INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLÔRES DA CUNHA"

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P. Trad. A.B.Krebs

AS SEIS ETAPAS DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

ESTUDO DE UMA RELAÇÃO DE ORDEM

Primeira etapa

Poderíamos tomar um conjunto de objetos quaisquer e estudar suas propriedades. A partir dessas propriedades, poderíamos colocar esses objetos em relação uns com os outros. Esse processo começa, quase desde o nascimento. Em consequência, a primeira etapa começa bem antes do período aqui visado, isto é, aquele em que a criança está na escola. Juntando ao ambiente comum alguns materiais estruturados, tais como blocos multibase ou os blocos lógicos, etc., podemos encorajar, auxiliar o desenvolvimento de realizações ulteriores de natureza mais exata e mais refinada do que se tomarmos em consideração só os objetos que se encontram no ambiente habitual. A etapa lúdica do estudo de relações, que será objeto de nossa terceira ilustração, se decompõe, por consequência, no estudo de propriedades dos objetos e em diferentes / tentativas, de parte da criança, para por os objetos assim dotados de propriedades em relação uns com os outros. Ela poderá dizer, por exemplo, que uma flor é da mesma cor que uma outra flor; que uma árvore é maior do que uma outra árvore ou, ainda, que um presente é preferível a outro presente, por certas razões que resultam das propriedades desses objetos, e dos quais a criança já se deu conta. Durante suas atividades de classificação e de ordem a criança aborda os problemas que a levarão, finalmente, à realização e à compreensão de noções tais como uma relação de equivalência, uma relação de ordem, uma relação de diferença, etc, Aqui, nós vamos, sòmente, explicar a epistemologia da noção de / ordem e, como poderemos nos dar conta das etapas percorridas pe

....

....

pela criança, no que concerne à aprendizagem da idéia de ordem.

Segunda etapa -

Evidentemente, é preciso pensar em jogos estruturados dos quais a criança poderá tirar a significação de uma relação de ordem. Há meios simples e há meios muito complexos de definir uma ordem linear estrita.

Só fica na ordem total fila

Sendo dado um conjunto de crianças, tal que não existam duas da mesma altura, podemos ordená-las por altura colocando o mais alto na frente e terminando pelo menor. Para verificar qual de duas crianças vem antes ou depois, é suficiente olhar suas alturas e compará-las. Podemos, mesmo, fazer exercícios de ordem sobre peso, distância, superfície, valor monetário, etc. etc. Mas, podemos dar exercícios de comparação sobre uma escala de ordem de muitas espécies. Por exemplo, as crianças podem sair da aula fazendo passar primeiro as meninas e depois os meninos. As meninas se colocam em fila com a maior na frente e a menor por último. Depois das meninas virão os meninos. O mais alto primeiro e o menor por último. Nós temos, aqui, dois critérios superpostos para decidir qual de duas crianças saiu da classe antes da outra. Se uma das crianças é um menino e a outra é uma menina, nós não temos necessidade de olhar qual é o mais alto, porque sabemos que todas as meninas sairam antes de todos os meninos. Se duas crianças são do mesmo sexo, então, o primeiro critério para escolha não funciona. É preciso recorrer ao segundo critério, isto é, é preciso ver qual das duas crianças é mais alta. Para proporcionar exercícios desta espécie, podemos fazer desenhos, ou reunir objetos, fazendo conjuntos ou os preparando de modo que formam um sistema completo num conjunto.

Relações de ordem simples — + rico e melhor se fizermos com critério superpostos peso e altura

