ZERO E UM EM DIVISÃO

Já notamos que os números 0 e 1 desempenham função especial em multiplicação.

PROPRIEDADE DO 1 EM MULTIPLICAÇÃO	PROPRIEDADE DO 0 EM MULTIPLICAÇÃO
Para cada número inteiro $\underline{a}$ $\underline{a} \times 1 = \underline{a}$ e $1 \times \underline{a} = \underline{a}$ Ex. $5 \times 1 = 5$ $1 \times 16 = 16$	Para cada número inteiro $\underline{a}$ $\underline{a} \times 0 = 0$ e $0 \times \underline{a} = 0$ Ex. $5 \times 0 = 0$ $0 \times 16 = 0$

Estas propriedades especiais conduzem a alguns fatos interessantes sôbre o 0 e 1 em divisão. Êles provavelmente serão melhor comunicados às crianças através de exemplos e exercícios.

UM EM DIVISÃO

A propriedade do elemento neutro em multiplicação conduz á sentenças tais como $5 \times 1 = 5$, $1 \times 16 = 16$, $1 \times 2 = 2$, $65 \times 1 = 65$, etc. De cada uma destas sentenças em multiplicação, podem ser derivadas duas sentenças em divisão.

$5 \times 1 = 5$	conduz à	$5 : 5 = 1$	e	$5 : 1 = 5$
$1 \times 16 = 16$	" "	$16 : 16 = 1$	e	$16 : 1 = 16$
$1 \times 2 = 2$	" "	$2 : 2 = 1$	e	$2 : 1 = 2$
$65 \times 1 = 65$	" "	$65 : 65 = 1$	e	$65 : 1 = 65$

Êstes resultados sugerem duas generalizações:

1.0 fato que $5:5 = 1$, $16 : 16 = 1$, etc., sugerem que "qualquer número inteiro dividido por si mesmo resulta em 1.

Realmente, veremos no capítulo seguinte que há uma excessão Não temo " $0 : 0$. De fato veremos que a expressão " $0 : 0$" e qualquer expressão " $a : 0$," é sem significação.

2.0 fato de que $5 : 1 = 5$, $16 : 1 = 16$, etc., sugere que "qualquer número inteiro dividido po 1 resulta no número inteiro dado."

Estas generalizações governam a função de 1 em divisão. Podem ser derivadas da propriedade do elemento neutro em multiplicação.

Para qualquer número inteiro a,
$a \times 1 = a$

→ Para qualquer número inteiro a, exceto 0,
$a : a = 1$

→ Para qualquer número inteiro a,
$a : 1 = a$

ZERO EM DIVISÃO

O número 0 pode aparecer em exercícios de divisão em 3 modos:

1º 0 dividido por algum outro número

2º Um número qualquer dividido po 0

3º 0 dividido por 0

Investigaremos estas três possibilidades, baseados sempre nas propriedades do 0 em multiplicação.

Para cada número inteiro a $a \times 0 = 0$ e $0 \times a = 0$	Se nem a nem b forem 0, então $a \times b$ não iguala 0

(1) Zero dividido por um número qualquer

O problema aqui é decidir que número, algum é designado por expressões como: "0:4", "0:12", "0:1", "0:75".

No início dêste capítulo vimos que número é designado por uma expressão tal como 20:5. Para isso, nos baseamos no método do fator ausente em divisão. Assim 20:5 é o número, (há somente um tal número) que, quando multiplicado por 5 dá 20.

$$5 \times \square = 20$$

Uma vez que $5 \times 4 = 20$, então $20 : 5 = 4$

(Notar que 5 multiplicado por qualquer outro número que não 4, não terá 20 como produto).

Do mesmo modo, $0 : 4$ é o número (há sòmente um tal número) que multiplicado por 4, dá 0.

$$4 \times \square = 0$$

Uma vez que $4 \times 0 = 0$ encontramos que $0 : 4 = 0$

(Notar que 4 multiplicado por qualquer outro número que não zero, não terá zero como produto)

Semelhantemente completando

$$12 \times \square = 0, \quad 1 \times \square = 0 \quad 25 \times \square = 0$$

descobrimos que

$$0 : 12 = 0, \quad 0 : 1 = 0 \quad 0 : 25 = 0$$

(Notar que evitamos o:o; êste caso especial será tratado mais tarde)

Êstes exemplos sugerem que "0 dividido por qualquer número inteiro (exceto 0) resulta 0." Mais formalmente exposto:

Para qualquer número inteiro a, se $a \neq 0$, então $0 : a = 0$.

Esta generalizaçaose origina no fato que há um, e sòmente um fator faltando em qualquer sentença da forma $a \times \square = 0$ (onde $a \neq 0$). O fator que falta é o próprio número 0.

(2). Um número qualquer diferente de 0 divido por 0

O problema aqui é decidir que números são designados por expressões tais como " 4:0", "8:o", "1: 0", "24 : 0 "

Novamente usamos a definição em divisão, sôbre o fator ausente para investigar o problema. Se 8 : 0 der um resultado, êste deve ser um número que quando multiplicado por 0 resulte 8.

$$0 \times \square = 8$$

Mas nenhum número inteiro pode tornar estas sentenças verdadeiras porque 0 vêzes qualquer número inteiro é 0. Assim " 8 : 0" é sem significado.

Analizando 4 : 0, 1 : 0 e 24 : 0 chegamos às sentenças

$$0 \times \square = 4,\ 0 \times \square = 1,\ 0 \times \square = 24.$$

Não há números que possam tornar essas sentenças verdadeiras porque o produto de 0 e qualquer número deve ser 0. Assim as expresões "8 : 0", " 4 : 0", " 1 : 0", " 24 : o", etc., não tem significado. Estes exemplos sugerem que "divisão por 0 é sem significação. Antes de enunciar esta generalização devemos investigar a possibilidade de dividir 0 por 0.

(3)-<u>0 dividido por 0</u>

O problema aqui é decidir que número algum é designado pela expressão "0:0"

Usando-se a definição de divisão sôbre fator ausente ~~da divisão~~, 0:0 será o número que quando multiplicado por 0 resulta 0.

$$0 \times \square = 0$$

Há semelhantes números? Desafortunadamente <u>cada</u> número inteiro completaria estas sentenças.

$$0 \times \boxed{0} = 0,\ 0 \times \boxed{1} = 0,\ 0 \times \boxed{2} = 0, \text{ etc.}$$

Estas igualdades sugerem que 0:0 é 1, 2, 3, ... Entretanto "0:0" não pode ser o nome de cada número intiro porque, por exemplo, se tivessemos 0:0=4 e 0:0=6, obteriamos a inconsistência 4=6 Assim 0:0 não é o nome de um único número, e portanto "0:0" carece totalmente de significado.

Podemos agora enunciar um fato geral da aritmética:

"A divisão por 0 é sem significado"

Podemos acentuar aqui que esta divisão por 0 permanecerá sem significado mesmo quando outros números tais como os negativos e racionais são considerados.