pontos de outra. Isto é um pouco mais difícil de ver mas, um modo de fazê-lo poderá ser o seguinte: escolhemos um ponto O e desenhamos uma casa H. Tomemos um ponto qualquer da casa H e chamemô-lo A. Liguemos os pontos O e A por uma linha que prolongamos na mesma direção até um ponto A' de tal modo que AO tenha o mesmo comprimento que AA'. A' será o ponto correspondente ao ponto A. Escolhemos agora um outro ponto na primeira casa; podemos escolher em qualquer lugar, coloquemô-lo sôbre a chaminé. Chamemos o ponto B. Liguemos OB e prolonguemos a linha OB até B' de tal modo que o comprimento de OB seja o mesmo que o comprimento de BB'. O ponto B' será o ponto da chaminé na casa grande correspondente ao ponto que nós tinhamos marcado na chaminé da casa pequena. Se fizermos isto com um certo número de pontos, a forma da casa grande será logo visível. Está claro que uma bijecção foi estabelecida entre os pontos de uma das casas e os pontos da outra e cada distância no interior da casa pequena terá sua réplica numa distância dupla no interior da casa grnade.

Esta será a ocasião de discutir uma propriedade importante dos conjuntos infinitos. Há um número infinito de pontos em cada casa, entretanto há uma correspondência têrmo a têrmo entre êles e, no entanto, uma das casas é visivelemente maior do que a outra. Parece, então que há exatamente tantos pontos na casa grande quantos há na casa pequena, porque o conjunto dos pontos da casa pequena está em correspondência biunívoca com o conjunto dos pontos da grande.

Para tornar o paradoxo mais evidente ainda, podemos pedir às crianças para desenharem uma casa pequena no interior da grande. Isto lhes mostrará que se pode ter uma correspondência biunívoca entre um subconjunto e um conjunto. Em outros têrmos, o subconjunto aqui, é equivalente ao conjunto do qual êle é um subconjunto. Esta é uma propriedade interessante dos conjuntos infinitos que já pode ser vista a propósito dos números naturais. Por exemplo, há uma correspondência biunívoca evidente entre todos os números naturais e todos os números naturais pares. Podemos crer que, por alto, há duas vezes mais números naturais do que números naturais pares. Mas por: "exatamente tantos", nos significa, habitualmente que estabelecemos uma correspondência biunívoca completa entre os elelmentos dos dois conjuntos. Quando fazemos isto dizemos que tem "exatamente tantos" elementos num conjunto quantos no outro. Devemos, então, dizer que há "exatamente tantos" números pares quantos números, porque para cada número podemos fazer corresponder seu duplo. A um corresponde o número par: dois; a dois corresponde quatro; a três corresponde seis; a quatro corresponde oito; e, assim por diante. Há, então uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os números naturais e o conjunto dos números pares e, por conseguinte há "exatamente "tantos" elementos em um subconjunto dos números naturais quantos há no conjunto total dos números naturais. Isto, evidentemente, será impossível se os elementos fossem em número finito. Não pode haver correspondência biunívoca entre um conjunto de sete objetos e um subconjunto de cinco objetos dêsse conjunto, porque restarão sempre dois no conjunto de sete aos q quais nenhum elemento corresponderá no subconjunto de cinco| Esta proprie priedade dos conjuntos e dos subconjuntos, a saber, a relação que parece evidente entre a parte e o todo, não é mais verdade quando falamos de <u>conjunto infinito</u>.

Contràriamente a uma crença espalhada, as crianças encontram a tôda hora conjuntos infinitos; o número de momentos de um dia, o número de pontos de uma linha, o número das diferentes temperaturas po possíveis, etc... Todos êstes são conjuntos infinitos. Não há um número finito de temperatura, porque entre duas temperaturas quaisquer, há sempre uma outra temperatura. Entre dois momentos quaisquer, há sempre um outro momento e, entre dois pontos, há sempre um outro. Parece que as propiredades dos conjuntos infinitos deveriam fazer parte da aprendizagem matemática de nossos alunos. (Um ensaio feito no Club de Matemática - alunos de 4º e 3º - da Escola Decroly confirma plenamente o ponto de vista do autor).

