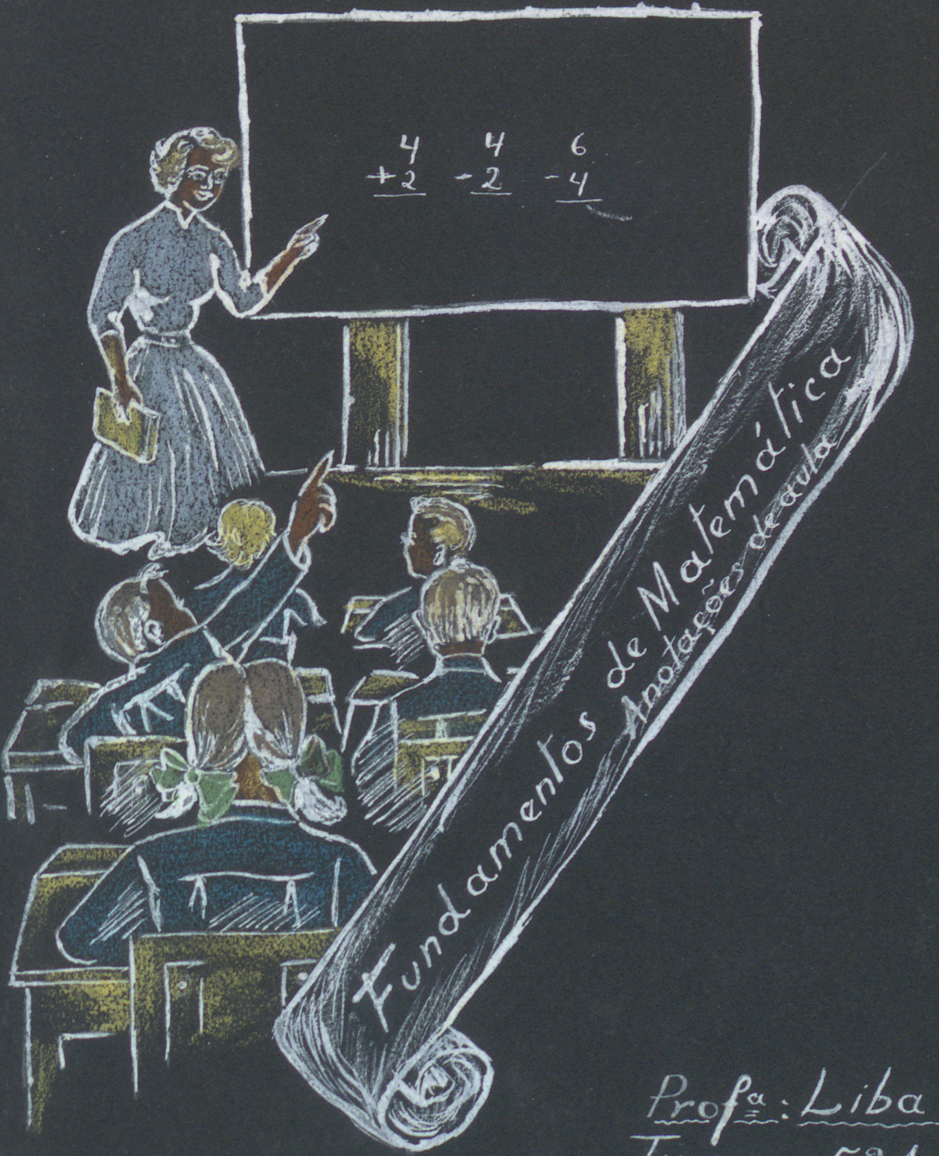


Profª: Liba
Turma: 521
Ano: 1957

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

AULAS DADA PELA PROFESSÔRA : D. Liba

DATA : 7 de agôsto de 1957

CURSO : SUPERVISÃO ESCOLAR

BIBLIOGRAFIA : 1) Aritmética racional - de A. A. Monteiro .

2) Conceitos Fundamentais da Matemática - de B.J. Caraça.

IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA NA VIDA CONTEMPORÂNEA

Um dos pontos básicos para fundamentar matemática é o professor possuir conhecimentos profundos do assunto e gostar do que vai ensinar. De posse desses pontos básicos, o professor encontrará recursos para despertar nos alunos o gôsto pela matemática, tornando fácil, aos mesmos, , compreenderem o que for sendo exposto .

Concluimos daí que a falta de gôsto é derivada da falta de fundamentação. Só gostando poderemos desenvolver e elaborar com prazer .

HISTÓRICO DA MATEMÁTICA

Estudando o histórico da civilização vemos que o homem precisou da matemática desde a época em que começou a pensar como homem.

Ela funcionou dêsde que se conhece as primeiras atividades do homem.

Usada êla é em todos os setores. Ela influiu junto com as outras ciências, para o nosso bem estar e conforto .

Quanto mais o homem foi ampliando sua vida de relação, mais foi precisando da matemá - tica .

Mesmo se realizassemos a abstração do homem, mesmo o homem só necessita da matemática.

Concluimos disso que : o homem sòzinho usa a matemática, mas à vida de relação não é possivel sem a matemática.

A soma e um dos dois nº são dados o resultado é um dos dois componentes de uma soma .

A ilustração é feita assim :

● ● ● ○ ○

Há autores que consideram 4 situações na subtração, mas na realidade são 3 as situações e na 3º sitauação existe duas apresentações diferentes .

Na idéia essêncial dos três processos está sêmpre da subtração, ou seja , achar o outro .

MULTIPLICAÇÃO

Na multiplicação o multiplicando é o passivo, é o número concreto.

O multiplicador é o ativo, é o abstrato.

O produto é da natureza do multiplicando.

Ex. : 3 x 5 livros = 15 livros

Se multiplico livros só posso ter um produto com livros .

Ao efetuarmos a multiplicação sabemos que 15 é múltiplo de 3 e 5 porque contém êsses números. E 3 e 5 são fatores porque estão contidos em 15.

Assim teremos : todos os números múltiplos. O multiplo é primo quando contém só a si e a unidade . É composto porque além de si e da unidade contém outros exatamente .

Explicando melhor : Os múltiplos podem ser : primos e compostos .

Saõ primos quando contém êle mesmo e a unidade . Ex. : 5 é multiplo de 5 e da unidade.

São múltiplos quando além dêle mesmo e da unidade contém , exatamente , outros fatores .

CONCEITO DE MULTIPLICAÇÃO :

Ex. :

$$\begin{array}{r} 2 \\ 2 \\ + \; 2 \\ 2 \\ \underline{2} \\ 10 \end{array} \qquad 5 \times 2 = 10$$

No primeiro exemplo eu tenho uma soma de várias parcelas iguais .

