G. Cuisunaire - C. Gattegno: "Initiation a la Mèthode - Les Nombres en Couleurs" - Pág. 13.

Tradução: Lília Maria Pereira Duro

Se o professor, suspendendo um instante a marcha para diante de sua atividade regida pelo programa, se perguntar se seus alunos estão em situações corretas do ponto de vista da aprendizagem da matemática, o alcance do que tem sido dito sôbre o assunto se lhe apresentará. Os alunos, postos em face de situações matemáticas altamente elaboradas, não extraem aquilo que suas polarizações momentâneas lhes fazem descobrir. Mas as alunas são diferentes, vendo / nas situações coisas diferentes e o professor pode aprender a encontrar nesta situação real uma fonte de informação sôbre a maneira pela qual seus alunas concluem e pela qual o material as estimula. O que temos dito do conteúdo matemático do esquema das decomposições possíveis de um número é evidentemente um exemplo do que é possível aprender, deixando-se guiar por uma situação dada, mais do que por uma situação, digo, por um programa pré estabelecido.

O material Cuisenaire é também muito rico sob êsse aspecto. / Tomemos o exemplo das frações, em vista de favorecer uma busca funcional, na classe, de um ensino, conforme o programa oficial, mas não necessàriamente sensato, do ponto de vista psicológico e matemático.

Nossas decomposições lineares de números nos mostraram que só a unidade entra nêles um número inteiro de vêzes; e, também, que / certas decomposições podem se realizar com a ajuda de uma só espécie de barras. A leitura dêsses casos nos dá tôdas as decomposições em fatôres dêsses números. Basta inverter a leitura da notação para gerar frações. Por exemplo: $24 = 4 \times 6 = 6 \times 4 = 2 \times 12 = 12 \times 2 = 8 \times 3 = 3 \times 8$. Há quatro 6 em 24; portanto 6 é $\frac{1}{4}$ de 24; 8, $\frac{1}{3}$; 3, $\frac{1}{8}$, etc. Tomamos consciência, assim, que na situação

Faremos o mesmo em cada caso particular reencontrado e adquirimos, aberto o caminho, da experiência matemática que se trata de estender tanto quanto possível.

Nós não ~~temos~~ ainda ~~feito~~ não fizemos isso, explicitamente, das famílias de côres. O momento é chegado de mostrar que as relações de côres permitem tomar consciência duma nova estrutura matemática, o operador fração (fração operadora). Nós a distinguimos do número fração, porque neste último nós nos deteríamos, enquanto que o operador abre um nôvo campo matemático.

Da família vermelha (o 2, o 4, o 8) nós sabemos que 2 x 2 = 4 e 2 x 4 = 8 e 4 x 2 = 8; Então: a vermelha é a metade da maravilha e a maravilha, a metade da marrom e a vermelha é o quarto da marrom. Disso resulta que o quarto é a metade da metade, sem que se possa / dizer qual é a operação matemática utilizada. É uma simples leitura de três relações fundidas num dinamismo complicado. Durante a lição, pode-se mostrar, manipulando essas três barras, que, se se parte da maior, invertem-se as operações. Este jôgo com a unidade e a fração ou a inidade e o múltiplo se torna verdadeiramente um jôgo que exerce a representação das operações mentais. Em particular, vê-se que o inverso dum quarto é 4.

Da família azul (verde clara, verde escura e azul) o 3, o 6 e o 9) a experiência adquirida é ainda mais rica. Aqui, as duas frações introduzidas, comparando-se 3 e 6 e 9 são $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ e se tem a ocasião de mostrar que 6 vale os $\frac{2}{3}$ de 9, porquanto uma verde escura vale duas verdes claras. Como 9 é formado também de 6 + 3 ou de uma vez e meia a verde escura, chega-se a um resultado que todos os professôres apreciarão, ao saber que $\frac{2}{3}$ é o inverso de /// $1\frac{1}{2}$, isso no quadro geral das inversões de frações, pelo fato que a unidade é trocada.

