

1ª EVOLUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DO NÚMERO NA CRIANÇA



As pesquisas feitas neste domínio pareceram indicar três fatos:

1. A aquisição da representação do número da criança, comparada com a aquisição das outras representações, faz-se relativamente tarde.
2. Essa aquisição tem como ponto de partida o processo da contagem dos objetos.
3. A representação do número é, no começo, uma representação do número dos objetos e de acontecimentos concretos, pouco à pouco, transformam-se numa representação abstrata, numa noção.

(A) A atividade mental da criança, sua facilidade de elocução e mesmo sua habilidade motora estão, muitas vezes, bem desenvolvidos, embora não manifeste ainda o menor traço de uma representação do número. É necessário não confundir o fato de uma criança de 4 anos contar de 1 a 50, com a aquisição da representação da noção de número. Essa performance da criança de 4 anos é pura e simplesmente o resultado de uma aprendizagem mecânica de uma série de palavras bem associadas.

Enquetes feitas com crianças de 6 anos, no início da escola primária, relataram e revelaram que a representação do número é desigualmente desenvolvida nas diferentes crianças. Algumas manifestam já a compreensão de 1 a 6, outras de 1 a 10, e a maioria não passa de 1 a 3. Essa desigualdade ou diferença é devida, em grande parte, às influências fortuitas da educação. O fator meio que tem um papel tão importante nos outros processos evolutivos da criança, tem igualmente aqui. O processo da representação do número desenvolve-se prematuramente se no ambiente em que vive a criança isto se faz de uma maneira sistemática. Os resultados conseguidos com o método Montessori confirmam essa afirmação: nas escolas desse gênero a criança de 4 anos parece chegar a compreender os números de 1 a 10.

Outra observação constatou que as crianças de 6 anos, no início da escola primária, manifestam um retardamento considerável no domínio do cálculo com relação a outros conhecimentos.

Não são somente as circunstâncias da vida que dificultam o desenvolvimento do cálculo na criança. Mas a compreensão do número e

a manipulação dos algarismos dependem de processos mentais que se desenvolvem relativamente tarde na criança.

Êsses processos mentais, em referência, são: performances físicas da atenção, memória, pensamento reflexivo e por outro lado performances aritméticas específicas nas quais intervem notadamente a natureza abstrata do número. Ademais o pensamento infantil desenvolve-se de uma maneira lenta e a memória dos algarismos desenvolve-se tardiamente na criança.

(B) Como se processa a aquisição do número: Numerosos observadores comentaram que a criança sente uma dificuldade extraordinária para apreender o número dos objetos. Essa apreensão se realiza da seguinte maneira: A criança colocada em presença da pluralidade de objetos concretos, em lugar de fornecer o número abstrato que corresponda a essa pluralidade, começa a contar sucessivamente os diferentes objetos. A criança apreende, portanto, a pluralidade dos objetos presentes de uma maneira sucessiva por um número correspondente de atos de percepção.

Partindo dessa constatação, PREYER e outros pesquisadores chegaram a conclusão que a criança adquire suas primeiras representações do número contando os objetos: "um, dois(ainda um), ainda um, etc". Evidentemente essa tomada de consciência de uma multiplicidade de objetos que para a criança toma a forma de sucessão, de uma repetição da unidade, não é ainda a apreensão da noção de pluralidade, mas constitui uma base de experiência donde a representação da multiplicidade poderá ser despreendida pouco a pouco.

Tudo leva a crer que se desenvolve antes uma representação intuitiva de uma, pluralidade indeterminada de objetos ou acontecimentos. Assim PREYER relata a observação seguinte: Uma criança de 11 meses brinca com nove cubos de madeira; se furtivamente nós levantamos um dos nove cubos, a criança sentirá que falta alguma coisa; parece ter já uma certa representação de uma multiplicidade indeterminada. Essa mesma criança, com 27 meses, é incapaz de compreender a designação dos números de 1 a 4; quando se lhe pede, por exemplo, para mostrar dois cubos, embora conheça o nome dos algarismos de 1 a 5 desde os 25 meses, não mostrará. Com 2 anos e 5 meses a criança tentará, pela 1ª vez, contar seus nove cubos, sob a forma: "um, ainda um, ainda um etc.". Isso mostra quanto é difícil para a criança a apreensão



de uma multiplicidade determinada e sua designação exata pelo nome de um algarismo. A criança, para começar a ter uma representação determinada do número, dependerá, em grande parte, do meio ambiente: por atrações sistemáticas será possível obter o desenvolvimento do cálculo. A experiência diária confirma isto: a criança abandonada a si mesma chega na escola com uma inteligência do número muito obscura. As crianças que são influenciadas sistematicamente, porém, já possuem representações bem mais precisas.

