INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GEN. FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

JOURNAL MATHÉMATIQUE - NICOLE PICARD - TRADUÇÃO: PROFª ELY CAMPOS

M Á Q U I N A S

Entre as noções as mais importantes estudadas neste nível (C.E.2), encontramos o que temos chamado de "máquinas ". Esta noção é importante sob vários pontos de vista:

I - PONTO DE VISTA MATEMÁTICO

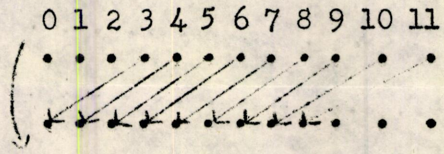
1º Ela corresponde à noção matemática de função: um conjunto de partida e um conjunto de chegada são dados: a todo elemento do conjunto de partida uma máquina faz corresponder, no máximo, um elemento do conjunto de chegada.

Exemplos:

Tomemos como conjuntos de partida e de chegada, o conjunto de números inteiros naturais (aí compreendido o zero), como máquina a máquina $\xrightarrow{-3}$

Partida 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

- 3



Chegada 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Cada elemento do conjunto de partida tem no máximo uma imagem no conjunto de chegada, os números 0, 1, 2 não tem imagem; os números superiores ou iguais a 3 tem exatamente uma imagem. Se designamos por N o conjunto dos inteiros naturais N - { 0, 1, 2 } é o conjunto de definição de nossa função. Tomemos os mesmos conjuntos para partida e chegada, como máquina + 5: todo elemento do conjunto de partida tem exatamente uma imagem no conjunto de chegada.

Partida 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

+ 5

Chegada

O conjunto de definição desta nova função se identifica ao conjunto de partida : diz-se que esta função é uma aplicação.

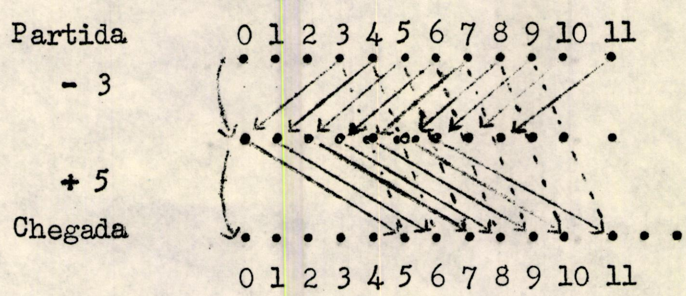
cont.......

É bem evidente que esta linguagem especializada (conjunto de partida, conjunto de chegada, imagem, função, aplicação) não tem seu lugar na escola primária, mas se nós quizermos que estas palavras tenham uma significação quando forem introduzidas no secundário é necessário que atividades tenham sido feitas previamente a fim de que estas palavras designem, efetivamente, conceitos adquiridos.

2º Um dos ramos importantes da matemática se relaciona com a composição de funções (aqui no nível que nos interessa será apresentada como a de cadeias de máquinas).

Retomemos os exemplos precedentes e coloquemos em cadeia as duas máquinas

$\xrightarrow{-3}$ $\xrightarrow{+5}$



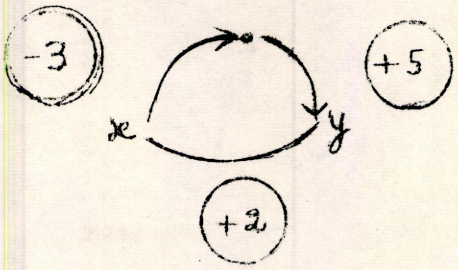
Todo elemento de N que tem uma imagem em N a um tempo por $\xrightarrow{-3}$ e $\xrightarrow{+5}$ tem uma imagem em N pela cadeia $\xrightarrow{-3}$ $\xrightarrow{+5}$. No esquema precedente a relação do conjunto de partida para o conjunto de chegada é indicada por flechas pontilhadas.

Se tomamos como conjunto de partida o conjunto de definição da função $\xrightarrow{-3}$ a relação representada pelas flechas em pontilhado.

