

- Mathematics for Elementary School Teachers

- Capítulo 5:

S U B T R A Ç Ã O

8 - 5 = 3

1. Como podemos explicar a subtração
 - a) Pelo uso de conjuntos?
 - b) Usando as idéias da adição?
2. O que significa "5 - 3"?

Você já deu a seus alunos exercícios de subtração e pediu que eles tirassem a prova, adicionando? Talvez fôsse um exercício assim:

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 19 \\ \hline 27 \end{array}$$

Se o aluno achou que a resposta era 27, êle deveria achar a prova adicionando $27 + 19$. Ele procuraria obter 46 se a resposta ao exercício de subtração estivesse correta.

$$\begin{array}{r} 27 \\ + 19 \\ \hline 46 \end{array}$$

Isto é, êle adicionaria a resposta (27) ao menor dos números dados (19) e procuraria obter um maior (46).

Evidentemente, a subtração tem alguma relação com a adição. Qual é esta relação? Como deve ser apresentada às crianças? Quais as consequências desta relação? Este capítulo explicará estas e outras perguntas.

A relação acima mencionada se refere ao verdadeiro/significado de subtração. Ensina-mos às crianças que "sete menos três é igual a quatro" mas, também, necessitamos ensiná-las porque. Se uma criança diz: "sete menos três é igual a cinco", devemos estar aptos para mostrar-lhe porque está errado. Em outras palavras devemos transmitir às crianças o significado da subtração.

- Explicando a Subtração:

Recordemos brevemente como a adição é geralmente de finida nos novos programas de matemática. Primeiro mostra-se aos alunos como encontrar a união de dois conjuntos disjuntos. Mais tarde aprendem que o número de elementos de tal união é chamado soma dos elementos dos dois conjuntos. Da definição, então são deduzidas certas propriedades da adição (tais como a propriedade comutativa).

A subtração poderá ser também baseada em conjuntos, pelo uso da noção de um subconjunto. Entretanto, mesmo quando a subtração é definida em termos de conjuntos, rapidamente se torna aparente o fato de que a subtração está ligada à adição. Dêste modo, o significado da subtração pode ser abordado de duas maneiras:

1. em termos de conjuntos

2. em termos de adição.

Como ilustração de abordagem através do uso de conjunto, consideremos a seguinte situação: os irmãos de Maria são: Miguel, João, Máximo, Roberto, Luis e Jorge. Designando-se o conjunto de irmãos de Maria por A, teremos

$$A = \{ \text{Miguel, João, Máximo, Roberto, Luis, Jorge, Emílio} \}$$

Consideremos também o conjunto de irmãos de Maria, cujos nomes dados começando com "M", é designado por B.

$$B = \{ \text{Miguel, Máximo} \}$$

Uma vez que todos os elementos do conjunto B são também elementos do conjunto A, dizemos que o conjunto B é um subconjunto do conjunto A.

Os irmãos, cujos nomes não começam por "M", formam outro subconjunto de A; chamemos este conjunto C.

$$C = \{ \text{João, Luis, Jorge, Roberto, Emílio} \}$$

Agora, façamos uma pergunta numérica simples, que poderá ser apropriada para os primeiros anos.

Maria tem 7 irmãos, somente 2 tem nomes que começam com "M". Quantos irmãos mais tem Maria?

Se o aluno apresenta os conjuntos A, B e C como acima, então para responder a pergunta, poderia dar o conjunto C como o dos irmãos, cujos nomes não começam com "M".

Evidentemente, este exemplo pode ser analisado por dois pontos de vista.

1. Os conjuntos A e conjunto B são dados.

O conjunto B é subconjunto do conjunto A.

Qual é o subconjunto de A, cujos elementos não / estão em B? Conjunto C.

2. É dado um conjunto de sete elementos e um dos seus subconjuntos consistindo de dois elementos. Quantos elementos do conjunto de sete elementos não estão neste subconjunto de dois elementos? Cinco.