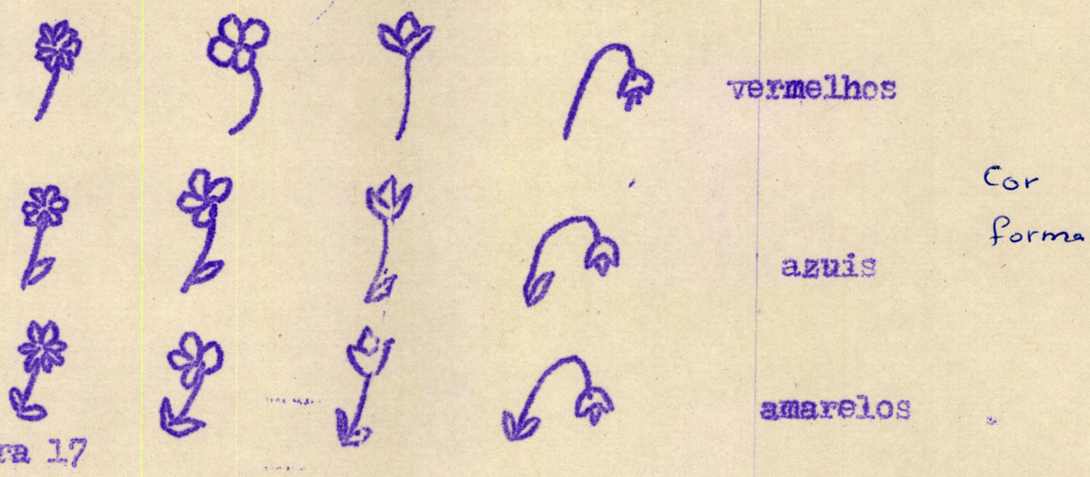
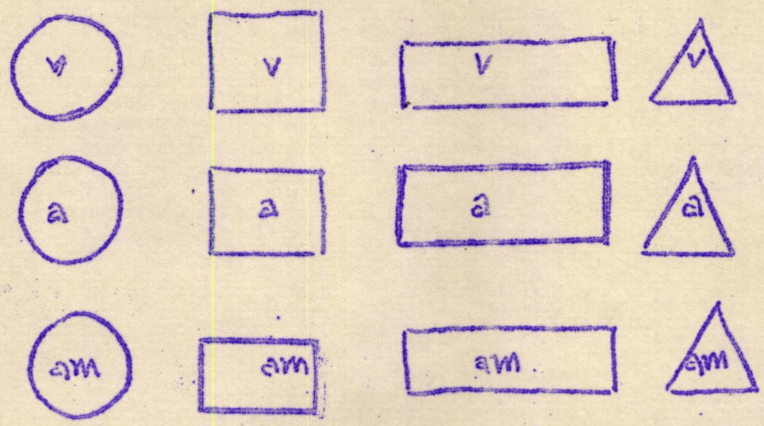


Figura 17

Olhemos, por exemplo, a figura 17. Há doze espécies de flores. Na fileira primeira temos flores vermelhas, na segunda / flores azuis e na terceira flores amarelas. Podemos decidir, por exemplo, que todas as flores vermelhas são preferíveis a todas as flores azuis e que todas as flores azuis são preferíveis, têm prioridade sobre todas as flores amarelas. Em seguida, se duas flores dadas são da mesma cor, podemos tomar a ordem dada na figura como nossa ordem de preferência. Podemos, igualmente, dizer que as margaridas desenhadas na primeira coluna do quadro são as flores preferidas, as flores da segunda coluna vêm depois, as tulipas depois o muguet por último. Mas, se devemos escolher entre duas / margaridas, diremos que as vermelhas são preferíveis às azuis e as azuis, às vermelhas. Temos assim, invertido a ordem de importância dos dois critérios e obtido uma outra ordem. Podemos fazer o mesmo com os blocos lógicos. Veremos como na figura 18 e também na figura 19.



