Mathematics for Elementary School Teachers

\- Capítulo 3:

ADIÇÃO E SUAS PROPRIEDADES

1. O que significa uma união de um par de conjuntos?
2. Como pode ser a soma dos números inteiros definida em têrmos de conjuntos?
3. Quais são algumas das propriedades da adição?
4. O que significa a expressão "2 + 3"?

Conhece alguma criança que seja capaz de executar o trabalho ao lado, mas tenha dificuldade com problemas verbais? Imagine que você tem um aluno que faz êste trabalho apresentado. Depois imagine que você lhe deu o seguinte problema: "Quantas cadeiras há num auditório no qual há 15 filas de assentos e 12 assentos em cada fila? Agora, suponha que êle escreva no papel $\begin{array}{r} 12 \\ +\ 15 \\ \hline 27 \end{array}$ e diga que a resposta é 27.

$$\begin{array}{r} 623 \\ +\ 108 \\ \hline 731 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 821 \\ -\ 538 \\ \hline 283 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 362 \\ \times 27 \\ \hline 2534 \\ 724 \\ \hline 9774 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 414 & 23 \\ \cline{2-2} 23 & 18 \\ \hline 184 & \\ 184 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Como se analisa essas dificuldades? É êle descuidado ou lhe falta compreensão de adição e multiplicação? Será possível que uma criança possa fazer o trabalho apresentado acima, sem compreender o significado das operações matemáticas?

Concordamos que tôdas as habilidades computacionais do mundo, não serão de muito auxílio se não forem acompanhados da compreensão dos resultados. Se uma criança souber como multiplicar mas não quando multiplicar, seu conhecimento é bastante inútil.

O ponto a que queremos chegar é que há uma diferença entre saber o significado da adição e saber como executar os processos computacionais relacionados. Ainda que seja possível se aprender o último de cor, é de se duvidar que assim fazendo, se obtenha objetivos educacionais que valham a pena.

Nas páginas que se seguem, procuraremos esclarecer o que queremos dizer por adição. A adição será desenvolvida através do uso de conjuntos. Queremos ver se conseguimos apresentar certos princípios ou propriedades da adição como consequência do seu desenvolvimento. Essas propriedades em última instância nos levam aos processos que usamos em cálculos.

Preliminares à adição - União de Conjuntos

O que queremos dizer quando falamos em "adicionar " 3 a 5"? Geralmente, a professôra no curso primário explica mostrando um conjunto de 3 objetos e um conjunto de 5 elementos, juntando/ os dois conjuntos se produz um novo conjunto de 8 elementos. O uso de exemplos concretos é na verdade uma boa técnica mas o professor por certo quererá conhecer as idéias matemáticas que fundamentam tais exemplos concretos.

A B

Examinemos a situação e vejamos se podemos estabelecer precisamente o que é adição. Coloquemo-nos sob convenções e vamos nomear cada conjunto acima com uma letra maiúscula. Podemos, arbitràriamente, chamar o conjunto que aparece à esquerda de A e o da direita de B. O conjunto que contém todos os elementos apresentados se chamará de <u>união de A e B</u> e será representado por $A \cup B$ (leia-se "A união B").

Consideremos mais alguns exemplos que ilustrem o conceito de união:

1. Se E é um conjunto de tôdas as loiras da classe e F, o conjunto de ruivas, então $E \cup F$ é o conjunto de todos na classe que tiverem tanto cabelo loiro como ruivo.

2. Suponhamos que M é o conjunto constituído de Bob e Joe e N é o conjunto constituído de Beti, Jane e Maria. Usando-se chaves da maneira costumeira, poderemos escrever:

M= {Bob e Joe} e N= {Beti, Jane, Maria} Então $M \cup N$=

$M \cup N$= {Bob, Joe, Beti, Jane, Maria} .