A multiplicação não é nada mais que uma soma abreviada de parcelas iguais .

(Êste conceito é completo ,é básico no que diz respeito a multiplcação de nº inteiros,mas já não acontece assim quando chegamos as frações, pois, não é possivel somar parcelas . Ex. :

1/3 x 8 b = Não é possivel somar estas parcelas porque 1/3 não chega a ser uma vez.)

Ex. : Multiplicador 1/2 x 8 multiplicando; relacionanado com a unidade eu tenho que o multiplicador é a metade do unidade logo : 1/2 x 8 = 4.

multiplicador : 1 :: produto : multiplicando

O conceito amplo da multiplicação que abrnge os nº inteiros, fracionários e irracionais, é :

Por isso, dizem que os homens, sentindo essa necessidade, foram criando lentamente, algo de maravilhoso, que são : " Os números naturais" 1, 2, 3, ...

Os números naturais são uma invenção do pensamento humano.

O homem levou milhares de anos para criar os números naturais . Não sabemos com certeza quando foram creados.

Estudando as tribos mais primitivas chegou-se a conclusão que é a gênese do número, a base da Didática e da Matemática.

O homem depois de ter criado a idéia quantitativa no pensamento, retirou da experiência, do empírico, do tangível a aplicação do número e nesta abstração êle constróe uma ciência.

Portanto o número é uma criação do pensamento humano, partindo da experiência. A experiência é que fundamenta o número .

A primeira expressão da idéia numérica é o fato de criar um fato para representar outro fato .

No fato de corresponder um fato, com outro, vamos encontrar a gênese do número .

Ex. : Os pastores marcavam, no seu cajado, para cada ovelha que sumia, uma pedrinha ou algo semelhante .

Quer dizer representavam um fato, por outro fato. É isso que se chama corresponder .

Para haver correspondência é preciso haver fatos e a reunião de fatos constitui o conjunto , que estudaremos mais adiante.

NOTA : (Idéia numérica é a gênese do número) Pitagora dizia: "O número é a alma de tôdas as cousas. (Poder metafísico)

Afim de reafirmar o assunto acima foi feita a seguinte pesquisa do livro : " CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA " de Bento de Jesus Caraça - 3ª edição - 1952 - Lisboa .

PROBLEMA DE CONTAGEM

1) Números naturais : A contagem, operação elementar da vida individual e social .

Por isso, dizem que os homens, sentindo essa necessidade, foram criando lentamente, algo de maravilhoso, que são : " Os números naturais" 1, 2, 3, ...

Os números naturais são uma invenção do pensamento humano.

O homem levou milhares de anos para criar os números naturais . Não sabemos com certeza quando foram creados.

Estudando as tribos mais primitivas chegou-se a conclusão que é a gênese do número, a base da Didática e da Matemática.

O homem depois de ter criado a idéia quantitativa no pensamento, retirou da experiência, do empírico, do tangível a aplicação do número e nesta abstração êle constróe uma ciência.

Portanto o número é uma criação do pensamento humano, partindo da experiência. A experiência é que fundamenta o número .

A primeira expressão da idéia numérica é o fato de criar um fato para representar outro fato .

No fato de <u>corresponder</u> um fato, com outro, vamos encontrar a gênese do número .

Ex. : Os pastores marcavam, no seu cajado, para cada ovelha que sumia, uma pedrinha ou algo semelhante .

Quer dizer representavam um fato, por outro fato. É isso que se chama <u>corresponder</u> .

Para haver correspondência é preciso haver fatos e a reunião de fatos constitui o <u>conjunto</u> , que estudaremos mais adiante.

<u>NOTA</u> : (Idéia numérica é a gênese do número) Pitagora dizia : "O número é a alma de tôdas as cousas. (Poder metafisico)

Afim de reafirmar o assunto acima foi feita a seguinte pesquisa do livro : " CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA " de Bento de Jesus Caraça - 3º edição - 1952 - Lisboa .

<u>PROBLEMA DE CONTAGEM</u>

1) Números naturais : A contagem, operação elementar da vida individual e social .

Necessidade da vida corrente exigem contagem . Ex. : Pastor para contar seu rebanho; operário com seu salário , etc.

Mesmo isolado o homem necessita da contagem : sucessão dos dias, alimentos (quantidade)

Vida social : aumento de intensidade, tornando mais desenvolvidas as relações dos homens, uns com os outros; contagem necessidade cada vez mais importante e mais urgente .

"Como resolveram os homens o problema da necessidade da contagem ?"

Pelos números naturais : É a resposta : 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.

Quanto tempo durou a criação dêsses números ?

Há 20 000 ou mais anos, o homem primitivo não tinha dêstes números o mesmo conhecimento que temos hoje .

Na Africa e Australia, estudando certos grupos primitivos nos elucidaram um pouco a questão.

Resultados gerais dêsse estudo :

a) A idéia de número não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se, formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a idéia de número, para depois aplicar à prática de contagem, é comoda mas falsa .

b) Esta afirmação é comprovada pelo que se passa ainda hoje em alguns povos . Há tribos da Africa Central que não conhecem os números além de 5 ou 6 . (tudo que passe disto é <u>muitos</u>) .

<u>Fato essencial</u> : o maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições de vida econômica desses povos; quanto mais intensa é a vida econômica desses povos ; quanto mais intensa é a vida de relação, quanto mais frequentes e ativas são as trocas comerciais dentro e fora da tribo, maior é o conhecimento dos números .

<u>FATORES HUMANOS</u>

Não são apenas as condições da vida social que influem no conhecimento dos números natu -

rais ; atuam nêles, também :" condições humanas individuais ."

Em primeiro lugar, a maneira como a contagem se faz; para pequenas coleções de objetos, é habitual contar-se pelos dedos e êste fato teve grande influência na aparecimento dos números ; não é verdade que o nome dígito que designa os números naturais de 1 a 9 vem do latim digituo que significa dedo .

Mas há mais ou menos a base do nosso sistema de numeração é 10 , número de dedos das duas mãos. (12 seria melhor) .

Põe a vida primitiva outros problemas ?

Os povos primitivos mais atrasados que hoje se conhecem têm uma vida social tão pouco desenvolvida que para os problemas que se lhes põem, bastam os números naturais .

É só quando o nível de civilização se vai elevando e, em particular, quando o regime de propriedade se vai estabelecendo que aparecem novos problemas - determinações de comprimentos, áreas - os quais exigem a introdução de novos números .

O SÍMBOLO ZERO

O homem civilizado dehoje, mesmo com conhecimentos matemáticos que vão além de instrução primária começaria a sucessão não pelo um mas por zero e escrevê-la-ia assim :

0, 1, 2, 3, 4,...