batalhar

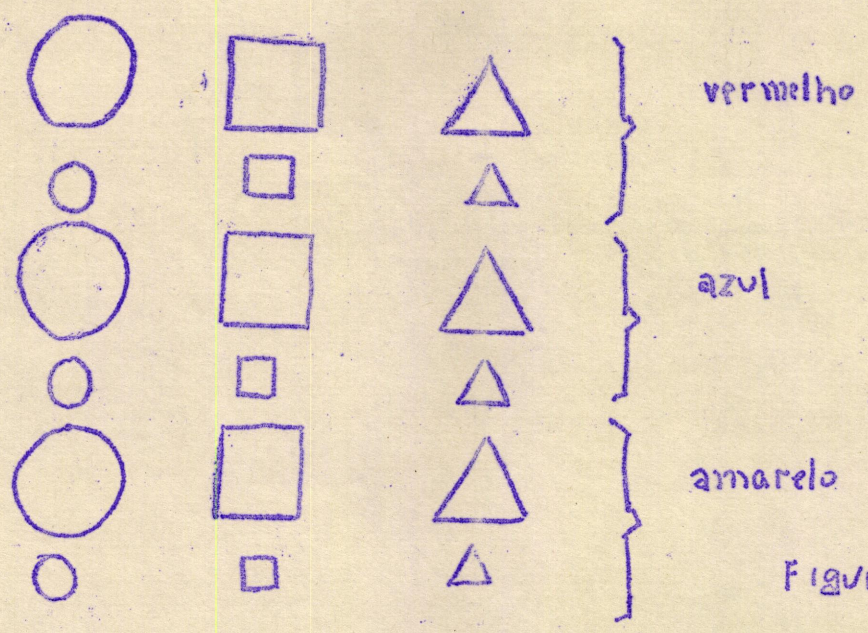


Figura 19

térios. Digamos que a ordem de preferência enunciada por qualquer um é a seguinte: os vermelhos são sempre preferíveis aos azuis, e os azuis sempre preferíveis aos amarelos. Se temos dois blocos da mesma cor, os grandes são sempre preferíveis aos pequenos. Se temos dois blocos da mesma cor e do mesmo tamanho, os redondos são preferíveis aos quadrados e os quadrados preferíveis aos triângulos. Assim, o critério da cor é o primeiro. O do tamanho o segun-

....

....

segundo e o da forma o terceiro. Por certo podemos trocar a ordem de importância dêsses critérios. Poderíamos dizer, por exemplo, que tomamos todos os redondos antes de todos os quadrados e todos os quadrados antes de todos os triangulos e, em seguida, os vermelhos sempre antes dos azuis, os azuis sempre antes dos amarelos, se dois blocos são da mesma forma. Se dois blocos são da mesma forma e também da mesma côr, então, tomam-se os grandes antes / dos pequenos. Este conjunto de critérios nos dá a ordem por coluna. Percorremos, de início, a primeira coluna de alto a baixo, em seguida a segunda, depois a terceira, até o triângulo pequeno amarelo que é o bloco menos valorizado, mais desprezado nas duas ordens.

Veremos, na figura 2o, que igualmente podemos imaginar outros meios de considerar um jogo de ordem com três critérios.

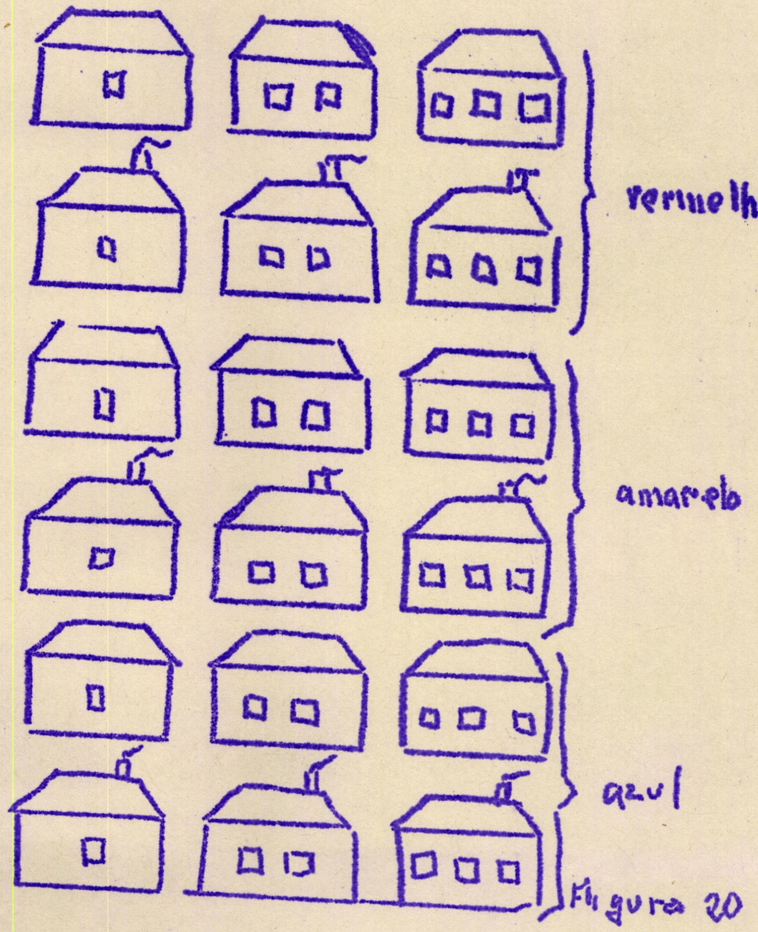


Figura 20

Na figura 2o vemos dezoito casas. Há as que são vermelhas, outras são azuis e outras amarelas. Na ordem indicada na figura, se as tomamos por coluna, isto é, a primeira coluna em primeiro lugar, seguida da segunda, depois da terceira, di

....