Chamamos este tipo de problema de subtração. Nêle representamos o número de elementos que não foram dados no subconjunto por "7 - 2" (leia-se "sete menos dois"), e nos referimos a este número como a "diferença de 7 e 2". Porque esta diferença é 5, escrevemos $7 - 2 = 5$ (as crianças poderão, por exemplo, remover dois / blocos do conjunto de sete blocos e então contar os restantes. Escreveriam $7 - 2$, ou 5, para expressarem os resultados). Dizemos que a subtração dá ao par de números 7 e 2 a diferença $7 - 2$ ou 5.

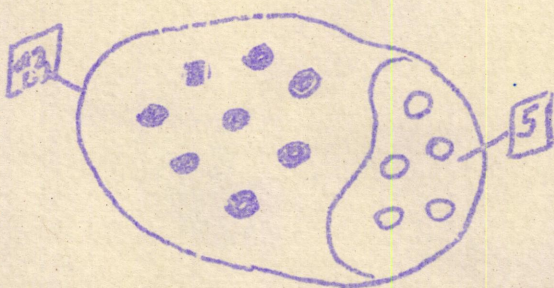
Qualquer problema sobre objetos que "restam" ou são "tirados" ou que "sobram" podem ser resolvidos pela subtração como é indicado aqui.

Uma espécie de problema, chamado, muitas vezes, de "comparação" entram com menos evidência no padrão de subtração. A - qui está um exemplo:

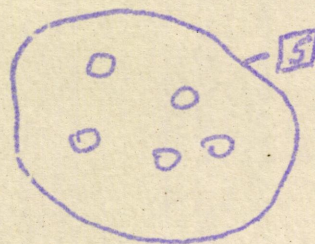
Eugênio tem 13 bolinhas de gude.

Hubert tem 5. Quantas mais tem Eugênio do que Hubert?

Nesta situação, as 5 bolinhas de Hubert não são um subconjunto das 13 de Eugênio, então teremos que simplesmente procurar o conjunto que resta. Mas o processo requerido é obvio (talvez não às crianças, porém): Comparamos as 5 de Hubert com 5 das de Eugênio. Então procuramos o subconjunto restante das de Eugênio.



Conjunto de Eugênio



Conjunto de Hubert

O número do conjunto que resta é $13 - 5$. Isto nos diz "quantas" bolinhas "mais" tem Eugênio.

Usando-se conjuntos, podemos dar uma definição formal de $a - b$, a diferença de a e b , no seguinte:

Se A for um conjunto que contenha a elementos e B for um subconjunto de A que contém b elementos, então $a - b$ é o número do subconjunto de elementos de A que não estão em B .

A diferença $a - b$ não depende da seleção de conjuntos A e B , desde que estes conjuntos preencham os requisitos específicos. Desta definição, aparece uma restrição aos números envolvidos em subtração. A definição diz que para que se subtraia b de a , b deverá ser o número de um subconjunto de um conjunto de a elementos. Claro que b não poderá ser maior do que a . Então, expressões como $3 - 5$, $17 - 18$, etc., não têm sentido neste estágio.

- Conjunto de Exercícios 1:

1. Para cada um desses exercícios, responda às perguntas:

- É B um conjunto de A ?

- Se é, qual é o subconjunto de A composto de elementos não em B ?

a. $A = \{a, e, f, i, j, o, p, u\}$
 $B = \{a, e, i, o, u\}$

b. $A = \{\text{vermelho, branco, azul, verde}\}$
 $B = \{\text{verde}\}$

$$\begin{aligned}
 \text{c. } A &= \{ \text{Acre, Minas Gerais, Guanabara, Ceará, Amapá} \} \\
 B &= \{ \text{Ceará, Amapá} \} \\
 \text{d. } A &= \{ x, y, z, \} \\
 B &= \{ x, y, 3 \} \\
 \text{e. } A &= \{ \Delta, \square, 0 \} \\
 B &= \{ \}
 \end{aligned}$$

2. Para cada exercício acima, escreva uma sentença de subtração. A sentença de subtração para a primeira é $8 - 5 = 3$ porque, dado um conjunto de 8 elementos e um subconjunto de 5 elementos, o subconjunto restante tem 3 elementos.

