

D.E.E. - CURSO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA MODERNA

Obra: "A Matemática Moderna"

Autor: Irving Adler

Capítulo I

Os números para contar

Estamos completamente familiarizados com os rostos das pessoas que vivem conosco. Contudo, raramente temos perfeita consciência das minúcias das suas feições. Se, ao olhar um rosto que conhecemos bem, notamos com particular atenção os seus pormenores, tais como a curva dos lábios ou uma ruga na testa, parece-nos que os estamos a ver pela primeira vez. Então, ao ver êsses traços, em que nunca reparamos, temos repentinamente a impressão de que estamos a observar o rosto de um estranho.

Podemos fazer uma experiência semelhante com os números que nos são familiares na vida quotidiana. Quando utilizamos êstes números recorremos a certas propriedades que êles possuem. No entanto, estamos de tal modo habituados a estas propriedades que dificilmente temos a consciência delas, assim como da maneira como as usamos. Tomaremos agora conhecimento minucioso destas propriedades, e faremos a sua lista, explicitamente. Ao observar com atenção os bem conhecidos números ordinários veremos a surpreendente face nova da Matemática Moderna.

Os primeiros números que todos aprendemos a empregar são aquêles de que necessitamos para responder à pergunta: "Quantos"? São os números 1, 2, 3, 4, 5, etc... Há uma cadeia sem fim de números como êstes. Utilizamo-los para contar e realizamos cálculos com êles, como a adição e a multiplicação. Observemos mais de perto aquêles actos tão simples.

CONTAR

Suponhamos que numa terça-feira, à noite, desejeis saber quantos dias faltam para o fim de semana. Provavelmente, conta-los-eis desta maneira: direis os nomes dos dias __quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado__ e por cada dia que nomeais dobrareis um dedo da vossa mão direita. Depois de completar a lista dos dias, verificais que haveis dobrado todos os dedos da vossa mão direita, com exceção do polegar. Portanto, concluireis que faltam quatro dias para o fim da semana. Encontram-se ocultos sob este modo de proceder três importantes conceitos matemáticos: a idéia de aplicação, a idéia de correspondência um-a-um (correspondência biunívoca) e a idéia de número cardinal.

Um aplicação é um modo de estabelecer uma correspondência entre 2 conjuntos de objetos: a cada elemento de um dos conjuntos associamos, como parceiro, um elemento de outro conjunto. Neste caso, os dois conjuntos são o conjunto dos dias que contastes e o conjunto dos dedos de vossa mão.

Definis uma aplicação, quando escolheis um dedo para dobrar por cada dia que contais.

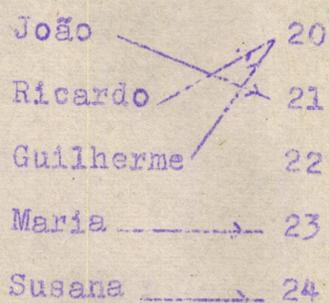
A aplicação pode ser esquematizada no quadro seguinte:

Quarta-feira	→	dedo mínimo
Quinta-feira	→	dedo anular
Sexta-feira	→	dedo médio
Sábado	→	dedo indicador

As pontas das setas indicam que a aplicação tem um sentido. Escolheis um dedo por cada dia que nomeais. Não é o mesmo que escolher um dia para cada dedo.

Para indicar o sentido da aplicação dizemos que é uma aplicação do conjunto dos dias nomeados no conjunto dos dedos. O dedo sobre o qual se aplicou um determinado dia, diz-se a sua imagem segundo essa aplicação.

O diagrama abaixo mostra outra aplicação. Nesta um conjunto de nomes de pessoas foi aplicado no conjunto dos números inteiros de 20 a 24, associando a cada nome a idade, em anos, da pessoa que êle designa:



Essa aplicação difere da outra sob um aspecto importante. Os 2 nomes Ricardo e Guilherme estão ambos aplicados sobre o mesmo número. É um exemplo de aplicação vários-a-um, em que um único objeto pode ser a imagem de mais do que um objeto. Na aplicação dos dias nos dedos, contudo, nunca dois dias se aplicam no mesmo dedo. É um exemplo de aplicação um-a-um, em que cada objeto é imagem, quando muito, de um só objeto.