Para todo elemento de N - $\{$ 0, 1, 2 $\}$ existe exatamente 1 imagem em N para a cadeia $\xrightarrow{-3}$ $\xrightarrow{+5}$

Esta cadeia é equivalente à máquina $\xrightarrow{+2}$.

Isto significa que qualquer que seja o elemento X de N - (0, 1, 2) nós temos o esquema seguinte



É este tipo de esquema que se vai encontrar no nível do C.E.2. Ele não está no nível das possibilidades de uma criança de 8 anos explicita como vimos de fazer o conjunto de definição sobre o qual os equivalentes têm um sentido; isto poderá, entretanto, se traduzir em uma linguagem muito mais pragmática por alguma coisa como " se as cadeias não se quebram, se ponho o mesmo número na entrada, encontro o mesmo número na saída".

Sobre os conjuntos numéricos não se poderá ir mais longe na explicitação.

Entretanto as crianças descobrem rápido "truques" para encontrar como alimentar uma cadeia dada para que ela não se bloqueie. Ao contrário, se trabalhamos com conjuntos finitos, podemos enumerando todos os - casos possíveis, demonstrar que duas cadeias são equivalentes: se tomamos o exemplo das máquinas F, C, C F , R, agindo sobre quadrados vermelhos ou azuis, redondos vermelhos ou azuis, podemos (as crianças) demonstrar que qualquer que seja o objeto colocado na entrada CF, F $\equiv$ C (Reencontrar-se-á este tipo de pesquisa nas fichas do caítulo "Esquemas" por exemplo S1, S2).

Além disso, procurando convenientemente os conjuntos de objetos sobre os quais <u>operam</u> nosso conjunto de máquinas, teremos, qualquer que seja o objeto colocado à entrada, cadeias que funcionam (que não se bloqueiam).

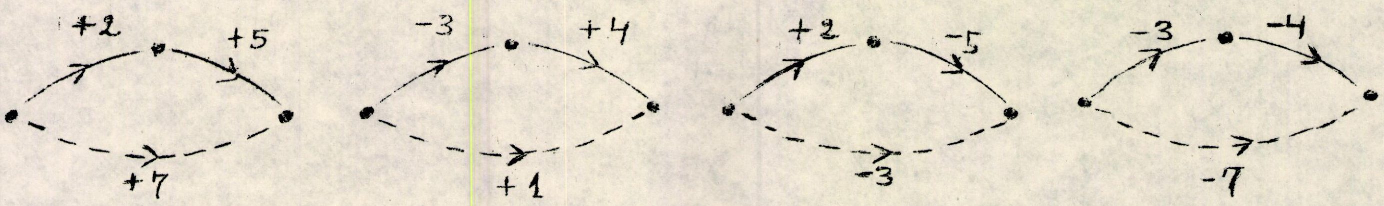
Vê-se aqui prolongamentos possíveis para o trabalho nos conjuntos numéricos: " procurar um conjunto de partida tal que, qualquer que seja a cadeia escolhida de máquinas de adicionar ou de subtrair e qualquer - que seja o número colocado a entrada a cadeia funciona". (é o conjunto Z dos inteiros "relativos"), ou bem procurar um conjunto de partida tal que, qualquer que seja a cadeia escolhida de máquinas a multiplicar ou dividir e qualquer que seja o número colocado na entrada a cadeia funciona (é o conjunto F das frações). Esta pesquisa poderá ser efetuada no secundário sobre bases sólidas.

Retornemos às cadeias de máquinas "numéricas" para as quais a entrada é " bem escolhida".

Se utilizamos máquinas de adicionar ou subtrair toda cadeia de duas máquinas pode ser substituida por uma cadeia de uma só máquina .

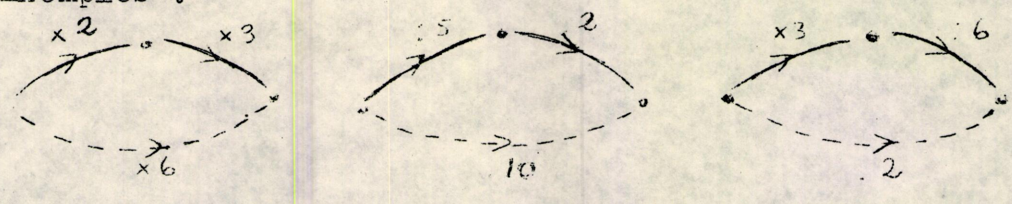
cont.....