(C) Quanto ao desenvolvimento progressivo da noção do número, e das operações do cálculo, há poucas pesquisas a respeito. Parece que a compreensão do número supõe duas exigências importantes:

1. É necessário que a criança apreenda, desde cedo, o conteúdo lógico da noção do número.
2. É necessário que a criança desenvolva, pouco a pouco, a noção do número de seu fundo intuitivo.



As operações do cálculo devem se transformar, pouco a pouco, em processo associativo-reprodutivo, isto é, em processos puramente mecânicos, afim de garantir a segurança e a rapidez que são as características dessas operações.

RUSCHKE distingue, na operação do cálculo, quatro etapas progressivas de abstração:

1. O cálculo sensorial: realizado por meio de cubos, bolinhas, etc.
2. O cálculo figurativo: realizado por meio de traços, de pontos, etc.
3. O cálculo simbólico: realizado por meio de algarismos, de números.
4. O cálculo mental.

Tipos de imaginação com que as crianças realizam as primeiras operações de cálculo: Uma pesquisa de ECKHARDT revelou que entre as crianças que iniciam a calcular há muitas do tipo visual. Sobre as 52 alunos da experiência de ECKHARDT:

- 25% não eram visuais
- 36,5% eram audio-visuais
- 38,5% eram visuais.

Comparando essa pesquisa com a pesquisa realizada por MÜLLER sobre o cálculo mental do adulto, constata-se que o cálculo mental se transforma paulatinamente em verbal, isto é, do tipo auditivo-motor. Pode-se explicar esse fato por um progresso na abstração ou também por uma mudança do tipo de imaginação.

## 2º O MECANISMO DO CÁLCULO NO ADULTO

Como o objetivo do ensino do cálculo é provocar na criança a segurança e a rapidez que caracterizam o cálculo no adulto, examinaremos, brevemente, a maneira de calcular do adulto.

No adulto, as operações do cálculo elementar desenvolvem-se de uma maneira puramente verbal, quando calcula mentalmente  $7 \times 8 = 56$  reproduz somente as palavras, o fundo intuitivo que caracteriza o cálculo do iniciante desapareceu completamente. E a função lógica da ~~multiplicidade~~ ou da multiplicação, o mais ou o menos das escalas, a consciência da exatidão do resultado, não afloram vagamente na sua consciência.

Parece, contudo, que esse cálculo puramente mecânico, as vezes, é substituído, mesmo no adulto, pelo emprêgo de números formando-se, mais refletido e baseado na inteligência. Isto se produz notadamente no caso onde o processo mecânico não funciona por uma ou outra razão e também no caso onde são realizadas as operações mais complicadas e onde o problema suposto não é diretamente compreendido. Nessas circunstâncias o adulto recorre a outros meios do que os processos puramente verbais: seja por um meio qualquer para se representar intuitivamente os números em questão, como por exemplo uma lembrança do seu desenho, de sua elaboração, seja por uma reflexão sobre o sentido do problema, sobre o valor funcional das operações a a efetuar sobre as operações de grandeza entre os números indicados.

Numa pesquisa sobre um grupo de instrutores e estudantes BOFJU SCHANOFF procura descrever o processo que se desenrola nesses durante as operações de cálculo. Entretanto a medida que o aluno adquire experiências, estas ajudas (escalas, esquemas individuais, situações do problema, construção mental, regra a empregar) desapareciam pouco a pouco e eram substituídas por processos puramente mecânicos das associações verbais. As vezes também o resultado se apresentava



espontaneamente sem que os processos intermediários tivessem tempo de intervir.