3. Seja X o conjunto de estados no Brasil, cujos nomes começam com "S", isto é, X= {Santa Catarina, S. Paulo, Sergipe}

Seja Y o conjunto de estados, cujos nomes terminam com "e", isto é, Y= {Sergipe, Acre} Então

$X \cup Y$= {Santa Catarina, São Paulo, Sergipe, Acre}

4. Se P= {a, b, c} e Q= {a, c, e, g} então

$P \cup Q$= {a, b, c, e, g}

Provàvelmente, foi notado que os últimos dois exemplos diferem dos dois dois primeiros. No exemplo 3, o conjunto X contém Sergipe como o contém também Y. Mas Sergipe não é registrado mais de uma vez. No 4, os conjuntos P e Q têm dois elementos em comum, a saber, a e c. Êstes são de novo anotados sòmente uma vez, em $P \cup Q$. Estamos querendo afirmar que a união de qualquer conjunto A e qualquer conjunto B é o conjunto constituído de todos os elementos em A junto com todos os elementos de B. Entre os elementos incluídos na união estão, por certo, qualquer elemento que porventura sejam comuns a A e B. Entretanto, um elemento da união é anotado sòmente uma vez, independendo de pertencer a um dos conjuntos ou a ambos. Esta idéia está resumida no seguinte: "A união dos conjuntos A e B é o conjunto constituído de todos aquêles elementos que estejam em A ou em B". (Como é usado aqui, a palavra "ou" não exclue a possibilidade de que um elemento da união possa pertencer a ambos os conjuntos). Note-se que o ato concreto de juntar não está implícado no conceito de união de dois conjuntos. É certamente o caso do exemplo 3 acima.

- Conjunto de Exercícios 1:

Seja:

$A=\{a,b,c\}$ $B=\{a,e,i,o,u\}$ $C=\{b,f,g\}$ e $D=\{u,x,w,x,y,z\}$

Distribua em tabelas os seguintes conjuntos:

1. $A \cup B$
2. $B \cup A$
3. $A \cup C$
4. $B \cup C$
5. $A \cup D$
6. $(A \cup B) \cup C$
7. $A \cup (B \cup C)$
8. $B \cup \{\ \}$

Primeiro, determine a união de A e B, então a união dêste último conjunto e C.

Note $\{\ \}$ é o conjunto vazio, o conjunto que não tem membros.

A D I Ç Ã O

Retornando agora para a explicação da "adição 3 e 5", podemos dizer que o professor seleciona um conjunto A com 3 elementos e o conjunto B com 5 outros elementos. Podemos escrever $n(A) = 3$ (lê-se "o número de elementos em A é 3") e $n(B) = 5$. O conjunto constituído de todos os elementos em A, assim como os de B, é $A \cup B$. Então $n(A \cup B)$ - o número de elementos em $A \cup B$ - é o que chamamos da soma de 3 e 5. Esta soma é representada por "$3 + 5$" (leia-se "3 mais 5"). E, uma vez que contando, encontramos que $n(A \cup B)$ é 8, escrevemos $3 + 5 = 8$.

Em geral, gostaríamos de poder dizer: Para quaisquer dois números a e b, escolhe-se um conjunto A que contenha a elementos, isto é, $n(A)=a$ - e um conjunto B com b elementos - isto é $n(B)=b$. Então $a + b = n(A \cup B)$. Entretanto, tal definição apresenta uma dificuldade. Suponhamos que desejemos determinar a soma de 3 e 5 e para nossos conjuntos escolhemos A e B do exercício acima. Uma vez que $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{a,e,i,o,u\}$, é claro que $n(A)=3$ e

$n(B) = 5$. Então $A \quad B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$. Portanto, $n(A \cup B) = 7$. Mas por certo reagiriam desfavoràvelmente a $3 + 5 = 7$.

Claro que se reconhece o fato de que no último exemplo, a dificuldade surge do fato de que no último exemplo, selecionamos conjuntos que têm um elemento em comum. Quando um professor usa objetos concretos para demonstrar em classe, êsse problema não aparece; mas deve ser considerado ao ser enunciada uma definição. / Quando dois conjuntos não têm elementos comuns são chamados disjuntos ou mùtuamente exclusivos. A definição da soma de 3 e 5 poderia então ser enunciada da seguinte maneira: Sejam A e B conjuntos disjuntos, de modo que $n(A) = 3$ e $n(B) = 5$, então $3 + 5 = n(A \cup B)$.