A família amarela não fornece mais que a metade. Mas pode-se combinar as côres e ter as frações $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ em comparação tras. Os inversos são imediqtos, pelas comparações de 10 com 2, 4, 6, 6, 8, mas, para as outras, há um trabalho muito instrutivo a fazer. Para 3, 7, 9, por exemplo, nós utilizamos a parte alíquota formada da barra branca e vemos que $10 = 3 \times 3 + 1$ e que 1 é o $\frac{1}{3}$ de 3; então, o inverso de $\frac{3}{10}$ é $3\frac{1}{3}$. Da mesma forma, $10 = 9 + 1$ ou 1×9 e $\frac{1}{9}$ de 9; então 9 entra em 10 uma vez e um nono; etc.

Se se trata de inverter $\frac{7}{9}$, o aluno verá que se trata de saber quantas vêzes 7 está contido em 9, ou seja, uma vez, deixando 2 por resto. Com 7 por unidade, 2 se exprime como $\frac{2}{7}$; então, $1\frac{2}{7}$ é o inverso de $\frac{7}{9}$. Nos casos semelhantes, convém notar o inverso duma fração pela inversão de dois têrmos. Não se trata ainda de operação sôbre as frações, mas de produzir, de gerar a fração que exprime que a medida de a por b não é essencialmente diferente da medida de b por a (se as grandezas são homogêneas). Essa maneira de considerar a questão já é acessível aos alunos de 7 e 8 anos, com a condição de que não se formulam regras, mas que se deixe os alunos estabelecerem suas conclusões após uma pesquisa efetiva.

Passado êsse estágio, não há mais dificuldade para para inverter frações mais difíceis, tais como $\frac{7}{33}$ ou $\frac{11}{30}$, etc. A notação torna-se viva e $\frac{11}{30}$ e $\frac{30}{11}$ representam uma mesma situaçãomonde se invertem o papel da unidade de medida e da grandeza a medir.

Com isso tudo se quis dizer agora que nós estamos em ponto de introduzir as frações como pares ordenados e mesmo como famílias de equivalências de tares ordenados.

A medida de a por b escrever-se-á (a,b); então, (b,a) exprimirá o inverso e, em geral, $(a,b) \neq (b,a)$. Mas, mesmo que se tenha vários pares de barras que possam se interpretar como $\frac{1}{2}$: (1,2), // (2,4), (3,6), ... nós diremos que o par (a,b) pertence a uma família saída de (a,b), seja tomando o mesmo múltiplo de a e b, seja / se tomando os submúltiplos eventuais.

Exemplo: (14, 21) é equivalente a (28, 42), (42, 63) ...ou /

(2, 3). A família de (2, 3) contém o par ordenado (14, 21) e dêsse último par nós tiramos um par equivalente irredutível (2, 3). Êste pode servir para nomear cada família. è claro que sendo dado um par qualquer (a, b), êste não pode pertencer a mais de uma família de / equivalência.

Se duas frações pertencem a uma mesma família, elas podem se / substituir mùtuamente nas questões que concernem a uma ou a outra. Assim, "juntar" ou "cortar" as frações (a, b) e (c, d), não exige / isso que sejam essas duas mesmas frações que se considere; é permitodo tomar não importam quais os pares equivalentes que dão um sentido à palavra juntar ou cortar.

Nós sabemos que duas barras ponta à ponta representam a adição. De (a, b) nós podemos deduzir (e + f, b) se a = e + f e de (e +f,b) nós tiramos que e + f são respectivamente medidas por b e colocadas ponta à ponta.

Inversamente, de (e + f, x) nós tiraremos a igualdade (e + f,x) = (e,x) + (f,x), onde o sinal + do segundo membro tem um sentido nôvo, pois "juntar" os pares é coisa nova. Nossa difinição de adição de pares tendo como segundo têrmo o mesmo valor, será, portanto // (e,x) + (f,x) = (e + f,x); o sinal + no parêntese é para interpretar como colocação ponta à ponta.

Disso, passa-se ao caso geral de (a,b) + (c,d), passando pelas equivalentes (a,b) = (a,d,bd) e (c,d) = (cb,db).

Portanto (a,b) + (c,d) = (ad,bd) + (cd,bd) = (ad + cd,bd).

Êsse último par pertence também a uma família de equivalência que é o resultado da adição.

A subtração se trata da mesma maneira.