A criação de um símbolo para representar o nada constitui " um dos atos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão" .

Essa criação é relativamente recente (primeiros séculos da éra cristã) e foi devida as exigências da numeração escrita . O zero desempenha papel importante na numeração .

TEORIA DOS CONJUNTOS

Os autores não podem definir alguma cousa, para deixá-lo para sempre, por isso, não definiremos número, nem conjunto, mas antes, porém podemos conceituá-los.

O conceito de conjunto é uma idéia intuítiva .

Os elementos de um conjunto tem uma característica comum, que os reune como um todo.

Podemos, também, dizer se um determinado elementos pertence ou não ao conjunto.

Por ex. : Os professôres do R. G. do Sul tem como característica todos dos professores enquanto que se dissermos professores de Pôrto Alegre incluiria não todos os professores, mas apenas os de Pôrto Alegre . Nêste último a característica é professores de Pôrto Alegre , enquanto que no primeiro a característica é todos os professores.

"A característica é o que une os elementos em todo, digo, em um todo."

Pela característica é permitido, ainda, que se faça a separação do elemento que não pertence aquêle conjunto.

Resumindo : Num conjunto há :

1) Há uma característica em comum.
2) Essa característica é que dá unidade ao conjunto .
3) Pela característica podemos separar os elementos pertencentes a outros conjuntos. É intuitivo e dá possibilidades de reconhecer os elementos dos conjuntos.

A idéia de conjunto é estendida a êste conjunto que é chamado conjunto unitário; ou conjunto vazio ou ainda ao conjunto de elementos indefinidos .

Estendemos a idéia de conjunto a outros conjuntos .

No conceito de conjunto não há idéia de quantidade e sim de qualidade, abrangendo o conjunto unitário.

Conjunto unitário é o que é formado de um só elemento .

Conjunto infinito é um conjunto de elementos infinitos.

E ainda com a mesma característica estendemos esta idéia ao conjunto vazio que é desprovido de elementos .

A característica do conjunto vazio é não ser, porque é vazio, tem ausência de elementos.

O elemento genérico do conjunto é qualquer elemento do conjunto. Ex.: Nesta sala há um conjunto de professôras. O elemento genérico é professôras desta sala.

O elemento genérico é X. X é a variável do conjunto e indica qualquer elemento.

Para especificar os elementos do conjunto é preciso marcar, distinguí-los de qualquer forma (com uma côr ou com uma fita, etc.)

Quando dois conjuntos tem os mesmos elementos, pode-se ver que um conjunto contem o outro.

Ex.: $C^1 = X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4 \quad X_5$

$C^2 = X_1 \quad X_2 \quad X_3$

Olhando vemos que os elementos X_1 X_2 X_3 do conjunto C^2, acham-se empiricamente no conjunto C^1. Portanto o conjunto C^1 contem os elementos do conjunto C^2; e os elementos do conjunto C^2 estão contidos no conjunto C^1.

(Convenção : $\supset$ = contem
$\subset$ = está contido)

Resumindo : $C^1 \supset C^2$

$C^2 \subset C^1$

Verificamos então que o conjunto C^2 é uma parte do conjunto C^1 e está contido no mesmo, portanto, o C^2 é um sub-conjunto do conjunto C^1.
(Sub-conjunto é um conjunto que está dentro de outro.)

Quando é que podemos dizer que dois conjuntos são iguais ?

São iguais quando C^1 contem C^2 e C^2 contem igualmente C^1. Ex.:

$C^1 = X_{I} \quad X_{II} \quad X_{III} \quad X_{IIII}$

$C^2 = X_{I} \quad X_{II} \quad X_{III} \quad X_{IIII}$

Por sua vez o conjunto que contém outro, como uma parte de sí mesmo é chamado conjunto prevalente.

A matemática leva a pensar de uma maneira mais precisa, lógica.

Olha os conjuntos de ambos os lados, digo, ângulos :

$\boxed{C^1}$ e depois $\boxed{C^2}$

Convenção :

Conjunto vazio é sub-conjunto de qualquer conjunto.

Pode-se tirar zero de tudo é porque zero está contido em tudo.

De um conjunto só se pode tirar sub-conjuntos ou conjuntos iguais.

Resumindo : Já vimos até agora :
Conjunto : C
Sub- conjunto : S-C
Conjunto prevalente → P
Igualdade de conjuntos : C - C

$C^1 \supset C^2$ = (é prevalente)

$C^2 \subset C^1$ = (é uma parte = sub-conjunto)

$C^2 \subset C^1$ - $C^2 \supset C^1$ ao mesmo tempo = conjuntos iguais.

Corresponder ou fazer corresponder um conjunto é associar um ou mais elementos de um conjunto à outro conjunto.

Correspondência entre dois conjuntos é um critério que permite associar um ou mais elementos de um conjunto a outro conjunto.

Correspondência unívoca é específica; é a que fazemos corresponder a cada elemento de um conjunto, um só elemento de outro conjunto.

Ex. : $C^1 = X' \quad X'' \quad X''' \quad X'''' \quad X'''''$

$\quad\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow\quad\uparrow$

$C^2 = M' \quad Y'' \quad Y''' \quad Y''''$

A cada elemento de C^1 eu associei um eelemento do C^2, isto é o que chamamos correspondência unívoca.

Também posso fazer corresponder os elementos de C^2, associando-os aos elementos do conto C^1.

Quando fazemos corresponder todos os elementos do conjunto C^1 para C^2 e de C^2 para

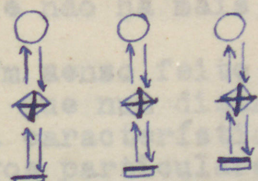
C^1 , dizemos que há <u>correspondência biunívoca</u> .
(Só é possivel entre conjuntos iguais)

Ex. : C^1 - X_1 X_2 X_3 X_4
$\quad\quad\quad\;\, \uparrow\downarrow \quad \uparrow\downarrow \quad \uparrow\downarrow \quad \uparrow\downarrow$
$\quad\quad\;\, C^2$ - Y_1 Y_2 Y_3 Y_4

Sempre que duas coleções de elementos se podem pôr em correspondência biunívoca, elas dizem-se equivalentes.

Quando fazemos uma correspondência unívoca duas vezes chamamos <u>biunívoca</u> .

Cada conjunto possue uma propriedade numérica . Ex. :



Neste conjunto a propriedade numérica é 3.

Fazendo uma correspondência biunívoca entre os elementos de vários conjuntos e abstraindo a qualidade dos elementos , chegaremos a quantidade numérica .

Abstraindo a qualidade dos elementos resta uma quantidade permanente que é o <u>número</u> .