A definição da soma de qualquer par de números inteiros será a seguinte:

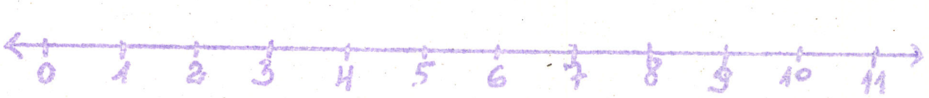
> Se a e b são números inteiros, sejam A e B conjuntos disjuntos, tais que $n(A) = a$ e $n(B) = b$. A soma de a e b demonstra que "$a + b$" é $n(A \cup B)$.

Note-se o papel importante apresentado pelos conjuntos na definição de uma soma.

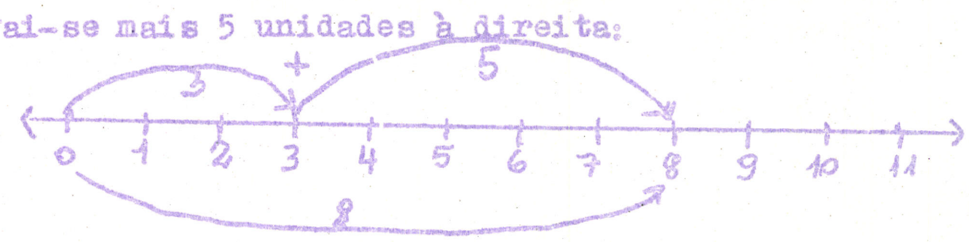
A soma $a + b$ não depende da natureza dos a elementos que compõe o conjunto A, nem da natureza dos b elementos, que compõe o conjunto B, desde que êsses dois conjuntos sejam disjuntos

A atribuição de uma soma a um par de números é essencialmente o que queremos dizer por adição.

Outra abordagem à adição, que está se tornando popular nos programas de mátemática moderna, usa a "linha numérica".



Por exemplo, a soma $3 + 5$ pode ser interpretada assim: Começando-se no 0, segue-se até 3 unidades à direita e então vai-se mais 5 unidades à direita:



O resultado é o mesmo que um só movimento à 8 unidades à direita. A vantagem de começar-se no 0 é que o resultado 8 é obtido imediatamente pelo estudo da linha numérica.

- Conjunto de Exercícios 2:

1. Diga o que significa $7 + 2$ em têrmos de conjuntos.
2. É importante que se dictinga entre a linguagem e

símbolos aplicada aos conjuntos e a linguagem e os símbolos aplicados a números. Se as letras maiúsculas representarem conjuntos, / quais dos seguintes ítens se tornam sem significado, de acôrdo com a definição dada?

a. A união de M e N.
b. A união de 6 e 5.
c. $3 \cup 4$
d. $7 + 6$
e. $n(E) \cup n(F)$
f. $P + Q$
g. $n(P) + n(Q)$
h. A soma de 8 e 3
i. A soma de R e S
j. $E \cup F$

3. Suponha que A é um conjunto tal que $n(A)=5$ e B é um conjunto tal que $n(B)=7$.

Se $n(A \cup B)=10$, que se poderá dizer sôbre os conjuntos A e B?

4. É possível se encontrar dois conjuntos A e B para os quais $n(A) + n(B) \quad n(A \cup B)$? Explique.