3. Se B é um subconjunto de A, como acima, e se C é o subconjunto de A composto de elementos não em B, então que conjunto é $B \cup C$?

Até aqui, no desenvolvimento da subtração, não mencionamos a adição. Entretanto, a subtração é muitas vezes chamada de "operação inversa" da adição. Porque?

Nos exercícios e texto acima, começamos com um conjunto e subconjunto de um conjunto; então recorremos ao subconjunto restante. No Exercício 1a, o conjunto dado foi:

$$\begin{aligned}
 A &= \{ a, e, f, i, j, o, p, u \} \quad \text{e o subconjunto era} \\
 B &= \{ a, e, i, o, u \}
 \end{aligned}$$

O conjunto restante encontrado foi:

$$C = \{ f, j, p \}$$

Agora, uma vez que C é um conjunto de elementos de A que não estão em B, o conjunto C e B são disjuntos. Podemos formar a sua união, $B \cup C$; está claro que $B \cup C = A$. Isto é:

$$\{ f, j, p \} \cup \{ a, e, i, o, u \} = \{ a, e, f, i, j, o, p, u \}$$

Tôda a vez que efetuamos a união de dois conjuntos disjuntos, temos uma situação de adição. A união acima implica a sentença de adição $3 + 5 = 8$

A sentença de subtração no Exercício 1a é $8 - 5 = 3$

Então, a adição está por certo relacionada com a subtração.

Mas demonstremos esta relação de modo mais explícito, voltando aos conjuntos nos exs. 1a:

$$\begin{aligned}
 A &= \{ a, e, f, i, j, o, p, u \} \\
 B &= \{ a, e, i, o, u \}
 \end{aligned}$$

Em vez de perguntarmos: "Qual é o conjunto de A, cujos elementos não estão em B"? poderemos perguntar: "Qual é o conjunto, disjunto de B, que completará corretamente esta sentença:

$$B \cup \square = A?$$

A resposta a cada pergunta é a mesma: $\{f, j, p\}$

Agora, façamos uma pergunta numérica sobre este exemplo. Poderíamos perguntar: "Qual é o número de elementos do subconjunto de A, cujos elementos não estão em B". Ou, podemos fazer a pergunta assim: "Qual é o número que adicionado ao 5 dará uma soma de 8?"

Em outras palavras, para se achar a diferença de 8 e 5, poderemos completar a sentença $5 + \square = 8$. Assim a sentença $5 + \square = 8$ tem o mesmo significado que $\square = 8 - 5$.

Os números que são adicionados são chamados adendos. Completar uma sentença como $5 + \square = 8$ pode ser chamado "completar o adendo que falta (ou desconhecido)". Assim, a subtração é, às vezes, chamada "a operação de se encontrar o adendo que falta". Na adição, procuramos a soma de dois adendos, enquanto que na subtração procuramos um dos adendos de uma soma dada. É por isso que muitas vezes, a subtração é chamada de inversa da adição.

Se subtração significa o adendo que falta, o que significa $8 - 5$? $8 - 5$ é o número que, quando adicionado ao 5 dá 8, isto é, 3. Então $8 - 5 = 3$. A diferença 3 pode ser achada completando-se $5 + \square = 8$. Nesta sentença, 5 é, muitas vezes, chamado de adendo conhecido ou dado, e 8 é chamado a soma. Note-se que a expressão " $8 - 5$ " lida da esquerda para a direita primeiro mostra a soma 8, depois menos, então o adendo dado 5.