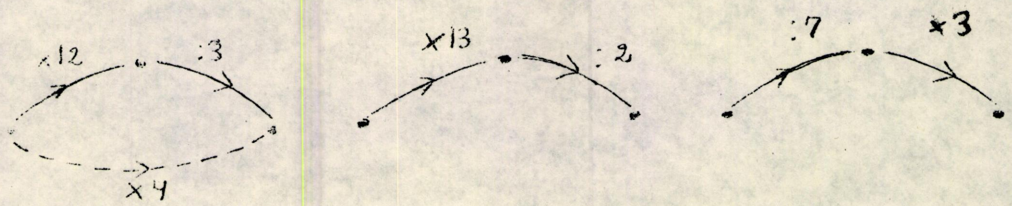
Exemplos :



Não é o mesmo para as máquinas de multiplicar ou de dividir.

Exemplos :

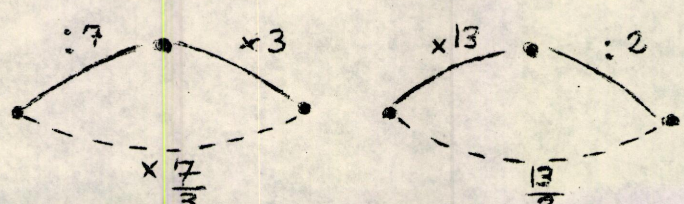




Nos dois últimos exemplos, não existe máquinas de multiplicar ou dividir por um número inteiro que possa substituir as cadeias propostas.

No nível do C.M. é a partir desta descoberta que introduziremos as " máquinas fracionárias".

Por definição a máquina $\xrightarrow{\times 13/2}$ é aquela que é equivalente a cadeia $\xrightarrow{\times 13} \xrightarrow{: 2}$



Isto introduzirá um novo conjunto de máquinas, as máquinas do tipo $\underline{x\ a/b}$ onde a e b são números inteiros naturais. Toda a cadeia de duas destas máquinas pode ser substituida por uma só destas máquinas. Dir-se-á em linguagem matemática que a composição das máquinas é uma <u>operação interna</u> no conjunto das " máquinas fracionárias". O <u>Cálculo</u> desta máquina equivalente será descoberto então, pelas crianças sem necessitar de conhecimentos novos. É suficiente para isto ter descoberto as propriedades que permitem <u>reduzir</u> as cadeias de máquinas :

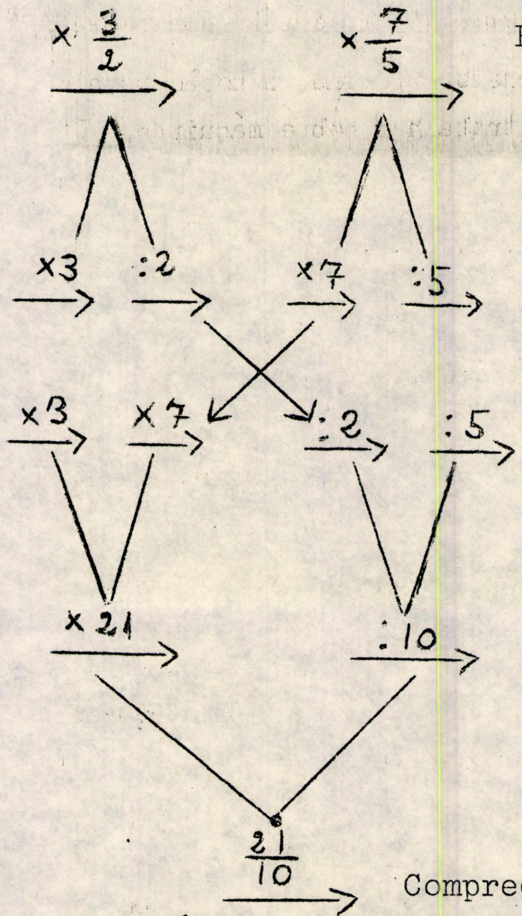
1. propriedade : em uma cadeia pode-se permutar duas máquinas sem que isso modifique a saída.