O número nasceu através da correspondência biunívoca quando abstrairam a qualidade. É <u>a gênese do número</u> .

A todos conjunto corresponde uma propriedade numérica específica .

Chegamos a conclusão de que dessa correspondência biunívoca dos conjuntos foi feita a abstração do número e sua propriedade numérica .

<u>PROPRIEDADE NUMÈRICA DOS CONJUNTOS</u>

O número é uma representação simbólica do conjunto ou da propriedade numérica .

Obtem-se a propriedade numérica pela correspondência biunívoca.

a) A disposição dos elementos do conjunto não altera a propriedade numérica do conjunto,porque a correspondência biunívoca mantem-se a mesma, qualquer que seja o arranjo feito .

b) O conjunto dividido em sub-conjuntos não tem sua propriedade numérica alterada ou afetada , ela continua a mesma porque a correspondência biunívica não o altera. (Ex. : 2 4 = 6
4 2 = 6) .

c) O elemento de um sub-conjunto, passando a outro sub-conjunto não altera a propriedade numérica do conjunto, pela mesma razão da correspondência biunívoca permanece a mesma .

d) A substituição de elementos, de um conjunto , um a um não altera a propriedade numérica do mesmo .

NEGATIVO

a) Alterando-se a classificação essêncial do conjunto, sua propriedade numérica ficará afetada .

b) Quando dois ou mais elementos dentro de um conjunto se unem a propriedade numérica é afetada, porque não há mais correspondência biunívoca .

Ex. : Um senso feito nos Estados Unidos verificou-se, que num distrito existiam 450 fazendas. A característica comum é a mesma. Mas por motivos particulares, duas fazendas das pequenas se uniram, consequentemente a propriedade numérica ficou alterada, pois passou a existir 449 fazendas.

c) A propriedade numérica é alterada quando um ou mais elementos, do conjunto se dividem .

Ex. : Um senso feito nos Estados Unidos verificou que num distrito havia 350 fazendas .Um fazendeiro faleceu, deixando sua fazenda para seus três filhos como herdeiros, logo ficam 3 fazendas ou melhor 3 fazendeiros . A propriedade numérica ficou alterada.

IDÉIAS QUE O NÚMERO ABRANGE

Número é uma representação simbólica do conjunto, tendo cada caso uma propriedade numérica específica .

a) O número tem uma idéia essêncial (idéia aditiva) a de representar simbòlicamente a propriedade numérica do conjunto. (sentido cardinal do número) .

b) A idéia que o número abrange além de idéia essêncial é também uma idéia de série, de ordem.

Ex. : Eu não posso abstrair de um conjunto o número 7, que representa simbòlicamente os elementos quantitativos do conjunto sem pensar que êle precede o nº 8 e segue o nº 6 .

Não devemos, porém, iniciar sua aprendizagem pela idéia de ordem (que é abstração) e sim pela idéia essencial que é significação .

Daí podemos deduzir que o número tem uma idéia cardinal e ordinal ao mesmo tempo.

A significação é cardinal, porque implica uma quantidade.

É ordinal porque tem posição, obedece uma ordem.

c) Fazendo análise vemos que o número abrange, também, outra idéia que é a de seus componentes.
Ex.: Extraindo do conjunto o nº 4, nós não temos idéia sòmente do todo, da quantidade numéca, mas, também de suas composições:

(3 - 1) (2 - 2) (1 - 3) (4 - 0) (0 -4)

Esta é uma idéia aditiva de seus componentes.

d) Idéia de razão. Ex.: Quando temos idéia do nº 4, pensamos no 2 x 2 ou 1 x 4 que é a idéia de razão.

Essas idéias são simultâneas e o nº abrange tôdas ao mesmo tempo.

CAMPOS NUMÉRICOS

A matemática é constituida sôbre o número, que é o instrumento usado e constitui um e-campo numérico.

O número apesar de não definido pode ser usado, pois o homem sempre usou as coisas para depois definí-las.

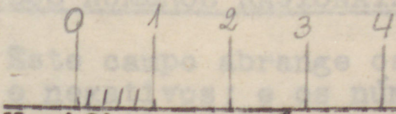
a) O primeiro campo estudado é o campo dos números naturais, criados e ordenados pela mente humana; êle vai de 1 ao infinito, e, junto com zero, originam a sucessão dos números inteiros.
São osprimeiros que o homem usou, e, também, os primeiros usados pela criança, no seu aspecto evolutivo. São êles o fundamento de tôda a ciência matemática.
(Só constitue campo, quando o homem os dominou.)

b) O campo fracionário surgiu da necessidade prática da vida, de se estabelecer entre um número e outro a idéia de parte, em relação as medidas.

Pertencem ao campo fracionário, hoje, as ordinárias, as decimais e as periódicas.

COMO SURGIRAM AS FRAÇÕES

O número, também, pode ser representado por uma linha horizontal, fazêndo correspondência biunívoca entre a linha e o número . Ex. :



Verificamos daí que entre um número e outro existe um espaço, que era preciso, às vezes, ser representado .

Surge, então, dessa necessidade os números fracionários ou melhor da necessidade da vida.

As primeiras frações que surgiram foram as ordinárias ou melhor da necessidade da vida .

As primeiras frações que surgiram foram as ordinárias : Da seguinte maneira :

HISTÓRICO :

Os egipicios usavam, para representar as frações, o numerador $\underline{1}$ $\underline{1}$ $\underline{1}$.

Mais tardé os babilonios usaram o denominador $\overline{60}$ $\overline{60}$ $\overline{60}$.

Os gregos seguindo os egipicios, usaram igualmente o numerador $\underline{1}$ $\underline{1}$ $\underline{1}$.

Os romanos adataram o denominador $\overline{12}$.

Só no século XVI é que aparece o homem, dominando as frações ordinárias e o pensamento humane sofre uma transformação na sua maneira de conceituação .

O campo das frações abrange as frações ordinárias e tôdas as outra que podem ser transformadas em fração ordinária (decimal e periódica).

Ex. : $0,6 = \frac{6}{10}$ $\qquad$ $0,666... = \frac{6}{9}$

EXTENSÃO DOS CAMPOS NUMÉRICOS

Números inteiros : 0 , 1, 2, 3, 4 ...

Por extensão do pensamento humano os campos numéricos podem extender-se tanto no sentido positivo como no sentido negativo.

Partindo do zero vamos ao infinito no

sentido positivo e ao infinito no sentido negativo . Ex. : ∞ .... -4. -3, -2, -1, 0, +1 +2 +3...

CAMPO DOS NÚMEROS RACIONAIS OU COMENSURÁVEIS

Êste campo abrange os números inteiros positivos e negativos; e os números fracionários positivos e negativos .