Numa pesquisa semelhante, mas essa feita com alunos, FRINGS constatou que na criança ainda não exercitada perfeitamente a reprodução da resposta não se faz de uma maneira puramente auditivo-motora. Quando a criança, por exemplo, não domina perfeitamente a tabuada da multiplicação, cria, espontaneamente, associações secundárias. FRINGS cita a maneira de proceder de um dos alunos assim examinados:

$$\begin{aligned}7 \times 8 &= 10 \times 8 - 2 \times 8 = 56 \\9 \times 7 &= 10 \times 7 - 7 = 63 \\4 \times 8 &= 2 \times 8 + 2 \times 8 = 32 \\6 \times 7 &= 3 \times 7 + 3 \times 7 = 42 \\8 \times 7 &= 10 \times 7 - 14 = 56 \\4 \times 9 &= 10 \times 4 - 4 = 36 \\7 \times 6 &= 7 \times 3 + 3 \times 3 = 42\end{aligned}$$

### 3º MÉTODOS PARA FAZER ADQUIRIR A COMPREENSÃO DO NÚMERO

Não analisaremos o problema psicológico de saber se somos capazes de conhecer o número determinado de uma pluralidade por uma apreensão simultânea ou sômente por uma apreensão sucessiva de impressões ou de objetos. Ocupar-nos-emos unicamente do problema da compreensão do número pelo aluno.

Entre os práticos da escola duas concepções se opõem. Para fazer o aluno adquirir uma primeira representação do número, uns queriam iniciar o ensino do cálculo pela apresentação de "números intuitivos", outros insistiam sôbre o valor do método de "fazer contar". Com efeito, constata MEUMANN, êsses dois métodos não se opõem, mas ambos são parciais e necessariamente devem se completar para formar um método válido. O método dos "números intuitivos" insiste unilateralmente sôbre o momento *ótico intuitivo e o mom. espacial da representação done* e se baseia na apreensão simultânea de uma pluralidade de objetos espaciais. O método de "fazer contar", ao contrário, apoia-se unilateralmente sôbre o momento temporal da representação do número e se baseia seja na apreensão sucessiva de uma pluralidade de objetos espaciais ou temporais, seja sôbre a apreensão de u-



ma pluralidade de processos temporais ou de uma repetição de um processo idêntico no tempo.

O valor relativo desses dois métodos aparecerá se examinarmos as vantagens e as desvantagens de cada um. Essa justaposição dará indicações preciosas para a fusão dos dois métodos.

### Vantagens do método de "fazer contar"

1. O método de fazer contar, por um lado, não utiliza a intuição dos objetos ou dos acontecimentos concretos e, por outro lado, passa rapidamente para o cálculo abstrato que é um dos objetos imediatos da aprendizagem do cálculo. Experiências revelaram que se o professor demora muito nos "números intuitivos", os alunos dotados para o cálculo sofrem um retardamento considerável para o cálculo abstrato.
2. É mais fácil, para um aluno menos dotado, contrair de uma maneira sucessiva do que avaliar simultaneamente um conjunto de impressões ou mesmo muitos grupos de um conjunto.
3. Os processos que estão na base desse método estimulam a atenção do aluno mais do que as imagens intuitivas: enquanto o método dos "números intuitivos" exige somente uma atenção passiva, o método de fazer contar exige uma atenção ativa.
4. No momento que as imagens intuitivas exercem a impressão do campo da consciência, isto é, o número de impressões que os alunos capazes de perceber simultaneamente, apresentam dificuldades especiais para todas as crianças. Procurou-se remediar isto agrupando os elementos do conjunto. Apresenta-se assim grupos de flechas, grupos de pontos, grupos de bolinhas, grupos de cubos. As pesquisas de FREEMANN em LEIPZIG mostraram que os alunos menos dotados são particularmente incapazes de apreender com precisão os elementos agrupados. Essas crianças, portanto, podem obter bons resultados com o método de "fazer contar".
5. O grande perigo do método dos números intuitivos, baseando-se sobre a representação de imagens óticas simultâneas, é de fazer ao aluno crer que o trabalho do cálculo se reduz a um simples trabalho de associação e de memorização. O método de fazer contar, ao contrário, graças a sua maneira de proceder sucessivamente, leva o aluno a se ocupar mais ativamente da relação que existe entre os números, relação que resulta de sua posição respectiva na série de algarismos.