Claro que se o adendo dado for maior que a soma desejada, não será possível encontrar-se um adendo que falta, apropriado, entre os números inteiros. Por exemplo: $6 + \square = 2$ e $\square + 9 = 8$ não poderão ser completados com números inteiros. Assim, expressões tais como $2 - 6$ e $8 - 9$ não têm significado quando se trabalha com o conjunto dos números inteiros.

Dêste modo, somos levados às mesmas restrições vistas na definição de subtração usando-se conjuntos:

O adendo conhecido não pode ser maior do que a soma (Quando os alunos chegam ao ginásio, entretanto, descobrem que existem números - especialmente os números negativos - que se aplicarão para completar sentenças como $6 + \square = 2$). A abordagem, adendo-que-falta, para a subtração, aplica-se, portanto, para grandes classes de números do que para a abordagem de conjuntos - por exemplo, para uma classe que inclua não somente números inteiros mas também números negativos e fracionários.

Agora usamos a idéia de número-que-falta para descrever a subtração como se segue:

A subtração atribue ao par de números inteiros a e b o número que falta na sentença $b + \square = a$. O número-que-falta é nomeado " $a - b$ ". A isso, também

se chama diferença de a e b. A expressão "a - b" indica um número / inteiro somente quando b não é maior que a.

Segue-se que quando completamos uma sentença tal co-
mo $\square + 6 = 19$, nós com efeito, "subtraímos" 6 de 19, e sabemos que
o nome para o adendo que falta é "19-6". Daí, pelo nosso conhecimen-
to da adição, $13 + 6 = 19$, obteremos $13 = 19 - 6$.

Se introduzimos a subtração através do adendo que
falta, não será estritamente necessário que sejam decorados os "fa-
tos da subtração". Por exemplo, se pedirmos à criança que complete/
a sentença $11 - 4 = \square$ (isto é, pedimos a subtração de 4 de 11)
ela deveria pensar livremente: $11 = \square + 4$ ou $11 = 4 + \square$
e então completar qualquer das sentenças através do seu conhecimen-
to dos fatos da adição. O adendo que falta, encontrado, é a diferen-
ça entre 11 e 4, $11 - 4$. A criança deveria aprender que "onze menos
quatro equivale a 7", porque "sete mais quatro iguala onze".

Pode-se agora explicar como a adição pode ser prova
da subtração?

- Conjunto de Exercícios 2:

1. Escreva duas sentenças de subtração de cada uma
dessas sentenças de adição:

a. $6 + 4 = 10$ $6 \neq 10 - 4$ $4 = 10 - 6$
b.

2. Escreva uma sentença de adição para cada uma des-
sas sentenças de subtração:

a. $12 - 7 = 5$ $12 = 5 + 7$ (ou $12 = 7 + 5$)
b. $6 - 6 = 0$
c.

3. Converta cada uma dessas sentenças de subtração.
Então complete as sentenças:

a. $3 + \square = 12$ $9 = 12 - 3$
b.

4. Converta cada uma destas sentenças a uma senten-
ça de adição. Complete ambas as sentenças:

a. $\square = 16 - 9$ $9 + \square = 16$ (ou $\square + 9 = 16$)
b.

Propriedades da Subtração

Nos novos programas de matemática, as crianças não
aprendem só a significação da adição e multiplicação mas, também, as
propriedades dessas operações matemáticas. Duas das propriedades in-

portantes da adição e multiplicação são as propriedades associativa e a comutativa.

-PROPRIEDADES ASSOCIATIVA E COMUTATIVA DA MULTIPLICAÇÃO E ADIÇÃO:

OPERAÇÃO	PROPRIEDADE ASSOCIATIVA	PROPRIEDADE COMUTATIVA
Multiplicação	Para todos os números inteiros <u>a</u> , <u>b</u> e <u>c</u> $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ Exemplo: $(3 \times 6) \times 4 = 3 \times (6 \times 4)$	Para todos os números/ inteiros <u>a</u> e <u>b</u> $a \times b = b \times a$ Exemplo: $12 \times 7 = 7 \times 12$
Adição	Para todos os números inteiros <u>a</u> , <u>b</u> e <u>c</u> , $(a + b) + c = a + (b + c)$ Exemplo: $(3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4)$	Para todos os números inteiros <u>a</u> e <u>b</u> , $a + b = b + a$ Exemplo: $12 + 7 = 7 + 12$

Tem a subtração também essas propriedades? Consideremos dois exemplos:

1. É a subtração comutativa? É $8 - 3 = 3 - 8$?