Em síntese os números racionais os comensuráveis abrange :

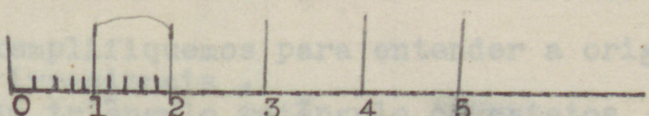
1º) o campo dos números naturais .
2º) o campo dos números fracionários .
3º) o campo dos números de sentido positivo e negativo, tanto naturais, como fracionários.

Nota : Comensuráveis quer dizer contém em sí uma medida, uma unidade .

A Aritmética elementar ocupa-se dos números racionais ou comensuráveis, isto é , aquêles que representam uma razão entre números inteiros (entre êle e a unidade) .

Os números são chamados racionais porque contém uma razão e comensuráveis porque contém uma medida .

O número racional é sinônimo de comensurável; todo êle pode ser representado como medida na linha numérica . Ex. :



$= \frac{1}{5}$

Além dos números racionais a aritmética elementar ocupa-se, ainda, de alguns números irracionais .

Os números irracionais são aquêles que não podem ser representados por uma razão entre dois números inteiros . Ex. : $\sqrt{2}$

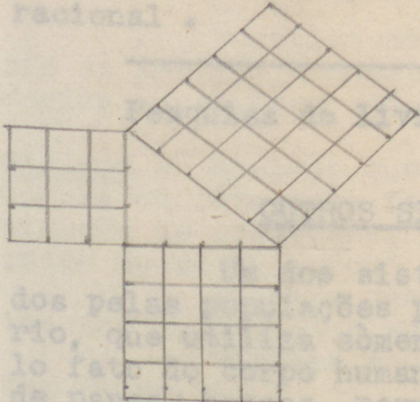
Os números irracionais têm sua origem no teorema de Pitagoras.

Para facilitar a compreenção dêles, vejamos o <u>teorema de Pitagoras</u> .

O quadrado construido sôbre um cateto mais o quadrado construído sôbre o outro cateto é igual ao quadrado construído sôbre a hipotenusa.

1) (Observar a figura nº 1)

Formula : $C^2 + C^2 = H^2$

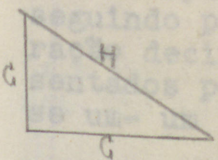


O quadrado da hipotenusa é igual a soma do quadrado dos catetos.

Assim temos : $H^2 = C^2 + C^2$ ou a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Assim :

$$C^2 + C^2 = H^2$$

Para achar a hipotenusa basta desdobrar a formula, isto é, extrair a raiz quadrada dos dois catetos .



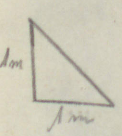
Assim : $H = C^2 + C^2$

Para melhor compreendermos êste teorema, basta construir-se um quadrado sôbre cada um dos catetos e outro sôbre a hipotenusa, como na figura nº 1 . Se contarmos os quadradinhos levantados sôbre os dois catetos, verificaremos que são iguais aos quadradinhos levantados sôbre a hipotenusa.

Observando a figura nº 1, fácil é compreendermos e deduzirmos a formula do teorema de Pitagoras .

Exemplifiquemos para entender a origem dos números irracionais .

Num triângulo retângulo os catetos medem respectivamente 1 metro . Vamos procurar a hipotenusa .



$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = 1^2 + 1^2 \text{ ou}$$

$$h^2 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$	1,414...
100	24 x 4=96
96	281 x 1=281
400	2824 x 4=11286
281	
119	

R. = 1, 4142135 ... ∞

Este é um nº irracional, pois, que não há uma razão entre dois números inteiros por êles representados .

A raiz quadrada de 2 é um número irracional .

Pesquisa do livro : " MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA " De O. Sangiorgi.

OUTROS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO :

Um dos sistemas de numeração mais usados pelas populações primitivas é o sistema binário, que utiliza sòmente dosi sinais (talvez pelo fato do corpo humano apresentar vários exemplos de pares : braços, pernas , olhos , etc. e tendo à sua disposição ùnicamente duas palavras. Tomando , por exemplo, nesse sistema 0 (zero) e 1 , e seguindo princípios semelhantes ao usado na numeração decimal, os números dois e três serão representados por : 10 (lê-se um - zero), 11 (lê - se um- um), respectivamente .

Outro sistema de numeração usado é o sistema quinário, que dispõe sòmente de cinco sinais (pelo confronto com oscinco dedos da mão) e de cinco palavras .

Na Babilônia foi adotado o sistema sexagesimal , usado ainda hoje nas medidas de ângulo e de tempo .

SISTEMA NUMÉRICO DECIMAL OU NOSSO SISTEMA

Conceito de sistema, segundo dicioná - rio de Antenor Nascente. - 1º edição - Livraria Marins - editora São Paulo.

Sistema - Arranjo que se dá a um certo número de coisas ou fato para fazerem como quê um todo. Combinação de processos, modo, forma . Hábito particular de um indivíduo .

Dizemos que há sistema quando os elementos são coordenados entre si.

Sistema é o conjunto de partes coorde - dos entre si .

Os números isolados não constituem sistema .

O nosso sistema numérico é decimal .

Pensa-se que tenha se originado o sistema numérico decimal do número de dedos que o homem tem nas mãos . (10)

Sabemos que era natural o uso dos dedos, para auxiliar a contagem, principalmente, no estágio primário .

Ainda hoje vê-se as crianças, usando os dedos como auxiliar da contagem .

Além do nosso sistema decimal existem outros sistemas , vejamos :

Sistema binário - existiu, foi usado e era todo constituído sôbre a base de 2 . Ex. : 2 pares, 3 pares, etc.

Sistema quinário ou quinquenal - construído sôbre a base de 5 .

Sistema duodecimal construído sôbre a base 12 . Dêsse sistema chegaram até nós vestígios : dúzia , grossa .

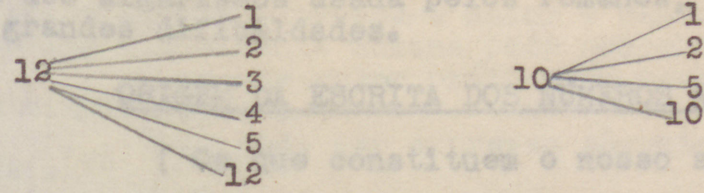
Sistema sexagesimal com base 60 . Vestígios chegados até nós, nas horas, minutos (60) e segundos (60) . Há quem pense que as frações dos babilônios tenham surgido dêsse sistema .($\overline{60}$)

Sistema vigesimal cuja base era 20 . No frandes existem vestígios dêste sistema . Ex. : quatro-vingt, etc.