Tomar os $\frac{2}{7}$ duma grandeza conduz a uma outra grandeza. Mas, no cálculo com as frações, não se trata de obter os resultados finais exprimidos, como a grandeza inicial, em certas unidades. O cálculo transforma as frações em frações e o resultado é sempre uma /

Por isso, do "produto" e do "cociente" de duas frações, há lugar para fazer as seguintes considerações:

A branca vale $\frac{1}{7}$ da negra. A verde, 3 brancas; portanto, a verde vale as $\frac{3}{7}$ da negra. Mas a vermelha vale os $\frac{2}{3}$ da verde, portanto a vermelha vale os $\frac{2}{3}$ dos $\frac{3}{7}$ da negra. Ela vale também os $\frac{2}{7}$ da negra. Tem-se portamto, um outro tipo de equivalência:

$\frac{2}{7} = \frac{2}{3}$ das $\frac{3}{7}$ ou $\frac{3}{7} = \frac{3}{2}$ das $\frac{2}{7}$ modificando o papel da vermelha e da verde, Mais geralmente:

$\frac{2}{7} = \frac{2}{3}$ das $\frac{3}{5}$ das $\frac{5}{6}$ das $\frac{6}{7}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ de $\frac{c}{d}$ de $\frac{d}{c}$... $\frac{x}{b}$ onde cada barra diferente de a e b aparece no numerador e no denominador de frações sucessivas.

Em sentido inverso, estas "cascatas" de frações se reduzem pouco a pouco até se tornarem o par formado da primeira e da última barra: $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5}$ de $\frac{5}{4}$ de $\frac{4}{6}$ de $\frac{6}{8}$ de $\frac{8}{7} = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{7}$

Que acontece no caso onde se toma duas frações (a,b) e (c,d) on de b e c são diferentes? Pode-se achar aquela que equivale a (a,b) de (c,d)?

Evidentemente, êste caso se congraça ao precedente, porque /// (a,b) = (a,c,bc) e (c,d) = (cd,db) e (a,b) de (c,d)= (ac,bc) de /// (bc,db) = (ac,db), já que bc = bc pode ser suprimido.

Examinemos mais de perto: ac quer dizer a x c e bd: b x d; então a fração duma fração se obtém multiplicando os numeradores entre êles e os denominadores entre êles.

Nós podemos então substituir de pelo sinal x e ler isso como um "produto" de frações. Definimos a quociente de duas frações pelo / produto como no caso dos números inteiros. Se A x B = C, então // C : A = B ou C : B = A. O quociente de duas frações é uma fração // que, multiplicada pela segunda dá a primeira. Do fato que se pode mostrar que a multiplicação das frações dadas acima é associativa, pode-se formar o produto de três frações de duas maneiras diferen-

$[(a,b) \times (c,d)] \times (e,f) = (a,b) \times [(c,d) \times (e,f)]$

Caso particular onde $(e,f) = (d,c)$

$[(a,b) \times (c,d)] \times (d,c) = (a,b) \times [(c,d) \times (d,c)]$

$(a,b) = (c,c) = (ac, bc) = (a,b)$

Então $(a,b) \times (c,d) = (a,b) : (d,c)$

Isto exprime o quociente como produto.

Nós temos então mostrado que as barras permitem adquirir uma compreensão aprofundada das frações dum ponto de vista matemático, sem jamais fazer apêlo às operações difíceis de fazer (como a soma de bolos ou de frutas), tudo ficando intuitivo. As frações são, às vêzes, pares ordenados, às vêzes, operadores e, com as barras, as / duas perspectivas se fundem harmônicamente.

Correta matemàticamente, esta maneira intuitiva de apresentar as frações se presta igualmente à extensão aos casos de áreas, de volumes, de quantidades, como se vê fàcilmente questionando os alunos que tenham recebido êste ensinamento.

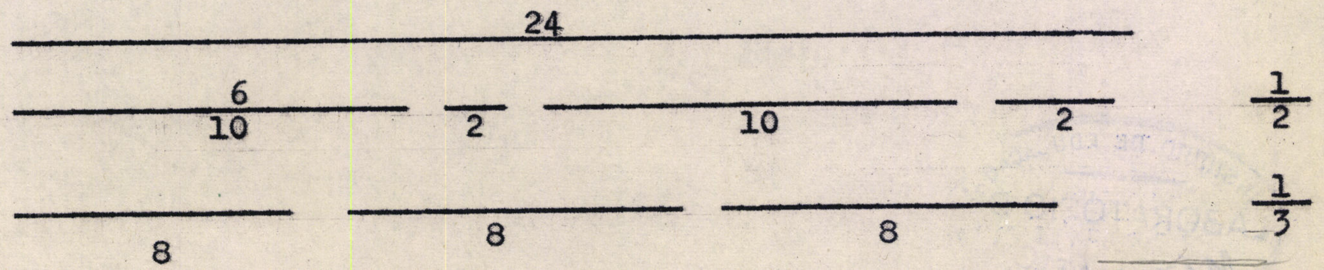
Cuisenaire!