....

dizemos que as casas com uma janela têm preferência sôbre as de duas janelas e essas são preferíveis às de três janelas. Mas, se duas casas têm o mesmo número de janelas, as vermelhas têm preferência sôbre as azuis e, as azuis sobre as amarelas. Se / duas casas são da mesma cor e possuem o mesmo número de janelas, então preferimos uma casa sem chaminé. Naturalmente, há seis maneiras diferentes de ordenar os critérios. Paralelamente, há ordens diferentes que podemos dar. Dentro de cada ordem de critérios, podemos ainda variar a ordem, por exemplo, das casas e seu número de janelas. Podemos dizer que as casas com três janelas são preferíveis às de duas, e estas são preferíveis às de uma. Ou que as casas com chaminé são sempre preferíveis às casas sem chaminé ou que elas são preferíveis, somente, se as casas são da / mesma côr, ou, ainda, se elas são da mesma côr e possuem o mesmo número de janelas, e assim por diante.

Depois de ter efetuado um certo número de exercícios com tais conjuntos de objetos, poderemos também passar a consideração dos conjuntos de conjuntos.

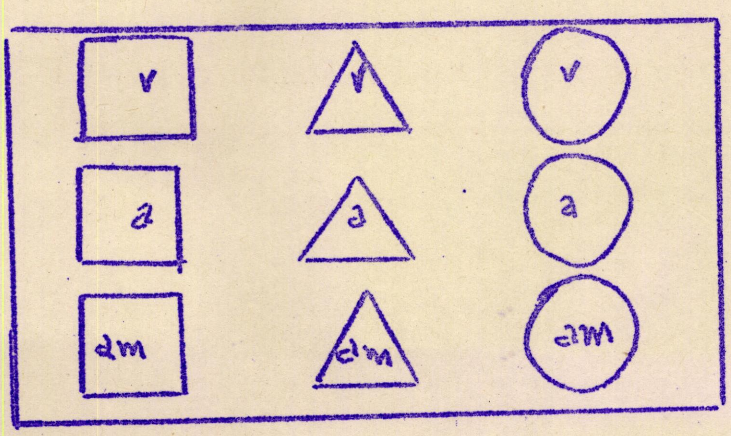


Figura 11 A

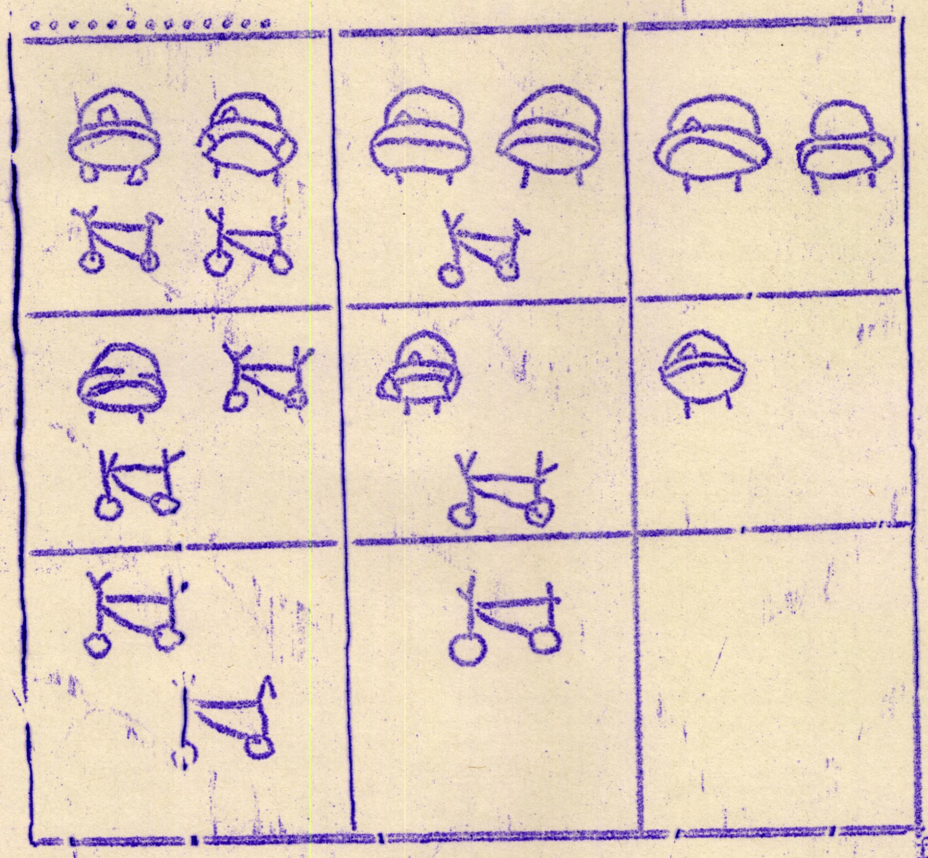


figura 21 B

Vemos na figura 21 um conjunto de blocos lógicos e, em seguinda, em baixo, um conjunto de conjuntos. Há autos e bicicletas. Naturalmente, os autos são preferíveis as bicicletas e dois autos são preferíveis a um só auto, e um só auto, preferível a 0 auto. Do mesmo modo para as bicikletas. Vemos que os conjuntos de objetos dosenhados nos novo espaços estão desenhados levando em conta a ordem das fileiras: 2 autos - 2 bicicletas, 2 autos - 1 bicicleta, 2 autos - 0 bicicletas. A seguir: 1 auto - 2 bicicletas, 1 auto - 1 bicicleta, 1 auto - 0 bicicleta. Terceira fileira: 0 auto - 2 bicicletas, 0 auto , 1 bicicleta e, finalmente, 0 auto - 0 bicicleta.

