Mathematics for Elementary School Teachers

Capítulo 6:

D I V I S Ã O

1. Como a divisão pode ser explicada:

a) Pelo uso de conjuntos?

b) Usando-se as idéias da multiplicação?

2. O que significa uma expressão tal como: "12÷3"?

Já deu a seus alunos exercícios de divisão e aconselhou-os a achar a prova pela multiplicação? Talvez um dos exercícios fôsse: 414 | 18

Se o aluno obteve a resposta 23, êle deveria ter achado a prova pela multiplicação de 23 por 18. Tinha a esperança de obter 414, se sua resposta no exercício de divisão estivesse / correta.

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times\ 18 \\ \hline 184 \\ 230 \\ \hline 414 \end{array}$$

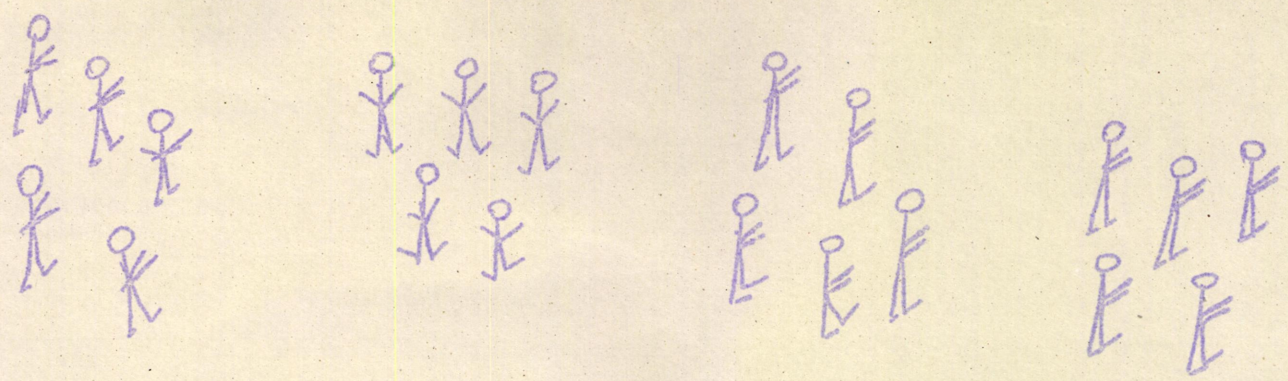
Evidentemente, a divisão tem alguma relação com a multiplicação. Qual é essa relação? Quais são as consequências / dessa relação e como deveriam ser apresentadas às crianças?

A relação da divisão com a multiplicação está no próprio significado da divisão. Ensinamos às crianças que "oito dividido por dois é igual a quatro", mas também necessitamos ensiná-los porque. Se uma criança diz:"oito dividido por dois é igual a seis", devemos estar aptos para mostrar a ela porque a afirmativa/ está errada. Para isso, necessitamos ir a fundo no significado da dúvida.

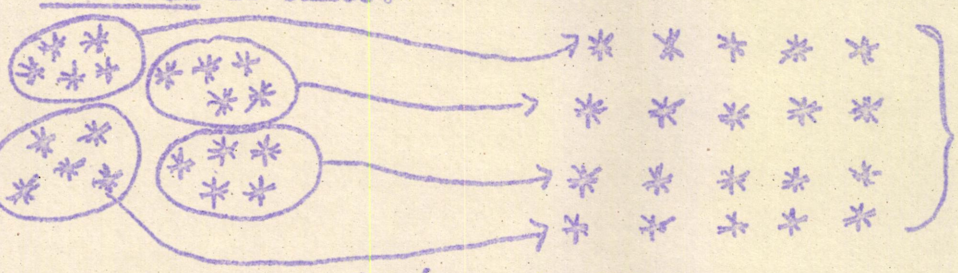
- DIVISÃO:

As crianças usualmente tem pouca dificuldade com os problemas, tais como:

Se 20 meninos jogam basquete (5 meninos em cada time), quantos times podem ser formados. Como está indicado na figura abaixo, não é necessário o conhecimento de operações matemáticas para se separar os 20 meninos em times de 5 cada um.



Esta separação pode também ser alcançada sem a presença dos meninos. Uma estrêla (✧) pode representar cada menino. Desejamos formar grupos de 5 meninos, assim, colocamos as estrêlas em fileiras de cinco.



O número de fileiras que pudermos dispor, será o número de times.