.....

2. propriedade : em uma cadeia pode-se substituir <u>toda</u> sequência de duas máquinas pela máquina equivalente em que isso modifique a saida. Esta linguagem pragmática que será utilizada pelas crianças corresponde a uma linguagem matemática (que eles utilizarão no secundário) :

   1. A colocação em cadeia de máquinas é comutativa.
   2. A colocação em cadeia de máquinas é associativa.

   Exemplo : encontrar a máquina fracionária equivalente a $\xrightarrow{\times 3/2}$ $\xrightarrow{\times 7/5}$



por definição

ter o direito de permutar

ter o direito de associar

por definição

Compreende-se qual é a importância de todo o trabalho preparatório que vai se estalar sobre tres anos (C.E. 2, C.M.1, C.M.2) / trabalho que vai permitir compreender a significação das máquinas de adicionar ou subtrair, das máquinas de multiplicar, logo a partir daí, de descobrir as propriedades sobre as quais se apoiará o cálculo. E, além disso, evidente que, graças ao trabalho sobre as cadeias de máquinas numéricas as crianças vão ser levadas a desenvolver uma aptidão (capacidade) para o cálculo mental. Ora, é absolutamente indispensável que as crianças saibam bem / calcular e como calcular. Ouve-se, por vezes, dizer que " se as crianças fazem matemáticas desde o primário, não saberão mais calcular". Reconheço não compreender muito bem aquilo que os que tem uma tal crença entendem por matemática. Se a matemática fosse fazer batatas, "fazer conjuntos" creio bem/ que eu estaría pronta a aprová-los, mas a matemática é toda outra coisa. Ela é antes de tudo o estudo de <u>estruturas</u> e se calcula tanto melhor quanto se tome consciência da estrutura dos conjuntos nos quais se calcula. No caso /

particular dos conjuntos numéricos, as propriedades das <u>relações entre os</u> / <u>números</u>, descobertas a partir de numerosas experiências devem conduzir a um maior domínio do cálculo sobre os números. Além disso, é importante que as / crianças descubram desde o início de suas atividades calculadoras que se pode calcular sobre outras coisas além de números. Constatei, ou, tenho constatado em meu trabalho com adultos não tendo tido formação superior em matemática que o desconhecimento desse fato é um grave "handicap". É por isso que tenho introduzido situações (máquinas de mudar a forma ou a cor dos objetos, por exemplo - ver também o capítulo "Esquemas" onde se encontram muitos exercícios desse tipo) situações que permitirão no C.M. praticar o cálculo em / conjuntos não numéricos e de descobrir assim regras gerais de dedução utilizadas no cálculo.

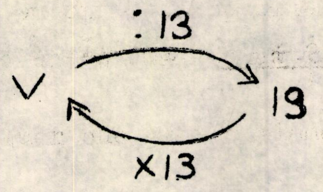
3. propriedade : encontramos desde o início a noção de "<u>máquina inversa</u>" (isto é, que faz retornar ao ponto de partida, que desfaz o que a primeira fez).

Assim a máquina inversa da máquina <u>- 3</u> é a máquina <u>+ 3</u> a máquina inversa da máquina <u>+ 5</u> é a máquina <u>- 5</u> .

Uma cadeia de duas máquinas inversas " não faz nada", " é equivalente a uma máquina que não faz nada", as máquinas se neutralizam" dizem as crianças em uma linguagem pragmática.