Pede-se que as crianças prefiram as bicicletas / aos autos. Por fim, não podemos dirigir autos, porque o auto só é dirigido pelo papai. Neste caso as preferências irão para as colunas e não para as fileiras.

Terceira etapa -

É evidente que podemos agora fazer uma correspondência entre as ordens que foram estabelecidas com um conjunto de objetos ou de imagens, ou mesmo com um conjunto de conjuntos de objetos. Assim, ordena-se, por exemplo, o conjunto dos conjun

....

conjuntos de autos e de bicicletas e coloca-se ao lado, de cada um dêsses conjuntos um bloco lógico bem determinado. Na figura 21, é evidente que a propriedade de ser vermelho, no caso dos blocos lógicos corresponde à propriedade de conjuntos de ter 2 autos. O azul nos blocos lógicos corresponde a um auto no conjunto e o amarelo corresponde a zero auto. A propriedade de ser quadrado corresponde a ter duas bicicletas; ser um triângulo corresponde a ter uma bicicleta e a propriedade de ser um círculo corresponde a ter zero bicicleta. Assim, podemos comparar não somente, elemento por elemento, mas propriedade por propriedade. Da mesma maneira, os blocos lógicos da figura 19 podem ser comparados com o conjunto das casas da figura 20. Pode-se, por exemplo, dizer que, em cada casa há uma picina, algumas vêzes é uma piscina grande, outras vezes é pequena; e a forma da piscina pode ser circular, quadrada ou triângular e também, que se pode ter uma cêrca vermelha, ou amarela, ou azul, ao redor de cada piscina. Trata-se de decidir como distribuir as piscinas entre as casas. Não é necessário, de modo algum, colocar as piscinas com cercas vermelhas com as casas vermelhas. Deve ser dada uma regra que se possa seguir de modo que se possa sempre saber que espécie de piscina uma determinada casa deve ter e, inversamente, que espécie de casa / será a casa construída com uma certa piscina. Vemos que os mesmos jogos de comparação, típicos da terceira etapa podem / ser jogados com o conjunto de flores e o conjunto de blocos / lógicos.

segue figura 22

....