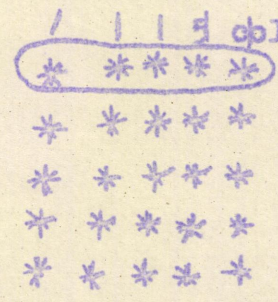
Na linguagem dos conjuntos, êste problema pode ser expresso da seguinte forma:

Em quantos conjuntos disjuntos de 5 elementos cada, pode o conjunto de 20 elementos ser separado?

Ou usando-se a linguagem do arranjo*, êste problema pode ser expresso assim:

Se um arranjo tem 20 elementos e cada fileira tem 5 elementos, quantas fileiras há?

Mas num arranjo, o número de elementos enfileirados é o mesmo que o número de colunas. Assim, podemos novamente reformular o problema acima:



Se um arranjo tem 20 elementos e se o arranjo tem 5 colunas, quantas fileiras dá?

Tôdas as abordagens aos problemas acima, são equivalentes. O resultado numérico é sempre 4. Pode-se tomar qualquer das abordagens acima como um modo no qual o número 4 é obtido dos números 20 e 5. Para o par de números 20 e 5, a divisão designa o número 4. Dizemos que 20 dividido por 5 é 4. Em símbolos escrevemos: $20 \div 5 = 4$.

Usando-se arranjos, poderemos definir o quociente de um par de números inteiros da seguinte maneira:

Se um arranjo com b elementos (onde $b \neq 0$) tem a colunas, então o número de fileiras é chamado "$b \div a$". Chamamos a isso o quociente de b e a. A divisão indica o quociente "$b \div a$" a par

*

de números inteiros b e a.

Problemas algo diferentes dos acima citados, também entram no padrão dos arranjos e são portanto uma aplicação da divisão. Por exemplo:

Se 20 moedas são distribuídas entre 4 meninos, quantas moedas cada menino recebe?

Se distribuírmos uma moeda de cada vez para cada menino, o resultado será o mesmo do que se colocarmos as moedas em um arranjo com uma coluna de moedas destinada a cada menino. Quantas moedas haverá em cada fileira?

Nêste problema nos é dado o número de colunas e procuramos o número de elementos numa coluna. Mas o número de elementos numa coluna é o mesmo que o número de fileiras no arranjo. Em outras palavras, sabemos

(1) o número de elementos num arranjo

(2) o número de colunas

procuramos

(3) o número de fileiras

Se nos fôr dado o número de elementos no arranjo, então nos poderá ser dado o número de colunas e procuramos o número de fileiras, ou, equivalentemente, poderá nos ser dado o número de fileiras e procuramos o número de colunas. Ambos os casos podem ser considerados como problemas de divisão.

- Conjunto de Exercícios 1:

1. Desenhe arranjos que preencham estas condições:

a. 12 elementos	c. 10 elementos
2 fileiras	5 fileiras
b. 16 elementos	d. 6 elementos
4 fileiras	1 fileira

2. Quantas colunas, cada conjunto no Exercício 1, tem?

3. Escreva duas sentenças de divisão para cada um dos arranjos:

```
a. x x x                 c. o  o
   x x x  15÷5=3            o  o
   x x x  15÷3=5            o  o
   x x x                    o  o
   x x x                    o  o
                            o  o
                            o  o
                            o  o

b. ??????                d. ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷ ÷
   ??????                   ÷
   ??????                   ÷
   ??????                   ÷
   ??????
```

Até aqui, ainda não mencionamos multiplicação. No entretanto, a divisão é commumente chamada de "inverso" da multiplicação. Porque?

Recordam como os arranjos são usados para explicar/ a multiplicação? O produto de 3 e 5, por exemplo, é o número de elementos num arranjo com 3 fileiras e 5 colunas.

```
                5 colunas
3 fileiras {  *  *  *  *  *
              *  *  *  *  *
              *  *  *  *  *
```

Portanto, o arranjo tem 3 x 5 elementos.

Nos nossos exemplos de divisão, até aqui apresentados, nos foi dado o número de elementos num arranjo e o número de fileiras (ou colunas). Assim, com efeito, nos foi dado um produto/ e um dos dois fatôres dêste produto.

Assim, num problema de divisão, em vez de perguntarmos "Qual o número de fileiras de um arranjo com 5 colunas e 20 elementos"? poderiamos perguntar "5 multiplicado por qual número dará 20?"