5. Use uma linha numérica com as seguintes somas:

a. $2 + 4$ b. $4 + 2$ c. $5 + 1$ d. $3 + 3$

A Propriedade Comutativa da Adição

O desenvolvimento da adição, através do uso de conjuntos, torna possível deduzir-se algumas das propriedades características da adição. A primeira propriedade a ser discutida é exemplificada pelo enunciado: $7 + 2 = 2 + 7$

Êste enunciado ilustra a <u>propriedade comutativa</u> da adição. Apesar do fato $7 + 2 = 2 + 7$ ser óbvio a qualquer pessoa familiarizada com a adição, não é tão evidente ao principiante. De fato, a maioria das crianças de primeiro ano, prontamente determinarão que $7 + 2=9$ mas terão dificuldade com o $2 + 7$. Consequentemente a propriedade comutativa deveria ser enfatizada cêdo na aritmética. Em têrmos gerais, a propriedade comutativa da adição é enunciada do seguinte modo:

<u>Se a e b são números inteiros então $a + b = b + a$.</u>

Por essa propriedade dizemos que: "A adição é comutativa".

Podemos justificar a propriedade comutativa, usando usando a definição de soma. Voltemos aos Exercícios 1 e 2 do Conjun to 1. Verificou-se que $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$ Poderíamos / então escrever:

$$A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$$
$$B \cup A = \{a, e, i, o, u, b, c\}$$

Mas não importa a maneira como são registrados, $A \cup B$ e $B \cup A$ contém exatamente os mesmos elementos. Então escrevemos:

$$A \cup B = B \cup A$$

Não é difícil de se verificar que isso é verdadeiro para qualquer dos conjuntos A e B. O conjunto de todos os elementos encontrados tanto em A ou B (incluindo, claro, qualquer elemento que seja comum a ambos) é o mesmo que o conjunto de todos os elementos em B ou A (ou ambos).

Do fato que, para quaisquer conjuntos A e B, $A \cup B = B \cup A$, a propriedade comutativa da adição aparece. Para se verificar, por exemplo, que: $7 + 2 = 2 + 7$, selecionamos um conjunto A / com 7 elementos e um conjunto disjunto de A, seja B, com 2 elementos. Então, $7 + 2 = n(A \cup B)$, enquanto $2 + 7 = n(B \cup A)$. Mas uma vez que $A \cup B = B \cup A$, segue-se que $n(A \cup B) = n(B \cup A)$ e, portanto, $7 + 2 = 2 + 7$. Em têrmos gerais, se <u>a</u> e <u>b</u> forem dois números inteiros quaisquer, selecionamos conjuntos disjuntos A e B, tais, que $n(A) = a$ e $n(B) = b$. Então $a + b = n(A \cup B)$ e $b + a = bn(B \cup A)$. Temos novamente $A \cup B = B \cup A$, do qual segue-se que $n(A \cup B) = n(B \cup A)$ e, então $a + b = b + a$.

Com crianças nos graus elementares, esta propriedade pode ser expressa com as seguintes casas:

$$\square + \triangle = \triangle + \square$$

Ao se trabalhar com essas casas, concorda-se que o mesmo número deve ser usado para a casa de um formato particular, cada vez que essa forma aparecer na sentença dada.

A importância dessa propriedade se torna mais e mais evidente a medida que a criança se adianta na escola. Entretanto, o professor primário deveria se dar conta de que o simples fato de que isto reduz grandemente o trabalho de memorizar que o aluno / enfrenta, é razão suficiente para se reforçar cedo, a propriedade / comutativa.

A Propriedade Associativa da Adição

Há outras propriedades importantes da adição e estas podem também ser usadas pelas crianças no comêço do estudo da aritmética. Quando se pergunta a algumas crianças qual é a soma de 8 e 7, pensam como o faz o menino na figura abaixo:

$8 + 7 = \square$ Se eu pensar em 7 como $2 + 5$, poderei somar 2 ao 8, assim terei $10 + 5$, ou 15.