### Desvantagens do método de fazer contar

O fato de que o método de fazer contar baseia-se menos sobre a intuição do que o método dos números intuitivos, corre o perigo que falte uma certa precisão para a representação que as crianças fazem do número.

1. Esse método exige um trabalho maior da memória visto que procede de estímulos sucessivos, estímulos que desaparecem facilmente da consciência.

2. Esse método dirige-se quase exclusivamente ao tipo imaginativo auditivo e auditivo-motor e desfavorece o tipo visual.

É suficiente inverter essas vantagens e desvantagens do método de fazer contar para se ter as desvantagens e as vantagens do método dos números intuitivos. Esses dois métodos devem se completar harmoniosamente. O bom professor, indiferentemente, segundo as necessidades e as aptidões dos alunos, usará ambos os métodos.

Um primeiro esforço de síntese foi feito pelo Dr. Wilk, que pretendia conservar as vantagens dos dois métodos, evitando os seus defeitos. A idéia fundamental desse novo método é conseguir uma apreensão simultaneamente do número, a tabela intuitiva não pode computar mais que quatro impressões, por isso escolhe o número cinco como primeira unidade superior do sistema numérico e não mais o número dez, que já é considerada a segunda unidade superior. Nesse sistema de cinco é possível abarcar de uma só vez os objetos apresentados, e em consequência, a intuição progride sempre por grupos de cinco. A partir da dezena o processo intuitivo se transforma, pouco a pouco, em um processo, como idéia essencial, a realização das primeiras operações por essas unidades de cinco.

LAM e WALSEMANN pesquisaram sobre a melhor maneira de dispor os elementos espaciais da tabela intuitiva. WALSMANN trabalhou com a disposição esquemática seguinte, disposição que dispensa, sem dúvida, todo o comentário.





## 4ª PESQUISAS EXPERIMENTAIS SÔBRE O SUJEITO DO CÁLCULO

A matéria das pesquisas experimentais ocuparam-se da análise psicológica do cálculo no adulto. Seu valor do ponto de vista pedagógico é duvidoso, porque como foi mostrado acima o cálculo do adulto desenvolve-se de uma maneira diferente do cálculo do iniciante. Quando o adulto executa operações de cálculo não faz senão um jogo de associações bem estabelecidas e puramente mecânicas, sua consciência não registra serão o nome dos números utilizados. A imagem intuitiva desapareceu.

Deixaremos essas pesquisas feitas em adultos e contentar-nos-emos em apresentar algumas pesquisas que se ocuparam do cálculo na criança.

ECKHARDT quis determinar a influência dos elementos visuais sôbre a memória dos números e sôbre as operações elementares. Os sujeitos da experiência eram alunos de oito a dez anos. A pesquisa durou dois anos. Começou por estabelecer o tipo imaginativo dos 52 alunos em observação e encontrou:

- 20 (38,5%) do tipo visual.
- 19 (36,5%) do tipo visual e auditivo-motor
- 13 (25%) do tipo não visual.

Em seguida examinou os diferentes gêneros de representações visuais, utilizados pelos alunos para representar os números ou operações do cálculo. Os resultados principais foram os seguintes:

1. As imagens de pontos agrupados são utilizados no trabalho mental somente até o fim do 1º ano escolar. Parece que as imagens intuitivas tem um papel de meio mnemotécnico que a consciência elimina pouco à pouco considerando-se como ajuda inútil e incômoda.
2. Durante o segundo ano, a criança se habitua a utilizar as imagens dos algarismos para se representar interiormente as noções dos números, sejam imagens de algarismos isolados, sejam imagens de algarismo colocados em série. Entretanto somente os alunos do tipo visual vêem interiormente as séries de algarismos e sabem utilizá-las.
3. Muitos alunos, para se representar os algarismos buscam ajuda nas diferentes "imaginações concretas": um aluno imagina os al-

garismos em questão escritos sobre o banco, outro sobre seu caderno, um terceiro como o professor escreveu sobre o quadro negro. Essas representações auxiliares são utilizadas pelos alunos do tipo visual.