Em outras palavras, para dividir 20 por 5, precisamos completar a sentença 5 x $\square$ =20 ou $\square$ x 5=20. A sentença 5x$\square$ =20 tem o mesmo significado que a sentença 20÷5= $\square$

Os números que são multiplicados para formar um produto são chamados <u>fatôres</u> (dêste produto). Assim, o problema de se completar a sentença 5x$\square$ =20 pode ser considerado como " achar o fator que falta". Dêste modo, a divisão tem por objetivo achar o fator ausente. Enquanto que na multiplicação procuramos um produto de dois fatôres dados, na divisão procuramos um dos fatôres de um produto dado. Por esta razão é a divisão frequentemente chamada de multiplicação ao inverso.

Abordar a divisão através da multiplicação, torna-se de crescente importância nos anos mais adiantados, quando os alunos necessitam trabalhar com números fracionários e números negativos. Assim que os alunos se tornam mais adiantados, deveriam ser levados a compreender que $20 \div 5$ é o número que, quando multiplicado por 5 dá 20. Claro que a interpretação da divisão em têrmos de conjuntos e arranjos é ainda assim de grande utilidade. Podemos formular formalmente a abordagem do fator-ausente do seguinte modo:

A divisão provê ao par de números inteiros <u>a</u> e <u>b</u> o fator que falta, na sentença $b \times \square = a$, uma vez que haja exatamente um número inteiro que se ajuste à sentença.

O fator ausente é chamado "$a \div b$". É também chamado de <u>quociente</u> de <u>a</u> e <u>b</u>.

O aluno que conhece a divisão, através do método do fator ausente, não necessita decorar "os fatos da divisão." Por exemplo: $32 \div 4 = \square$, uma criança poderá pensar: $32 = \square \times 4$ ou
$32 = 4 \times \square$ e completar a sentença da maneira como conhece os fatos da multiplicação. Isso a princípio envolverá experimentos e êrros.

Um problema fortemente relacionado com divisão aparece em situações semelhantes a aquela em que 20 meninos jogam em times de 5. E se 23 meninos desejam jogar basquete? Pode-se dividir 23 por 5? Se pudermos, deveremos achar o resultado que complete

$$5 \times \square = 23$$

Mas não há número inteiro que possa completar esta sentença, corretamente, então não há número-inteiro significativo para $23 \div 5$. Quando se trabalha com números inteiros, diremos que 23 não é divisível por 5.

Nas séries mais adiantadas, as crianças aprendem que números fracionários podem ser usados para completar corretamente sentenças como $5 \times \square = 23$. Mas o problema concreto permanece: Como se pode decidir, matemàticamente, quatos times de 5 podem ser formados dos 23 meninos? A resposta pode ser obtida pela tentativa de se completar um arranjo:

```
o o o o o
o o o o o
o o o o o    4 times
o o o o o
o o o        Sobram 3
```

Isto mostra que, 4 times poderão ser formados mas haverá 3 jogadores "sobrando".

Outra abordagem é a seguinte:

Para os números inteiros 23 e 5, determinamos números que completem a sentença $23=(5\times\square)+\triangle$ de tal modo que o número para o $\triangle$ seja o menor possível (neste caso menor que 5). Êsses numeros serão 4 e 3, uma vez que $23=(5\times 4)+3$.

Uma vez mais, vemos que 4 times de 5 podem ser formados, tendo-se 3 meninos sobrando.

Em geral, se nos apresenta um conjunto de b elementos e se desejarmos formar subconjuntos disjuntos de a elementos cada, poderemos completar a sentença $b=(a\times\square)\times\triangle$, onde o número para $\triangle$ (chamado resto) é menor do que a.

Problemas de divisão com resto são apresentados no capítulo 9 "Divisão de Algarítimos".

- Conjunto de Exercícios 2:

1. Escrever duas sentenças de divisão relacionadas/ com estas de multiplicação:

a. $6\times 7=42$	$6=42\div 7$	$7=42\div 6$
b. $3\times 1=3$	....	....
c. $9\times 10=90$	....	....
d. $10\times 13=130$	....	....
e. $4\times 8=32$	....	....

2. Quais destas sentenças pode ser completada por um fator número-inteiro que falta?

a. $6\times\square=30$	f. $3\times\square=0$
b. $6\times\square=35$	g. $6\times\square=64$
c. $\square\times 9=99$	h. $\square\times 12=13$
d. $0\times\square=10$	i. $\square\times 15=0$
e. $2\times\square=2$	j. $4\times\square=152$

3. Para cada sentença de divisão escreva uma sentença de multiplicação relacionada, depois complete tôdas as sentenças

a. $8\div 2=\boxed{4}$	$8=\boxed{4}\times 2$ (ou $8=2\times\boxed{4}$)
b. $6\div 6=\square$	....
c. $12\div 1=\square$	....
d. $0\div 8=\square$	....
e. $55\div 11=\square$	....