Fls. 9 Pamela

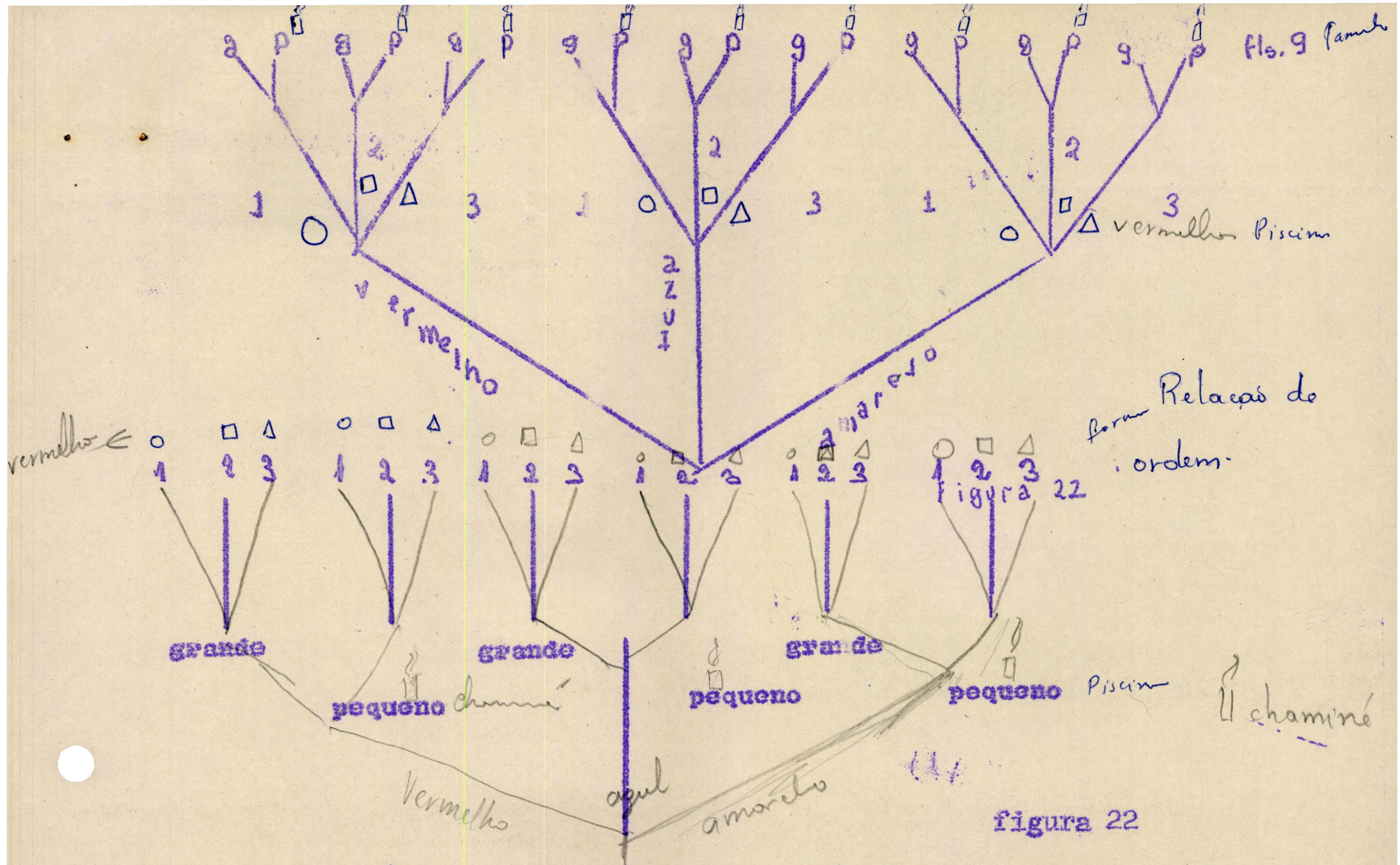


figura 22

numero → numero de janelas

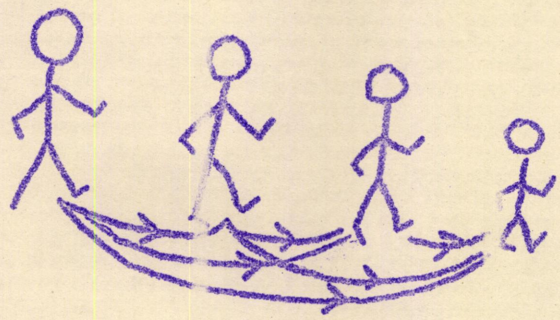
Na figura 22 já se vê uma espécie de transição para representação. Esta poderá nos levar à <u>quarta etapa</u>.