É obvio que $8 - 3 = 5$, porque 5 completa corretamente a sentença $3 + \square = 8$. Mas " $3 - 8$ " não é um nome para 5; de fato não é nome para nenhum número inteiro, uma vez que nenhum número inteiro se ajusta à sentença $8 + \square = 3$. Então $8 - 3 \neq 3 - 8$. O símbolo " \neq " significa "não é igual a" (Usando-se números negativos, poderemos achar que $3 - 8$ é -5 , e não 5, então aqui também, $8 - 3 \neq 3 - 8$). Outros exemplos como êsses, são fáceis de se encontrar mas não são necessários para o nosso objetivo. A subtração seria comutativa somente se $a - b = b - a$ assim o fôsse para todos os números inteiros a e b. O exemplo acima mostra que há ao menos uma exceção - isto é, que $a - b$ não iguala $b - a$ para todos os números inteiros. Mostrando-se que $8 - 3$ não é igual a $3 - 8$, achamos uma exceção. Então a subtração não é comutativa.

2. É a subtração associativa? Por exemplo:

é $9 - (5 - 3)$ igual a $(9 - 5) - 3$?

$$9 - (5 - 3) = 9 - 2 = 7$$

Mas $(9 - 5) - 3 = 4 - 3 = 1$

Então $9 - (5 - 3) \neq (9 - 5) - 3$. Esta exceção nos mostra que a subtração não é associativa. (Porque para a subtração/ ser associativa, seria necessário que $a - (b - c) = (a - b) - c$ para todos os números inteiros a, b e c).

Entretanto, a resposta foi em verdade calculada como $(30 - 10) + (16 - 9)$

É válido questionar como sabemos que esta "mudança de termos" leva ao resultado correto. A resposta está incorporada / na seguinte generalização:

Para todo o número inteiro a, b, c, d , onde a não é menor que c e b não é menor que d ,

$$(a + b) - (c + d) = (a + c) - (b + d)$$

(Incluimos a seguinte prova para as professoras que estiverem interessadas em ver uma).

De acordo com a abordagem de adendo-que-falta para a subtração (Veja pg. 72):

$$\text{Se } a - c = x, \text{ então } a = c + x \text{ e}$$

$$\text{Se } b - d = y, \text{ então } b = d + y$$

Dessas equações, e pelas propriedades associativa e comutativa da adição, temos:

$$\begin{aligned}(a + b) &= (c + x) + (d + y) \\ &= (c + d) + (x + y)\end{aligned}$$

o que simplesmente significa que $(a + b) - (c + d) = x + y$

Substituindo-se x e y , temos $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$

Esta é a igualdade que procuramos estabelecer. Um caso especial é obtido tomando $d = b$.

$$\begin{aligned}(a + b) - (a + b) &= (a - c) + (b - b) \\ &= (a - c) + 0 \\ &= (a - c)\end{aligned}$$

O resultado é expresso como

$$(a + b) - (c + b) = (a - c)$$

O que simplesmente significa que o resultado de uma subtração é invariável se o mesmo número é adicionado a ambos os números no problema de subtração.

$$\begin{aligned}\text{Por exemplo: } 241 - 97 &= (421 + 3) \\ &= 424 - 100 \\ &= 324.\end{aligned}$$

- Exercícios Conjunto 3:

1. Inserir "=" ou "≠" onde necessário, em cada círculo:

a. $3 - 2$ ○ $2 - 3$

2. Inserir parêntesis para tornar verdadeira cada / sentença.

a. $8 - 4 - 1 = 5$ b..... c.....