Êste menino está tàticamente usando a idéia de <u>agrupamento</u>, que os matemáticos chamam de <u>propriedade associativa da adição</u>. Êle pensa em 7 com $2 + 5$ e raciocina que

$$8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5$$

A afirmativa geral da pesquisa associativa seria:
Se <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> são números inteiros, então
$(a + b) + c = a + (b + c)$

Por causa dessa propriedade dizemos: "A adição é associativa". Novamente, a relação pode ser justificada pelo uso da definição de soma. No Conjunto de Exercícios 1, exemplos 6 e 7, deveríamos ter descoberto que $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Vemos que isto seria verdadeiro para quaisquer conjuntos A, B e C, porque a expressão em ambos os lados da equação representa o conjunto de todos os elementos em A ou em B ou em C. Agora, dados quaisquer números a, b e c, podemos escolher conjuntos A, B e C sem nenhum elemento em comum, de modo que $n(A) = a$, $n(B) = b$, e $n(C) = c$. Então:

$$n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) = (a + b) + c, \text{ e}$$
$$n[A \cup (B \cup C)] = n(A) + n(B \cup C) = a + (b + c)$$

Portanto:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Pode-se também expressar isto com casos:

(□ + △) + ⏢ = □ + (△ + ⏢)

Devido à propriedade associativa, não haverá resultados ambíguos, se forem omitidos os parênteses de uma expressão de soma. Por exemplo, uma vez que $(5 + 3) + 9 = 5 + (3 + 9)$, poderíamos escrever: $5 + 3 + 9$, para representar cada expressão. Note-se entretanto, que nem sempre é assim na matemática. Consider-se a divisão. Note-se que $(24 \div 6) \div 2 = 4 \div 2 = 2$, enquanto que

$24 \div (6 \div 2) = 24 \div 3 = 8$ Uma vez que

$$(24 \div 6) \div 2 \neq 24 \div (6 \div 2)$$

a divisão não é associativa e não podemos escrever $24 \div 6 \div 2$, sem que haja certo acôrdo de agrupamento.

As crianças podem se referir às propriedades asso -

ciativas e comutativas simplesmente como propriedades de "ordem" e "agrupamento".

Muitas vêzes, as propriedades associativas e comutativas podem ser usadas juntas com muita vantagem. Por exemplo, no cálculo $7 + (9 + 3)$, será mais fácil se o 3 fôr agrupado com o 7; mas isso envolve reorganização e reagrupamento (ainda que se o escreva ou não).

$7 + (9+3) = 7 + (3+9)$ pela propriedade comutativa da adição

$= (7+3) + 9$ pela propriedade associativa da adição

$= 10 + 9$ porque $7 + 3 = 10$ e

$= 19$ porque $10 + 9 = 19$ pelo nosso sistema de numeração.

Quando pedimos a uma criança que "confira pela adição", estamos utilizando ambas as propriedades. Considere-se, por exemplo, a coluna das unidades do exemplo abaixo:

$$\begin{array}{r} 27 \\ 54 \\ \underline{32} \end{array}$$

Trabalhando-se de cima para baixo, devemos pensar na soma de $(7+4) + 2$. Trabalhando-se de baixo para cima, teremos $(2 + 4) + 7$. Sabemos que são a mesma coisa, por causa das propriedades comutativas e associativas:

$(7+4) + 2 = 2 + (7+4)$ a adição é comutativa ($7+4$ é intercalado / 2)

$= 2 + (4+7)$ a adição é comutativa

$= (2+4) + 7$ a adição é associativa

Para se calcular a soma de 23 e 45, algumas crianças pensam "$23+40$ é 63 e $63 + 5$ é 68". Analisemos. Primeiro:

$25+45=23+(40+5)$ porque $45=40+5$, pelo nosso sistema de numeração.

$=(23+40)+5$ a adição é associativa

Agora, para determinarmos que $23+40=63$ (ou $60 + 3$) raciocinaremos:

$23+40=(20+3)+4$ porque $23=20 + 3$ pelo nosso sistema de numeração

$=20 + (3+40)$ a adição é associativa

$=20 + (40+3)$ a adição é comutativa

$=(20+40) + 3$ a adição é associativa

$=60 + 3$ porque $20 + 40=60$

Se mudarmos $23 + 40$ por $60 + 3$ na expressão $(23+40) + 5$ teremos

$$
\begin{aligned}
(23 + 40) + 5 &= (60 + 3) + 5 \\
&= 60 + (3+5) \quad \text{a adição é associativa} \\
&= 60 + 8 \qquad \text{porque } 3 + 5 = 8 \\
&= 68 \qquad\quad \text{porque } 60 + 8 = 68
\end{aligned}
$$