Representamos a ordem linear dada por fileiras nas figuras 19 e 20. Em cima vemos uma outra ordem. Foi trocada a ordem de importância relativa ao número de janelas vis a vis ao número de chaminés, no caso das casas e, a forma em comparação (vis a vis) ao tamanho no caso dos blocos lógicos. As propriedades são indicadas sobre as ramificações. Por exemplo, na primeira parte da figura se começa com o quadrado grande vermelho, etc. Ou então, se falamos do conjunto de casas, se começa com uma casa sem chaminé, de uma janela, e que é vermelha, em seguida uma casa sem chaminé, de duas janelas, e que é vermelha e, assim por diante ... Pode-se, então, considerar muitas outras possibilidades de efetuar uma tal representação. Por exemplo, se tomamos o conjunto de conjuntos de autos e bicicletas dados na figura 21, poderíamos ampliar este conjunto tomando também, por exemplo, a possibilidade de ter uma casa, ou então, de não a

....

....

ter. Cada exemplo poderia figurar com casa e igualmente, sem casa. Isto nos daria, exatamente, dezoito conjuntos possíveis que podem ser comparados com a distribuição de critérios sucessivos dada na figura 22. Casa ou sem casa corresponde a chaminé ou sem chaminé ou inversamente. Dois autos - um auto - nenhum auto pode corresponder a vermelho, azul ou amarelo. / Duas bicicletas, uma bicicleta, sem bicicleta poderia corresponder a uma janela, duas janelas, tres janelas, respectivamente. O momento em que a criança é capaz de preencher a árvore (remplir) com os elementos do conjunto adequado e de estabelecer que uma ordem está determinada a partir de suas próprias / decisões, segundo a qual se vê de dois objetos ou de dois conjuntos determinados, qual vem antes e qual vem depois, é neste momento que está pronta para utilizar a representação tanto / quanto a abstração dos jogos de ordem que ela irá jogar. É preciso, também, introduzir uma notação para a relação "vir antes" ou "vir depois".



Por exemplo, na figura 23, se dá quatro crianças. A primeira é a maior, a segunda é menor, a terceira ainda menor e a quarta a menor de todas. Consideremos a relação "ser maior do que". Isto quer dizer que o primeiro é maior do que o segundo, o primeiro é maior do que o terceiro, e o primeiro

....

....

é igualmente maior do que o quarto. Isto é representado por flexas que ligam o primeiro ao segundo, do primeiro ao terceiro, e do primeiro ao quarto. O segundo é igualmente maior do que o terceiro e o segundo é maior do que o quarto. O terceiro é também maior do que o quarto. Todos esses enunciados relacionais são / representados por flexas no diagrama dado na figura 23. Aqui se faz abstração mesmo de regras que regem a decisão a tomar quanto a saber, de um ou outro de dois elementos do conjunto, qual vem antes ou depois.

Quinta etapa

Chegamos a uma representação que agora pode representar qualquer ordem estrita. Não definimos o que é ordem estrita. Chegamos a representá-la depois de ter dado um certo número de experiências, cujo conteúdo conduz à compreensão da espécie de situação da qual se abastrai a idéia de ordem estrita. Na quinta etapa nós teremos a tarefa de destacar as propriedades de ordem estrita em lugar de dar as definições, como é habitual nos programas ditos "modernos". Estamos agora em condições de pedir para as crianças escreverem de uma maneira, tão precisa quanto / possível, as propriedades dos jogos de ordem que elas jogarem. Por exemplo, as crianças podem se dar conta de que há uma flecha de um elemento a outro, jamais há uma flecha desse segundo elemento ao primeiro. Uma tal propriedade se chama a propriedade de antisimetria. Pode-se evidentemente, simplesmente descrever uma / tal propriedade no meio de uma frase. Se no momento desta descoberta as crianaças são capazes de se exprimir por uma notação lógica precisa, elas poderão escrever a condição "relação XY" ocasiona "não-relação YX". É possivel que algumas crianças cheguem à intuição da transitividade. Isto é, se podemos passar de um elemento a um segundo e, se podemos passar deste segundo a um terceiro por uma flecha no diagrama, podemos sempre passar do primeiro

Ordem com flechas

Dar as propriedades que abstraem

....