Foi um sistema usado pelas civilizações adiantadas. Os MAIAS, que eram considerados como civilização adiantada, o usaram, daí talvez tenham os franceses herdado vestígios dêsse sistema .

Realmente para nós, parece que o sistema decimal, seja o melhor .

Dizemos assim, mas grandes matemáticos afirmam, que o sistema <u>duodecimal</u> (12), pois, tendo maior número de fatores, que o 10, tornaria o sistema mais rico . Ex. :



Apesar disso o homem viu vantagens no auxílio dos dedos para contagem e o sistema decimal venceu todos os outros .

<u>NOTA</u> : Quando falamos em sistema de numeração, falamos no sistema decimal oral .

Existem outros sistemas decimais, além do nosso ; o romano, o grego também são decimais diferentes do nosso pela grafia .

Quando falamos em sistema de notação detemo-nos na escrita .

Vemos que há na <u>grafia</u> diferença entre a maneira de simbolismo de <u>um</u> e <u>outro</u> sistema.

<u>O NOSSO SISTEMA É HINDÚ - ARÁBICO</u>

É um sistema decimal. O nosso sistema foi inventado pelos hindús, com a contribuição dos arabes, e que formou o nosso sistema. Tanto que os números são chamados arábicos o que prova terem êles inventado os algarismos. Daí o chamarmos os algarismos, que usamos, de algarismos arábicos .

Tantas vantagens oferece o <u>nosso sistema</u> (hindú-arábico) que venceu todos os outros . Na civilização romana, que era tão adiantada e da qual a <u>lingua</u> dominou as outra linguas, o sistema <u>hindú-arábico</u> venceu o <u>romano</u> , e , no século XVI, êste último já era usado só como enfeite, dada a superioridade do sistema decimal hindú-arábico .

Como tudo o mais é claro que venceu pela sua superioridade de prática .

O sistema hindú-arábico não existiria se não houvesse a mente humana inventado a mais maravilhosa das contribuições : o zero (0)

A contribuição arabe, no nosso sistema, foi certamente na escrita dos números, pois a grafia dos àlgarismos usada pelos romanos, apresentava grandes dificúldades.

ORIGEM DA ESCRITA DOS NÚMEROS ARÁBICOS

(Os que constituem o nosso sistema)

Atribui-se aos arabes a criação da escrita dos nossos números .

Dizem terem êles usado uma forma quadrada, fazendo a representação de uma diagonal, diversas posições.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

PESQUISA : Autor : Grossnickle - Livro : Making Arithmetic Meaningful - pág. 39

SISTEMA HINDÚ-ARÁBICO

Nosso sistema foi inventado pelos hindús e trazido para a Europa pelos arabes, daí o nome " Hindú-arábico " .

A história do sistema numérico que usamos é de menor importância comparado com o seu grande valor. Apesar dos numerais hindús-arábicos terem sido introduzidos na Europa ocidental antes do ano 1000, só no início do século XIII, um autor estudou o assunto .

O homem da Europa Ocidental foi lento em reconhecer as vantagens do sistema Hindú-arábico ,

Isto é demonstrado pelo fato de que só no século XVII a notação arábica finalmente descolou os vários sistemas que complicaram a aritmética da vida por tantos séculos .

ANÁLISE DO NOSSO SISTEMA NUMÉRICO

Se seguirmos a regra de Deus : " De a -

mar-vos uns aos outros " notaremos que dêsde o início da civilização os homens têm feito tentativas de se compreenderem ; a prova está na grande esperança com a criação do idioma esperanto.

No entanto essa linguagem, de compreensão universal, existe dêsde longos anos :- é o nosso sistema numérico .

O nosso sistema (hindú-arábico) com 10 símbolos apenas expressa a maior e menor idéia quantitativa que a mente humana pode conceber .

O grande valor prático do nosso sistema é a simplicidade .

Tudo pode ser expresso sòmente com 10 sinais .

Realmente, podemos afirmar, que o sistema hindú-arábico, pela sua simplicidade, além das inumeras vantagens matemáticas, tornou-se uma lingua universal .

PRINCÍPIO DO VALOR POSICIONAL

O princípio sôbre o qual se baseia o sistema hindú-arábico é o princípio do valor posicional . Ex. : No número 222 temos sempre o mesmo símbolo (2) porém conforme a posição êle é dez vezes maior ou menor .

O nosso sistema, sendo baseado num princípio de posição escrevemos o número (símbolo) sempre da mesma forma, mas êle varia de valor de acôrdo com a posição, pois que esta dá-lhe valor diferente .

No entanto, o princípio do valor posicional só é possivel com a existência do 0 (zero).

O zero (0) é uma das grandes e maravilhosas invenções da mente humana.

Sem o zero , nosso sistema não poderia existir, pois não seria possivel apoiar-se, como se apoia no valor posicional .

O zero pode ser usado em duas funções : Uma como conjunto vazio, e, outra, segundo os americanos, o de locatário que permite ou possibilita o nosso sistema basear-se no valor posicional .

Nota pesquisada :

A mente humana adquiriu um elevado estágio de criação, quando inventou o zero e aprendeu a usá-lo como locatário. Daznzg reconhece a importância dêste evento significativo quando diz : " Na história da cultura à descoberta do zero (0) sobressairá sempre como uma das maiores aquisições da raça humana ."

COMPARAÇÃO COM OUTROS SISTEMAS

Comparando o nosso sistema com outros sistemas numéricos, vemos as vantagens do valor posicional do número .

O sistema romano e o grego, apesar de serem decimais, não se baseiam no valor posicional do número .

No sistema grego cada símbolo representa um só valor . Ex. :

Grego	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m...
hindú-arábico	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40...

Para escrever o número 33 os gregos usavam os símbolos lc ou cl, pois que a posição do símbolo em nada interfere ou altera .

O sistema romano, que antecedeu ao nosso, usou o princípio aditivo e subtrativo. Ex. :

L X V = 50 + 10 + 5 = 65(aditivo)

Outro exemplo : L IX IV ; neste exemplo não é possível somar, pois que o número colocado à esquerda diminui-lhe o valor . (subtrativo) .

O nosso sistema usa sempre o princípio aditivo .

(Nota : todo número é uma razão. A multiplicação é uma soma reunida).

O número, no nosso sistema, além de ter seu valor quantitativo tem ainda o valor posicional, o que lhe permite ser sempre somado .

Ex. :

476 = (4 X 100) + (7 X 10) + (6 X 1) =476

O nosso sistema de notação ajuda o nosso sistema numérico .

A natureza do sistema ajuda o pensamento matemático .