Depois de se trabalhar algum tempo nêste sentido, em geral nos convencemos que as propriedades associativa e comutativa/ justificam o reagrupamento (de qualquer modo que quizermos) dos têrmos numa expressão de soma. Isto pode ser demonstrado. Ainda que / não queiramos apresentar provas detalhadas, usaremos livremente a idéia de reagrupamento para a adição. Por exemplo, poderíamos dizer que $[(7 + 1) + (4+9)] + (3+6) = (7+3) + [(9+1) + (6+4)]$ assim o é pelas propriedades associativa e comutativa. Entretanto, uma vez que não importa, na soma, como estão agrupados os números, nem como estão ordenados, os símbolos de agrupamento podem ser omitidos e o cálculo pode ser feito em qualquer ordem.

- Conjunto de Exercícios 3:

1. Identifique a propriedade exemplificada em cada um dos seguintes:

a. $7 + 9 = 9 + 7$
b. $(2 + 3) + 8 = 2 + (3 + 8)$
c. $(4 + 7) + 1 = (7 + 4) + 1$
d. $(2 + 9) + (3 + 1) = (3 + 1) + (2 + 9)$
e. $6 + (4 + 9) = (6 + 4) + 9$
f. $6 + (5 + 4) = (5 + 4) + 6$

Mostre como as propriedades associativas e comutativas podem ser usadas para simplificar o cálculo destas somas:

a. $7 + (3 + 6)$
b. $8 + (5 + 2)$
c. $(4 + 9) + 1$
d. $17 + (28 + 3)$
e. $(16 + 7) + (3 + 4)$

3. Suponha-se que $a \star b$ signifique "2 vêzes a soma/ de a e b". Exemplos:

$1 \star \; = 12 \qquad 4 \star 0 = 8 \qquad 3 \star 7 = 20$

a. É a operação indicada por " $\star$ " comutativa? Como justificaria a resposta?

b. Para calcular $(2 \star 3) \star 4$, primeiro calculamos

2 3. Uma vez que o resultado é 10, $(2 \star 3) \star 4 = 10 \star 4 = 28$

Calcula $2 \star (3 \star 4)$

c. É a operação representada por "✡" associati-va? Explique.

- A <u>Propriedade de 0 na Adição</u>:

No Exercício 8 do conjunto 1, na página 36, encontramos que $B \cup \{\ \} = B$. Uma vez que o conjunto vazio não tem elementos, a união de qualquer conjunto A com um conjunto vazio será A; isto é,

$$A \cup \{\ \} = A$$

Isto nos leva a outra propriedade importante da adição que envolve o número 0. Para cada <u>número</u> <u>a</u>, podemos selecionar/ um conjunto A com <u>a</u> elementos. Agora $\{\ \}$ é um conjunto sem elementos, e é claro, não terá elementos em comum com nenhum outro conjunto. Pela definição de soma, $a + 0 = n(A \cup \{\ \})$

$$\text{Mas se} \quad A \cup \{\ \} = A$$

$$\text{então} \quad n(A \cup \{\ \}) = n(A)$$

$$\text{daí} \quad a + 0 = a$$

Chamaremos a isso de <u>propriedade de 0 na adição</u>. Porque o número 0 se comporta de maneira especial, e esta é chamada / <u>elemento de identidade para adição</u> ou <u>identidade aditiva</u>. O elemento de identidade é também chamado <u>elemento neutro</u>.

Deve ficar bem compreendido que <u>o</u> é um <u>número</u> perfeitamente válido. "Zero" não significa "nada".

- <u>Conjunto de Exercícios 4</u>:

1. Há 100 fatos na adição - de $0 + 0 = 0$ até $9 + 9 = 18$ que as crianças devem memorizar. Se a criança aprende as propriedades comutativas e as propriedades da adição do 0, quantos fatos essencialmente diferentes há?

2. Explique o significado de $a \leqslant b$ em têrmos de adição. (Supondo-se que a e b sejam números inteiros).