. . . .

elemento aoterceiro por uma só flecha. Se isto é verdade para todos no diagrama, quisquer que sejam os elementos mencionados, diremos que a relação em questão possui a propriedade da transitividade. Naturalmente, poderemos exprimir esta propriedade como acabamos de faze-lo. Ora, se as crianças dminarem uma linguagem simbólica lógica, elas podem dizer: "a condição": conjunção (conjuntamente) relação XY e relação YZ, ocasiona "relação XZ". Pode-se também introduzir a noção de sucessor ou de elemento seguinte. Poderemos fazer a notação de uns elementos de um sistema por 0, o segundo de 0, o seguinte do seguinte de 0, o seguinte do seguinte, do seguinte de 0, e assim por diante. Os ordinais 1, 2, 3, etc são abreviações para o sucessor ou o seguinte de 0, o sucessor do sucessor de 0, o sucessor do sucesser de 0, respectivamente. Evidentemente é preciso imaginar que a psicodinâmica precedente também foi seguida para a relação "X" precede "Y" ou "Y" sucede "Y". Por "precede" se entende "precede imediatamente" de modo que entre X e Y não existe outro elemento: "entre", evidentemente, quer dizer que o elemento sucede a X, mas precede Y; neste momento dizemos que este elemento está "entre X e Y". Poderíamos observar as propriedades de uma sucessão numa figura onde a sucessão está expressa por uma juxtaposição de pontos representativos sobre uma linha. Podemos chamar os elementos do jogo como quisermos. Poderíamos, por exemplo, chamá-los 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. ...Veremos que se estabeleceu uma ordem estrita pela juxtaposição. Vemos que aquele que vem depois, isto é, o sucessor é sempre colocado do mesmo lado do elemento ao qual ele sucede. A ordem é representada nesta figura por uma relação esquerda-direita. Diz-se, por exemplo, que 2 vem antes do 4, ou que 4 vem depois de 2. Definimos nossa relação pelos axiomas seguintes que descrevem a representação linear:

Introdução de linguagem

Axioma 1: o sucessor de um elemento vem depois do elemento / ao qual ele sucede. Se usarmos R, para a relação, seguida dos

....

dos dois elementos que ela liga, escreveremos RSee. Este será nosso primeiro axioma. As regras do jogo de natureza lógica / que vamos dar serão as regras segundo as quais podemos dar outros enunciados que não estão compreendidos no axioma nº 1. Por exemplo, nós podemos dizer:

Primeira regra: Sendo dado Rxy, podemos deduzir: NRyx.

Segunda regra: Sendo dado Rxy e também Ryz, podemos deduzir / Rxz, onde x, y, z, são elementos do mesmo sistema. Por exemplo, 0, S0, SS0, SSS0, etc.... que se escreve abreviadamente, 0 - 1- 2 - 3, etc. ... são os elementos.

Sexta etapa:

Agora chegamos à possibilidade de fazer demonstrações no pequeno sistema que criamos. Por exemplo, experimentaremos demonstrar que não é verdade que 2 vem depois de 4. Em / símbolos: NR2.4. Lembremos que 2 é uma abreviatura para SS0 e que 4 é uma abreviatura para SSSS0. Por consequência, o que nós devemos demonstrar é isto: NR SS0 SSSS0.

Demonstração:

1 R See (Axioma)

2 R SSS0 SSS0 (e = SSS0)

3 R SSSS0 SSS0 (e = SSS0)

4 R SSSS0 SS0 (3, 2, 11)

5 NR SS0 SSSS0 (4, 1)

isto é, NR 2, 4

isto quer dizer: "2 não vem depois do 4"

Figura 24

Eventualmente há um outro axioma que poderemos tirar de nossas experiências, o que é NRee. Não é verdade que a relação existe entre um elemento e ele mesmo, isto é, um elemento não vem depois de si mesmo. Não temos espaço para prosseguir esta ilustração, nem para dar muitas outras que poderíamos dar para qualquer noção matemática cuja psicodinâmica, do ponto de vista da aprendizagem para a criança, seria em tudo semelhante a essa que acabamos de dar.

/tgo.

Arquive-se 28/03/67