Na aplicação do conjunto dos dias no conjunto dos dedos da mão direita, um dos dedos, o polegar nunca é utilizado. Por esta razão a aplicação do conjunto dos dias no conjunto dos dedos da mão direita, não é reversível. Se experimentarmos invertê-la, verificamos que o polegar não se aplica em qualquer dia (não há um dia que seja a imagem do polegar). Não podemos considerar esta correspondência como uma aplicação, porque uma aplicação deve fornecer uma imagem para cada objeto pertencente ao conjunto a partir do qual se realiza a aplicação. Contudo, se considerarmos apenas o conjunto dos dedos dobrados, então a aplicação é invertível. Agora, enquanto cada dia nomeado tem um só dedo como imagem, na aplicação inversa cada dedo tem um único dia como imagem. Neste caso, dizemos que os dois conjuntos estão em correspondência um-a-um. Dois conjuntos estão em correspondência um-a-um, quando há uma aplicação invertível que associe cada elemento de um dos conjuntos a um e um só parceiro no outro conjunto.

O diagrama abaixo, onde se empregem setas de 2 pontas, mostra a correspondência um-a-um entre o conjunto dos dias e o conjunto dos dedos dobrados:

Quarta-feira \longleftrightarrow dedo mínimo

Quinta-feira \longleftrightarrow dedo anular

Sexta-feira \longleftrightarrow dedo médio

Sábado \longleftrightarrow dedo indicador

Quando 2 conjuntos se podem pôr em correspondência um-a-um por meio de uma aplicação, dizemos que contém o mesmo número de objetos, ou que têm o mesmo cardinal. Todos os conjuntos que têm o mesmo número cardinal podem ser postos em correspondência um-a-um, uns com os outros. Formam uma família de conjuntos associada com aquêlê número cardinal. Cada número cardinal tem uma família de conjuntos que lhe é própria. Por exemplo: os conjuntos que consistem apenas em objetos sôzinhos, pertencem à família dos conjuntos associada com o número que denominamos um. Os conjuntos de pares de objetos pertencem à família de conjuntos associada com o número que chamamos dois. Os conjuntos de ternos pertencem à família de conjuntos associada com o número que chamamos três, etc.

Cada conjunto que correntemente consideramos, pertence a uma destas famílias. Quando nos fazem a pergunta: "Quantos objetos há nêsse conjunto?", é como se na realidade nos perguntassem: "A que família de conjuntos pertence?" Para responder a esta pergunta seguimos êste processo: escolhemos um conjunto em cada família e usamo-lo como conjunto padrão, para efetuar comparações; depois comparamos o conjunto que nos interessa com cada um dêstes conjuntos padrões, até encontrar um com que aquêlê se possa pôr em correspondência um-a-um. Desta maneira descobrimos a família de conjuntos a que êle pertence e o número cardinal associado a esta família. É precisamente isto que fazeis quando pondeis correspondência os dias com os dedos.

Usais o conjunto que consiste só no vosso dedo mínimo como um conjunto padrão para representar o número um. Utilizais o conjunto formado pelo dedo mínimo e o dedo anular como um conjunto padrão para representar o número dois. Empregais o conjunto constituído pelos dedos mínimo, anular e médio, como um conjunto padrão para representar o nº três. O conjunto formado pelos dedos mínimo, anular, médio e indicador é o vosso conjunto padrão para representar o nº quatro. Foi por isto que tirastes a conclusão, neste caso, de que faltavam 4 dias para o fim de semana.

Em outras ocasiões, usamos um método de contagem que é mais sutil, mas essencialmente o mesmo. Contamos 4 objetos dizendo para nós mesmos "um, dois, três, quatro". Enquanto contamos, estamos estabelecendo uma correspondência um-a-um entre os objetos que estamos a contar e os conjuntos dos números pronunciados. O primeiro objeto é posto em correspondência com o conjunto formado somente pela palavra um; põem-se em correspondência os dois primeiros com o conjunto formado pelas palavras um, dois; põem-se em correspondência os três primeiros com o conjunto formado pelas palavras um, dois, três; e assim sucessivamente.

Empregando os nomes dos números dispostos por ordem de grandeza, continuamos a ampliar o conjunto padrão, pouco a pouco. Quando a contagem termina, sabemos que o último nome de nº usado é o nº cardinal do último conjunto padrão que pusemos em correspondência com os objetos que estamos a contar. Portanto, é também o nº cardinal do conjunto dos objetos contados. Empregando conjuntos padrões formados dos nomes dos números dispostos por ordem de grandeza, condensamos numa só tôda uma sucessão de operações de correspondência, para acabar por responder à pergunta "Quantos?".