O Papel do zero na Subtração

Sabe-se que o 0 tem papel especial na adição.

PROPRIEDADE DO ZERO NA ADIÇÃO
Para cada número a, $a + 0 = a$ e $0 + a = a$
Exemplos: $5 + 0 = 5$ $0 + 16 = 16$

Esta lei especial leva a alguns fatos interessantes sobre o 0 na subtração. Estes fatos, ainda que apresentados aqui, de maneira mais ou menos abstrata, são melhor comunicados à criança através de exemplos e exercícios.

A propriedade de adição do zero leva a sentenças tais como $5 + 0 = 5$, $0 + 16 = 16$, $0 + 65 = 65$, $2 + 0 = 2$, etc. De cada tipo de sentença de adição acima poderão se formar dois tipos de sentenças de subtração.

$5 + 0 = 5$ leva a $5 - 5 = 0$ e $5 - 0 = 5$
 $0 + 16 = 16$ leva a $16 - 16 = 0$ e $16 - 0 = 16$
 $0 + 65 = 65$ leva a $65 - 65 = 0$ e $65 - 0 = 65$
 $0 + 2 = 2$ leva a $2 - 2 = 0$ e $2 - 0 = 2$

Estes resultados sugerem a possibilidade de generalização:

1. O fato de que $5 - 5 = 0$, $16 - 16 = 0$, etc, sugere / que "qualquer número inteiro subtraído de si mesmo leva a 0".

2. O fato de que $5 - 0 = 5$, $16 - 0 = 16$, etc., sugere que "0 subtraído de qualquer número inteiro leva a este número inteiro."

Essas generalizações constituem o papel do 0 na subtração; eles podem ser provados com a propriedade de adição do 0.

Para cada número inteiro
 $a + 0 = a$

Para cada número inteiro a
 $a - a = 0$

Para cada número inteiro a
 $a - 0 = a$

Para resumir: Que significa $5 - 3$? $5 - 3$ é o número que completa corretamente a sentença $3 + \square = 5$

Se de uma soma de dois adendos um dos adendos é subtraído, a diferença é o adendo remanecente.

A subtração não é comutativa ou associativa.

Qualquer número subtraído de si mesmo resulta 0.

O subtraído de qualquer número leva ao mesmo número.

"Mudança de Termos" na Subtração

Mesmo depois do significado da subtração estar inteiramente compreendido, ainda permanece o problema de se efetuar / eficientemente o cálculo da subtração. Num problema simples como $11 - 4 = \square$ o adendo que falta por exemplo $11 = 4 + \square$ pode ser usado, eficientemente, pela criança que conhece os fatos elementares da adição.

Entretanto, em problemas de mesmo pouca complexidade, o uso direto da abordagem adendo que falta, nem sempre é prática. Por exemplo, pode não auxiliar muito o principiante, se ele tentar calcular $46 - 19 = \square$ escrevendo $46: 19 + \square$

A criança aprende como fracionar este problema em partes simples que poderão ser usadas com o conhecimento já adquirido. Para conseguir isto, poderá usar um algoritmo de subtração por meio do qual calcula a diferença.

$$\begin{array}{r} 46 \\ - 19 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} 46 = 40 + 6 = 30 + 16 \\ 19 = 10 + 9 = 10 + 9 \end{array}$$

Poderá usar então a abordagem adendo-que-falta, para obter $30 - 10 = 20$, $16 - 9 = 7$; assim sua resposta se torna $20 + 7 = 27$.

Note-se, entretanto, que este cálculo torna tácito/ uma premissa que é raramente apontada nos textos elementares. O problema original foi: $46 - 19$. Por conveniência, foi expressado primeiro na forma $(30 + 16) - (10 + 9)$

Uma discussão mais detalhada sobre algoritmos de subtração a parecerá num capítulo posterior. Aqui introduzimos brevemente um algoritmo da subtração, para desenvolver uma propriedade importante da subtração.