Mas, retôrnemos ao nosso desenho de escala. Nosso exercício precedente era um exercício de ampliação. Fizemos de uma casa pequena, uma casa duas vezes mais alta, duas vezes mais comprida, etc..Podemos, seguramente, tornar as razoes relações mais difíceis. Podemos aumentar nossa casa na razão de dois para três. Tudo o que temos de fazer será fazer a linha AA' sòmente metade mais curta do que a linha OA, e a linha BB' metade mais curta do que a linha OB. Nêsse caso, teremos aumentado a casa na razão de dois para três. A casa pequena terá dois terços da altura da casa grande e a casa grande terá uma altura igual aos $\frac{3}{2}$ da altura da casa pequena.

A dois centímetros na casa pequena corresponderão, cada vez, três centímetros na grnade, isto porque o comprimento da linha OA está, agora, para o comprimento da linha OA' como dois está para três Assim, aumentamos a casa na razão de dois para três. Podíamos, certamente, tornar a casa menor. Em lugar de continuar a linha OA até OA', podíamos escolher um ponto entre O e A que seria A'. Podíamos, por exemplo, e escolher A' a meio caminho entre O e A. Está claro que se fizermos o mesmo para cada segmento OA, OB, OC, etc..obteremos uma casa,não mais duas vezes maior do que nossa casa pequena, mas duas vezes menor, ou a metade dela. Do mesmo modo podemos tornar a casa muito menor, ou muito maior,ou novamente, a metade, um terço e, assim, por diante. Todas as espécies de figuras: árvores, flores, rostos, pessoas, podem ser desenhadas e aumentadas ou diminuidas ~~para~~ desta maneira para as crianças fazerem exercícios sôbre as proporções.

7.6. Composição de aumentos

Podemos, também, fazer as crianças fazerem exercícios sucessivos de aumentos ou de diminuições, o que põe de novo em prática a idéia da multiplicação de frações. Podemos tomar a casa pequena e aumentá-la, deixando-a três meios de seu tamanho; podemos a seguir tomar a figura obtida e aumentar para quatro terços de seu tamanho. Quantas vezes aumentamos a casa primitiva? Isto é, qual é a razão entre os comprimento que encontramos na primeira casa, e os comprimentos correspondentes na terceira? Esta é ainda uma maneira de apresentar o problema da correspondência biunívoca dos subconjuntos de $E_1$ com os subconjuntos de $E_2$ seguida de uma outra correspondência biunívoca dos subconjuntos de $E_2$ com os subconjuntos de $E_3$. Quando queremos calcular a razão entre o número de elementos de $E_1$ e o número de elementos de $E_3$, nós unimos as duas aplicações em uma só.

PELA prática da divisão de frações dando a razão do primeiro têrmo (bâtiment - construção) para o segundo assim como do primeiro ao terceiro se encontra a razão necessária entre o segundo e o terceiro. Isto corresponde na divisão de duas frações as razões neste problema.

Após um grande número de exercícios dêste gênero, pode-se começar a desenhar as escalas propriamente ditas. Pode-se, por exemplo, discutir sôbre a maneira de reduzir o pátio de recreio a um tamanho tão bastante pequeno que possa ser desenhado numa folha de papel. Algum poderá sugerir de usar dez centímetros por metro. Pode-se, então, medir e pátio e achar que êle tem 22 metros de comprimento. 22 vezes dez centímetros será, talvez, muito grande para caber no papel, então, alguem sugere uma outra escala, isto é, uma razão , de um centímetro para dez metros, por exemplo. Podemos, então, utilizar mapas e examinar escalas, e estudar diferentes mapas onde as escalas não sejam as mesmas. Em algumas plantas de cidades, o centro da cidade está desenhado numa escala maior do que os subúrbios a fim de dar uma visão melhor de todas as ruas principais, e talvez, mesmo das ruas pequenas. As crianças começarão, então, a compreender o que significa uma escala como: um por cinquenta mil, ou: um por mil (um cinquenta milésimos ou um milésimo). A cada centímetro no papel correspondem cinquenta mil ou mil metros na cidade. É preciso fazer um grande número de experiências sôbre escalas antes de chegar a uma profunda compreensão do que elas significam. Talvez seja bom fazer as crianças copiarem um mapa trocando a escala. Suponhamos que um mapa esteja desenhado na escala de um cinquenta milésimos, e que as crianças queiram obter um mapa maior. Elas querem aumentar o mapa na razão de um para cinco. Isto significa que elas deverão substituir cada comprimento que está no mapa por um comprimento cinco vezes maior na folha de papel. Pode-se, então, pedir que digam qual é a escala de seu mapa em relação ao mundo real. Para cada centímetro que está no papel, quantos metros há na verdadeira rua? Isto é, ainda, uma multiplicação de razões, ou multiplicação de frações.

........................

Revisado
Westphal
29/05/82