A fração - operador

Mesmo livro: págs.63 e 64

Para tôdas as operações de frações, nós nos servimos das barras que fazem fàcilmente acessível a noção de fração-operador. Nós encravamos as frações nas grandezas que se podem colocar ponta à / ponta e exprimir o resultado utilizando como unidade a grandeza /b inicialque se trata de escolher convenientemente.

Tomemos como exemplo único o número 24 formado de barras iguais a a cada linha composta como é mostrado abaixo.



$\frac{\qquad}{4}$ $\frac{\qquad}{4}$ $\frac{\qquad}{4}$ $\frac{\qquad}{4}$ $\frac{\qquad}{4}$ $\frac{\qquad}{4}$ $\frac{1}{6}$

$\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{\qquad}{3}$ $\frac{1}{8}$

$\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{\quad}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{12}$

24 barras de 1.

Constatações:

a) Comparação destas frações entre elas; depois, para repor o número 24.

b) Comparação entre estas frações colocadas por grupos correspondentes ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$) ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$)

c) Comparar $\frac{2}{3}$ (de 24) com $\frac{4}{6}$ (de 24)

$\frac{3}{4}$ (de 24) com $\frac{6}{8}$ (de 24)

d) Comparar, digo, formar $\frac{4}{3}$ de 24 = $\frac{1}{3}$ de 24, Etc.

e) Calcular:

$\frac{1}{8}$ de 24 + $\frac{1}{8}$ de 24 = 3 + 3 = 6 ou $\frac{2}{8}$ de 24 ou $\frac{1}{4}$ de 24.

$\frac{2}{8}$ de 24 + $\frac{3}{8}$ de 24 = 6 + 9 = 15 = $\frac{5}{8}$ de 24

$\frac{1}{4}$ de 24 + $\frac{1}{8}$ de 24 = 6 + 3 = 9 = $\frac{3}{8}$ de 24

$\frac{2}{4}$ de 24 + $\frac{3}{8}$ de 24 = 12 + 9 = 21 = $\frac{7}{8}$ de 24

$\frac{1}{3}$ de 24 + $\frac{1}{8}$ de 24 = 8 + 3 = 11 = $\frac{11}{24}$ de 24

$\frac{2}{6}$ de 24 + $\frac{3}{4}$ de 24 = 8 + 18 = 16 = 24 = $\frac{1}{2}$ de 24

$\frac{3}{8}$ de 24 - $\frac{2}{8}$ de 24 = 9 - 6 = 3 = $\frac{1}{8}$ de 24

$\frac{1}{4}$ de 24 - $\frac{1}{8}$ de 24 = 6 - 3 = 3 = $\frac{1}{8}$ de 24

$$\frac{3}{4} \text{ de } 24 - \frac{2}{8} \text{ de } 24 = 18 - 6 = 12 = \frac{4}{8} \text{ de } 24 = \frac{2}{4} \text{ de } 24 =$$
$$= \frac{1}{2} \text{ de } 24$$

$$\frac{1}{3} \text{ de } 24 - \frac{1}{8} \text{ de } 24 = 8 - 3 = 5 = \frac{5}{24} \text{ de } 24$$

$$\frac{1}{3} \text{ de } 24 \times 2 = 8 \times 2 = 16 = \frac{2}{3} \text{ de } 24$$

$$\frac{3}{8} \text{ de } 24 \times 2 = 9 \times 2 = 18 = \frac{6}{8} \text{ de } 24 = \frac{3}{4} \text{ de } 24$$

$$\frac{1}{3} \text{ de } 24 : 2 = 8 : 2 = 4 = \frac{1}{6} \text{ de } 24$$

$$\frac{5}{8} \text{ de } 24 : 3 = 15 : 3 = 5 = \frac{5}{24} \text{ de } 24$$