ECKHARDT pesquisou a influência exercida por essas representações visuais sobre a memória dos números, memória medida pela retenção imediata das séries de algarismos. Fez as seguintes constatações:

1. Os alunos do tipo visual tem uma excelente memória dos números. Esses alunos também se distinguem por uma grande facilidade nas operações de cálculo. Pode-se concluir que há uma relação entre a faculdade de perceber interiormente as séries de algarismos e a rapidez na resolução das operações elementares. Como o número de alunos visuais é relativamente grande, o professor no ensino deverá levar em conta esse fato. Em geral, os alunos ignoram seu tipo imaginativo. O professor terá como tarefa a descoberta do tipo imaginativo de cada aluno e deverá, por outro lado, mostrar aos mesmos como poderão servir-se desse conhecimento.

2. O número das representações visuais de algarismos pode ser aumentada pelo exercício.

A conclusão prática que se tira dessa pesquisa é, portanto, que o professor deve julgar com grande prudência os primeiros resultados no cálculo do iniciante.

Muitas vezes, com efeito, aquele que julgamos ter uma má memória dos algarismos, na realidade seu retardamento no cálculo provém do fato que o aluno não sabe aproveitar seu tipo imaginativo. Um outro perigo que corre o professor, precisamente, nessas performances elementares, é supor que todos os seus alunos têm o seu tipo imaginativo.

Assinalamos que o tipo imaginativo tem igualmente um papel capital na maneira de calcular da criança. A criança visual calcula referindo-se continuamente às séries de algarismos vistos anteriormente, seu trabalho é, em geral, menos rápido, porém mais seguro do que aquele tipo ou então do tipo auditivo. A criança auditivo-motora, calcula, não vendo interiormente, mas pronunciando interiormente as séries sucessivas de algarismos; é o calculador mais rápido, porém menos seguro. Constatou-se que as aptidões aritméticas excepcionais são muitas vezes fundadas por um lado, sobre um tipo imaginativo unilateral (Francisco é puramente auditivo, Mário puramente visual), e por outro lado, sobre

uma excelente memória dos algarismos e por um vivo interesse por tudo aquilo que se relaciona com as operações dos algarismos.

Como essa pesquisa parece provar que a memória de séries de algarismos é a base psicológica e didática mais importante do cálculo elementar.

RANSCHBURG organizou pesquisas que tinham por objetivo medir o tempo empregado pelos alunos para executar as diferentes operações de cálculo. Constatou que os alunos menos dotados calculam, em média, muito mais lentamente do que os alunos normante, digo, normalmente dotados. Comparando as quatro operações elementares do ponto de vista do tempo, concluiu que a multiplicação se executa mais rapidamente seguindo a adição, a divisão e em último lugar a subtração que parece ser a operação mais difícil.

#### 5º AS BASES PSICOLÓGICAS DA APTIDÃO PARA A MATEMÁTICA

Assinalemos em seguida que as operações aritméticas e as operações matemáticas não são a mesma coisa e que é necessário distinguir entre a aptidão para o cálculo e aptidão para a matemática. O cálculo é essencialmente um trabalho associativo e mecânico da memória; a reflexão não intervém, senão acidentalmente, e sempre sob uma forma muito simples. O trabalho matemático, ao contrário, é sempre uma reflexão e uma colocação consciente das relações entre os algarismos e o problema a resolver.

As necessidades diárias da prática colocaram o problema de saber em que consiste essa aptidão para a matemática. Em toda a classe encontram-se, com efeito, um ou dois alunos particularmente dotados para a matemática sem serem muito brilhantes nas outras disciplinas; e inversamente, alunos excelentes nas outras disciplinas e péssimos matemáticos. Para encontrar uma explicação para essa constatação MEUMANN propõe examinar certos casos particulares, digo, para encontrar uma explicação MEUMANN propõe examinar certos traços particulares do caso e notadamente:

1. A natureza da sua memória: memória de nomes ou memória de algarismos?

2. Seu interesse dominante: Todo o aluno parece ter seja um interesse específico pelos algarismos, seja um interesse específico pelos elementos linguísticos.

3. Seu tipo imaginativo: um tipo puramente visual ou puramente auditivo parecem favorecer a aptidão para a matemática.

4. Pesquisas experimentais deveriam examinar se a matemática requer um desenvolvimento particular da representação espacial.

5. Existe um gênero de reflexão especial, própria para aqueles que se ocupam de noções abstratas de grandeza e de função?



*Requiere  
ser por  
Wentzel*