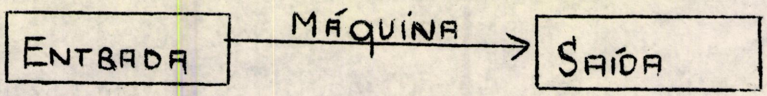
Estas duas noções : máquina neutra, máquina inversa de uma outra máquina, são noções extremamente importantes. Ora a experiência me provou que elas estão entre aquelas que as crianças dominam melhor. Isto tem do ponto de vista prático consequências importantes. É assim que as crianças do C.E. 2 transformaram espontaneamente problemas que lhes foram propostos / para utilizar a noção de máquinas inversas e eis aqui um exemplo que me serviu de ponto de partida para fichas de trabalho (ficha S.26 e seguintes; encontrar v tal que v : 13 = 19

Aqui está um esquema proposto pelas crianças



a igualdade 19 x 13 = v é obtida pela simples leitura do esquema.

4ª propriedade : vimos o esquema definindo uma máquina como sendo a seguinte



que tres tipos de problemas podem se colocar :

....

dá-se	é preciso encontrar
entrada e máquina	saída
máquina e saída	entrada
entrada e saída	máquina

O terceiro problema tem sempre uma solução para as máquinas de adicionar ou de subtrair; para as máquinas de multiplicar ou dividir é preciso que um dos números seja múltiplo do outro. A existência de uma solução para as duas primeiras está ligada a escolha dos números colocados na entrada (ou na saída).

$$\left.\begin{array}{l} 4 \xrightarrow{-7} \square \quad : \quad \square \xrightarrow{+8} 6 \\[2em] 4 \xrightarrow{:5} \square \quad : \quad \square \xrightarrow{\times 3} 8 \end{array}\right\} \text{não tem solução}$$

De fato os problemas do ensino elementar se a resolver sistemas de equações do tipo precedente.

Em particular todos os problemas de "regra de tres" são relacionados com tais esquemas. (cf fichas de trabalho Journal de Matematique II e comentários).

II. O ponto de vista psicológico

Ele é, ao menos, tão importante como o precedente. Se quequeremos que as crianças dominem as noções que desejamos lhes fazer adquirir, é necessário que os processos que permitem adquirir essas noções respeitem o melhor possível os modos de constituição de conceitos novos pelas crianças de um nível dado. É evidente que uma pesquisa é necessária para explicar ou melhor explicitar ao melhor esses processos que se poderá qualificar de espontâneos. Ora, após as experiências que fiz no ensino elementar e pré-escolar, a colocação em relação é um dos modos preferenciais utilizados pelas crianças. Além disso em um nível muito elementar, os objetos são confrontados quanto as suas diferenças. Vai ser, portanto, particularmente interessante de seguir esta demarche; partir das diferenças entre objetos, refinar a noção para chegar a de máquina, logo deixar de lado os objetos para trabalhar sobre máquinas. Encontrar-se-á estas demarches sucessívos no decorrer do ensino elementar e, particularmente no nível C.E. 2 que constitue certamente uma "dobradiça" onde a passagem ao trabalho sobre as máquinas parece particularmente favorável. Entretanto, não é preciso tornar as coisas bruscas, é preciso que a passagem ao trabalho sobre cadeias de máquinas se faça por si. É além disso extremamente importante utilizar um modo de investigação que parece essencial: a colocação em esquema. Chegou um ano em que ao nível C.M. 1, três das classes experimentais dos quais me ocupo tiveram dificuldades relacionadas com o trabalho sobre cadeias; "Entretanto, eles sabiam muito / bem calcular no ano anterior no C.E. 2" diziam os professores deste nível. Feita uma enquete percebeu-se que com efeito havia se feito muito cálculo mas que se havia pensado que não era necessário "passar tempo sobre os esquemas". Ora apareceu que desde que os alunos de C.M. tem a sua disposição esquemas o que havia sido aprendido / mas não compreendido realmente se põe no lugar muito rapidamente.

Não se dirá jamais demasiadamente que é necessário que as bases sejam solidamente construidas senão todo o trabalho em um nível superior não poderia ser feito senão por aprendizagem de técnicas não permitindo em geral ir mais alto salvo novamente por aprendizagem de técnicas mas se compreende bem que cedo ou tarde o sistema se bloqueia; se se quer sair-se bem no debloquear isto não poderá ser senão ao preço de uma retomada **desde a base, tanto mais dificil quanto mais as crianças tenham acreditado que o único modo de aprender é reter regras.**

É por isso que nós sugerimos algumas modificações das fichas das primeiras edições: algumas entre elas que se referiam a cálculos foram substituídos por esquemas.