Na própria escrita nota-se as relações matemáticas .

Em outras palavras : A própria notação é que ajuda, auxilia a compreensão das relações matemáticas .

CONCEITOS DE ADIÇÃO : de Algacyr Munhoz Maeder

ADIÇÃO é a operação que tem por fim reunir em só um número tôdas as unidades contidas em dois ou mais números dados.
II - A adição é uma operação que conduz sempre a um resultado único, perfeitamente determinado.

SUBTRAÇÃO é a operação que tem por fim, conhecendo a soma de duas parcelas e uma delas, obter a outra.

MULTIPLICAÇÃO é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, tomar o primeiro como parcela tantas vezes quantas são as unidades do segundo.

DIVISÃO é a operação que tem por fim, sendo dados dois números em certa ordem, procurar o maior número de vezes que o segundo (divisor) está contido no primeiro.

OPERAÇÕES

Nós consideramos, hoje em dia, que há 4 operações fundamentais, Revendo o histórico veremos que os matemáticos através dos tempos consideravam muito mais operações em matemática. Até 38 operações foram encontradas. No entanto há um matemático moderno que distingue duas idéias na divisão, considerando em vez de 4 operações fundamentais 5. Êste matemático considera a divisão como idéia :

1º) partitiva - rapartir entre (repartir)
2º) por medida- quantas vezes está contida.
(contem)

Há também outros que consideram a soma como a única operação, sendo a subtração o inverso da soma, a multiplicação uma soma abreviada (quando se refere a inteiros) e a divisão o inverso da multiplicação.

Esquematizando teriamos como operações fundamentais :

Soma.
Subtração.
Multiplicação.

concreto abstrato concreto

Divisão — partitiva. Ex. 15 l : 5 = 3 l

— por medida. Ex. : 15 l : 5 l = 3vezes

concreto concreto abstrato

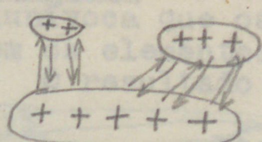
Isto seria apenas forçar, pois, que realmente, devemos considerar 4 .

ADIÇÃO

Adição é um processo cuja finalidade é encontrar o número de elementos de um conjunto , quando se sabe o número de elementos dos sub-conjuntos.

Analizando desta forma, verificaremos que na soma não há aumento de quantidade, apenas há reunião, junção. agrupamento dos elementos dos sub - conjuntos, transformando-os como um todo.

Isto acontece por que a correspondência biunívoca continua a mesma entre o conjunto e os sub-conjuntos .



Resumindo : na soma não há aumento de quantidade, há apenas agrupamento .

Adição é um processo cuja finalidade é juntar, agrupar, reunir sub-conjuntos em um con - junto .

Matemáticamente : adição não é posse. A fundamentação matemática existe sempre .

Ex. : Maria tem 2 laranjas, Joana 3, quantas têm as duas juntas ?

Tanto de um lado como de outro as laranjas existem, portanto, fundamentalmente em mate - mática, as laranjas existiam houve apenas agrupamento, reunião .

No aspecto social podemos considerá-lo sob 2 aspectos : reunião e posse .

Adição é, portanto, o processo que consiste em reunir sub-conjuntos em um conjunto .

LEIS DA ADIÇÃO

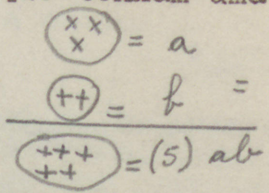
Adição seus princípios suas leis .

1 - Lei (" likenes" - igualdade, semelhança) da <u>homogeneidade</u>. Para somar é preciso que os elementos tenham característica em comum que permita ver o conjunto como um <u>todo</u> .

É preciso que na soma haja uma característica em comum que una os componentes em conjunto .

Ex. : Se vou somar 2 rosas e 3 cravos é preciso que os veja com uma característica em comum (flôres) que os una em conjunto.(flôres) .

"Só podemos olhar como um <u>todo</u> elementos que tenham uma característica em comum. Portanto, só podemos reunir, somar, elementos que tenham uma característica em comum".

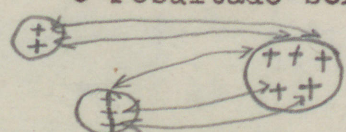


A correspondência biunívoca é o que baseia a lei da <u>unicidade</u> .

2- <u>Lei da unicidade</u> é fundamentada na correspondência biunívoca que os elementos do conjunto mantém com os elementos dos sub-conjuntos .

O resultado será um e sòmente um.

Ex. :



Somar não é criar, é juntat, é reunir em <u>um</u> conjunto . Isto é a lei da unicidade.

3- <u>Lei da comutação</u> (troca) é aquela em que a ordem de reunir os sub-conjuntos, não vai alterar a propriedade numérica do conjunto.

Na soma a ordem das parcelas não vai alterar a soma :

Ex. : $a + b + c = b + a + c = b + c + a =$

4- <u>Lei da associação</u> que permite reunir, associar os elementos de um sub-conjunto a outro sub-conjunto .

Ex. : $(a + b) + c = a + (b + c) =$

5- <u>Lei da compensação</u> : baseia-se na substituição dos elementos dos sub-conjuntos um à um.

Ex. : $5 + 7 = 12$

$(5 - 2) + (7 + 2) = 12$

[illegible] o outro [illegible] e sòmente [illegible]

SUBTRAÇÃO

A subtração é o [illegible] da soma.

A idéia fundamental da subtração é [illegible] do um conjunto, e um sub-conjunto [illegible] e ou-tro [illegible] ou uma propriedade [illegible].

Os têrmos de uma subtração são: minuen-do, subtraendo e resto.

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO

Na subtração não há diminuição de quan-tidade, há apenas desagrupamento.

Subtração é a operação que tem por fim conhecendo a soma de duas parcelas e uma delas, ob-ter a outra.

LEIS DA SUBTRAÇÃO

1- Lei da homogeneidade- Para subtrair é preciso que os elementos tenham uma característica co-mum que permita ver o conjunto como um todo. Ex.: Se vou subtrair 3 cravos de 5 rosas é pre-ciso que se veja nos uma característica em co-mum (flôres) que os una em conjunto (flôres).

2- Lei da compensação baseia-se na substituição dos elementos dos sub-conjuntos um a um. Ex.: 12 - 5 = 7 ou (12 - 2) - 5 = 7 - 2 .

3- Lei da unicidade é fundamentada na correspondên-cia biunívoca dos dois sub-conjuntos com o con-junto.

Na subtração só pode-se chegar a um resultado chamando-se essa lei unicidade.