4. Quais os números inteiros que completam esta sentença? $0\times\square=0$

5. Complete estas sentenças com números inteiros. Em cada caso, use o menor número inteiro possível para o $\triangle$. Em cada sentença o número usado em $\triangle$ deverá ser menor que o fator dado.

a. 62 = (7 x $\boxed{8}$) + △6
b. 6 = (4 x $\boxed{}$) + △
c. 5 = (7 x $\boxed{}$) + △
d. 55 = (11X $\boxed{}$) + △
e. 57 = (7 x $\boxed{}$) + △

PROPRIEDADES DA DIVISÃO

Nos novos programas de matemática, as crianças não só aprendem o significado da adição e multiplicação mas, também, as propriedades dessas operações matemáticas. Duas propriedades importantes de adição e de multiplicação são a comutativa e a associativa.

Propriedades Associativa e Comutativa da Multiçlicação e Adição:

OPERAÇÃO	PROPRIEDADE ASSOCIATIVA	PROPRIEDADE COMUTATIVA
Multiplicação	Para todos os números inteiros <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u>, (axb) x c=a x(bxc) Exemplo: (3x6) x 4=3 X(6x4)	Para todos os números inteiros <u>a</u> e <u>b</u>, a x b = b x a Exemplo: 12 x 7 = 7 x 12
Adição	Para todos os números inteiros <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u>, (a+ b) +c = a+ (b+c) Exemplo: (3 + 6) + 4=3 +(6+4)	Para todos os números inteiros <u>a</u> e <u>b</u> a + b = b + a Exemplo: 12 + 7 = 7 + 12

Tem a divisão também propriedades? Consideramos os dois exemplos:

1. É a divisão comutativa? Por exemplo:12÷4=4÷12?

Claro que 12÷4=3, porque 3 completa a sentença / "12= $\boxed{}$ x4". Mas, "4÷12" não designa para 3; de fato, não designa nenhum número inteiro, porque nenhum número inteiro preenche a sentença 12 x $\boxed{}$ =4. Então 12÷4 ≠ 4÷12 (Usando-se números racionais, acharemos que 12÷4=3 e 4÷12=$\frac{1}{3}$; e, no entretanto, aqui também, 4÷12 ≠ 12÷4).

Esta excepção (e há muitas outras) é suficiente para nos mostrar que a <u>divisão não é comutativa</u>. (Para que a divisão fôsse comutativa, seria necessário que a÷b = b÷a para todos os números inteiros a e b).

2. É a divisão associativa?

Por exemplo, é $16 \div (8 \div 2) = (16 \div 8) \div 2$?

$$16 \div (8 \div 2) = 16 \div 4 = 4$$

Mas

$$(16 \div 8) \div 2 = 2 \div 2 = 1$$

Portanto, $16 \div (8 \div 2) \neq (16 \div 8) \div 2$, mostrando que a divisão não é associativa (Para que a divisão fôsse associativa seria necessário que $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$, para todos os números inteiros a, b e c).

Note-se, entretanto, que há casos especiais que poderão confundir as crianças. Por exemplo: é $(16 \div 8) \div 1$ igual a $16 \div (8 \div 1)$? Sim. Uma criança poderá dizer que "A divisão às vêzes é associativa". Entretanto, só podemos aplicar os têrmos associatividade e comutatividade sòmente quando essas propriedades abrangem todos os casos. Uma única excepção é suficiente para mostrar que uma operação não é comutativa (ou associativa), mas exemplos específicos nunca podem demonstrar que uma operação é comutativa (ou associativa).

Chegamos, para a divisão, à mesma conclusão chegada para a subtração: nenhuma delas é comutativa ou associativa.

- Conjunto de Exercícios 3:

1. Coloque "=" ou "≠" onde necessário, em cada círculo:

a. $6 \div 2 \bigcirc 2 \div 6$
b. $(6 \div 2) \div 1 \bigcirc 6 \div (2 \div 1)$
c. $(16 \div 4) \div 2 \bigcirc 16 \div (4 \div 2)$
d. $(12 \div 6) \times 2 \bigcirc 12 \div (6 \times 2)$
e. $12 \times (6 \div 2) \bigcirc (12 \times 6) \div 2$

2. Coloque parêntesis para que as sentenças se tornem corretas:

a. $8 \div 4 \times 2 = 1$
b. $8 \div 4 \div 2 = 4$
c. $12 \div 3 \div 1 = 3$
d. $12 \div 3 - 1 = 3$
e. $12 \div 3 \times 2 = 2$