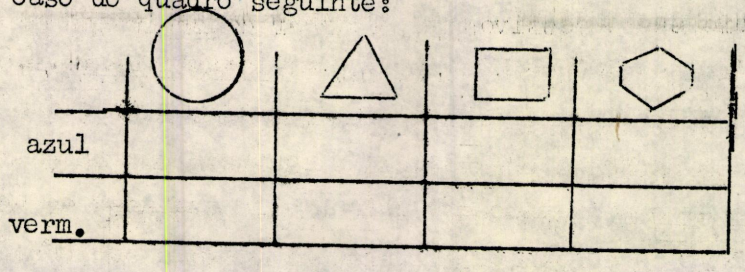
Demais assinalaremos que é impossível considerar o trabalho sobre uma noção feita a um nível dado sem se referir ao que foi feito antes e sera feito após sobre esta noção. É por isso que é indispensável consultar as fichas de trabalho e os comentários para o C.E. 1 (A conquista do número) e para o C.M. (Jornal de matemática II, faciculos 1 e 2).

COMENTÁRIO DAS FICHAS

Ficha M. 1

Esta ficha de trabalho tem como idéia subjacente a de produto cartesiano (cf. C.P. e C.E.1).

Trata-se de fabricar um material cujos objetos são caracterizados por duas propriedades: a forma que pode tomar quatro valores, a cor que pode tomar dois valores; ter-se-á, portanto, oito objetos que são aqueles que se poderia colocar em cada caso do quadro seguinte:



Ficha M. 2

Aqui a forma pode tomar três valores, assim como a cor. O processo sugerido para construir os nove objetos é uma árvore. Poder-se-á, além disso, pedir-se também para fazer um quadro.

Ficha M 3

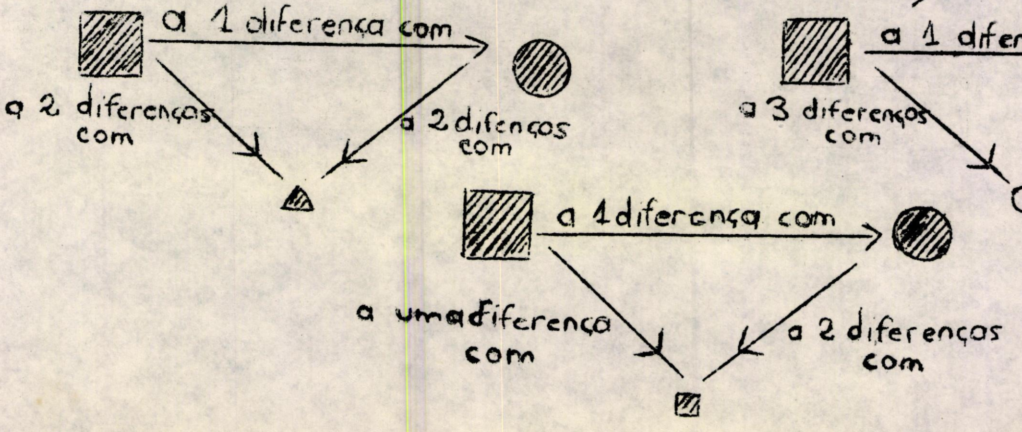
No quadro do alto desta página, as formas (as letras) não foram indicadas; é preciso reconstituí-las com o auxílio das sugestões feitas para preencher o quadro.

2º exercício: três formas, três cores; encontrar os nove objetos.

Ficha M 4

Retoma-se aqui um exercício feito no C.P. (cf. dos conjuntos à descoberta do número) : o jogo das diferenças imaginado por P. Dienes. Mas aqui as diferenças são representadas por flechas.

Os professores que o desejarem poderão explorar este exercício. Assinala-se por exemplo, que a cadeia $\xrightarrow{\text{a 1 diferença com}}$ $\xrightarrow{\text{a 2 diferenças com}}$ não pode ser sempre substituída pela relação $\xrightarrow{\text{a 3 diferenças com}}$



04/07/78