4- Lei da associação nos permite associar os ele-mentos de um sub-conjunto a outro sub-conjunto. Permite a [illegible] de elementos dentro do conjunto. Ex.:

12 - (4 + 3) = (12 - 4) - 3

5- Lei da comutação existe na subtração, mas não é usada na escola primária, sòmente em algebra é possível ser usada. Ex.:

8 - 5 = 3
-5 + 8 = 3

Nota: Lei da unicidade [illegible] [illegible] Subtraindo sub-conjunto de um conjunto, obte-

SUBTRAÇÃO

A subtração é o contrário da soma .

A idéia fundamental da subtração é :tendo um conjuntoc e um sub-conjunto encontrar o outro sub-conjunto ou sua propriedade numérica .

Os termos de uma subtração são : minuendo, subtraendo e resto .

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO

Na subtração não há diminuição de quantidade, há apenas desagrupamento .

Subtração é a operação que tem por fim conhecendo a soma de duas parcelas e uma delas,obter a outra.

LEIS DA SUBTRAÇÃO

1- Lei da homogeneidade- Para subtrair é preciso que os elementos tenham uma característica comum que permita ver o conjunto como um todo. Ex. : Se vou subtrair 3 cravos de 5 rosas é preciso que os veja com uma característica em comum (flôres) que os una em conjunto (flôres).

2- Lei da compensação baseia-se na substituição dos elementos dos sub-conjuntos um a um . Ex. : 12 - 5 = 7 ou (12 - 2) - 5 = 7- 2 .

3- Lei da unicidade é fundamentada na correspondência biunívoca dos dois sub-conjuntos com o conjunto .

Na subtração só pode-se chegar a um resultado chamando-se essa lei unicidade.

4- Lei da associação que permite associar os elementos de um sub-conjunto a outro sub-conjunto. Permite a movimentação de elementos dentro do conjunto . Ex. :

$$12 - (4 + 3) = (12 - 4) - 3$$

5- Lei da comutação existe na subtração, mas não é usada na escola priméria, sòmente em algebra é possivel ser usada . Ex. :

$$8 - 5 = 3$$
$$-5 + 8 = 3$$

Nota : Lei da unicidade copiada de uma colega

Subtraindo sub-conjunto de um conjunto,obteremos o outro sub-conjunto e sòmente êle, pois sòmente êle estará em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto ao reagrupar-se com outro subconjunto .

SITUAÇÕES DE SUBTRAÇÃO

<u>Subtrair</u> não é fazer desaparecer, é separar desagrupar elementos de um conjunto .

Fundamentalmente o processo é um só. Mas apresenta-se sôbre 3 situações, sôbre 3 idéias fundamentais .

1 - <u>Idéia de resto</u> : Quanto resta ? Quanto sobra ? Quanto fica ? etc. Ex. tirado de Grossnickle : <u>Resto</u> : Pedro tem 5 bolas, mas perde 3 . Com quantas êle fica ?

O resultado é representado pelo <u>resto</u> . (quanto sobra, quanto fica ?)

A ilustração é feita assim : 0 0 Ø Ø Ø

<u>Nota</u> : Na subtração esta representação :
0 ɸ 0 0 0 - 0 0 0 = 0 0 nada diz da subtração e sim representa o nº 5 , o nº 3 e o nº 2.

Para representar a subtração faremos assim : 0 0)Ø Ø Ø .

2- <u>Situação comparativa</u>

Pedro tem 5 bolas e Henrique 3; quantas bolas Henrique tem menos que Pedro ou quantas Henrique tem mais que Pedro ?

O resultado é uma idéia de diferença :
A ilustração é assim :

0 0 Ø Ø Ø
Ø Ø Ø

3- Situação (quanta falta acrescentar ?)
Ex. : Henrique tem 3 bolas; quanto lhe falta ta para ter 5 bolas ?

A situação requer que o aluno encontre quanto precisa acrescentar a um nº para torná-lo igual a um outro ?

A ilustração é feita assim :

$\boxed{0\ 0\ 0}$ 0 0 O aluno não tira, tem de acrescentar .

b) Ex. : Henrique tem 5 bolas . Algumas brancas outras pretas . Se três são pretas, quantas são brancas ?

Multiplicar é relacionar o multiplicador com a unidade, pondo em proporção o produto com o multiplicando . Ex. :

1/3 x 9o = 30 ou 1/3 : 1 :: 30 : 90

Multiplicação é um processo para encontrar um número que tenha a mesma razão para o multiplicando que o multiplicador para a unidade.

O multiplicador é sempre abstrato o multiplicado é concreto; o produto é sempre da natureza do multiplicando . Ex. :

6 x 48 livros = 288 livros .

Estabelece-se uma proporção :

6 : 1 :: 288 :48

O multiplicador está para a unidade assim como o produto está para o multiplicando .

Multiplicar não é sempre um aumento do multiplicando , é relacionar em proporção o multiplicador com a unidade , da mesma forma que o produto com o multiplicando . Ex. :

1/3 x 48 1 = 16 1

<u>Nota</u> : Por convenção o multiplicador, na forma horizontal será colocado primeiro. Ex. : multiplicador 8 x 3 cadernos = 24 cadernos

Na forma vertical usaremos assim :

3 cadernos <u>x 8</u> 24 cadernos	Isto auxiliará a compreensão ou significação matemática .

<u>Nota</u> : O importante não é só condizir à criança a observar, verificar, é levar a verbalizar o que aprendeu .

<u>PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO</u>

1) <u>Lei da comutação</u> não é nada mais do que aquela que se baseia em que a ordem do arranjo não altera a propriedade numérica .

Ex. : 3 x 5 1 = 15 1
5 x 3 1 = 15

5 x 000 000 000 000 000 = 15 3 x 00000 00000 00000 = 15

2) Lei da homogeneidade - o produto é sempre da natureza do multiplicando.

3- Lei associativa é a que permite associar fatores na multiplicação sem que altere a propriedade numérica do produto. Ex.:

$(4 \times 7) \times 5 = 4 \times (7 \times 5)$

$28 \times 5 = 4 \times 35$

4- Lei distribuitiva específica da multiplicação. Ela permite :

a) decompôr o multiplicando

b) multiplicá-lo ao multiplicador e somá-los sem alterar o produto . É a que permite fazer o seguinte :

Ex.: $2 \times 34 = (2 \times 30) + (2 \times 4)$

Outro ex.: $6 \times (7 + 2) = 6 \times 7 + 6 \times 2$

" ex.: $a \times (b + c) = ab + ac$

5- Lei da compensação - o produto não se altera se didvido um fator pelo mesmo número que multiplico outro .

Ex.: $84 \times 25 = \frac{84}{4} \times (25 \times 4)$

Aprovado em 08/09/81 Westphal