Arquivado em 4/11/1982 MMatilde C.A.L.M.

3ª 4ª e 5ª

FRACTIONS ORDINAIRES ET DECIMALES

POURCENTAGES

Caleb Gattegno

Livro 5

Primeira parte

Tradução: Yolanda Leal Lemos

Estudo das frações (Cuisenaire)

1. Que representa a barra branca comparada à barra vermelha? E a vermelha à carmim? E a verde clara à verde escura? E a carmim à marrom? E a amarela à alaranjada?

Nós obtemos portanto emtôda a parte a mesma resposta pois medimos sempre a barra pequena pela grande. Será o mesmo se nós medirmos a grande pela pequena?

Se formamos um comprimento (colocando barras ponta com ponta) depois uma outra contendo duas vêzes a primeira ponta à ponta, podemos considerar de duas maneiras o par formado dêsses dois comprimentos. Medindo com a pequena podemos dizer que a grande é o seu / dôbro; medindo com a grande, podemos dizer que a outra é a sua metade.

Vamos adotar um modo de escrever muito simples, utilizando os parênteses nos quais poremos, separados por um ponto e vírgula, os dois números ou letras que representam o par considerado. (c; C) e o par de dois comprimentos e <u>escreveremos sempre o comprimento que serve de medida em segundo lugar</u>. Assim (2; 4) e (4; 2) são dois / pares formados da barra vermelha e da carmim; no primeiro, é a carmim que mede a vermelha: (2; 4) = $^{1}/2$; no segundo é a vermelha que mede a carmim: (4; 2) = $^{2}/1$.

Podemos pois escrever agora as frações, seja sob a forma de / <u>pares ordenados</u> postos entre parênteses, seja sob forma de dois números separados por uma barra.

Escreve sob forma de pares ordenados:

$^{1}/3$, $^{2}/5$, $^{3}/2$, $^{1}/7$, $^{3}/8$, $^{5}/17$, $^{12}/7$, $^{21}/5$, $^{27}/8$, $^{14}/15$, $^{99}/19$,

$^{93}/_{12}$, $^{41}/_{57}$, $^{62}/_{63}$.

Escreve sob a forma de frações os pares ordenados seguintes:

(1;2), (2;1), (3;7), (8;3), (7;12), (8;27), (27;5), (14;5), (62;67).

2. Escreve sob a forma de frações e sob a forma de pares ordenados, os pares dados no princípio do nº 1.

Toma a barra branca e a verde clara e forma os pares que ~~ela~~ elas podem dar. E também as frações. Podes encontrar outros pares que dêem as mesmas frações?

Faze o mesmo com a branca e a carmim; com a branca e a amarela.

Dá as frações dos pares que formaste.

Quando os pares ordenados dão a mesma fração, dizemos que / são <u>equivalentes</u>.

Assim (1;2), (2;4), (3;6), (5;10) são todos iguais a $^1/_2$.

Escreveremos de duas maneiras ou $^1/_2 = {^2/_4} = {^3/_6} = {^4/_8} = {^5/_{10}} = \ldots$ ou (1;2) = (2;4) = (3;6) = (4;8) = (5;10) = ...

Podes escrever os primeiros têrmos da família de pares equivalentes a:

$^1/_3=$ $^1/_4=$ $^1/_5=$ $^2/_3=$ $^3/_4=$ $^2/_7=$

Utiliza tuas barras sempre que não souberes e para verificar as respostas.

3. Se te dermos um par ordenado, podes encontrar um par equivalente que seja de números menores? Ensaia com os pares seguintes:

(5;10) (6;18) (15;25)

Podemos, também formar dois comprimentos e procurarmos, se existe uma barra que contenha um número exato de vêzes êsses dois comprimentos, observando bem o número de vêzes.

Assim com (14;21) os dois comprimentos podem ser formados com o auxilio da barra negra que entra duas vêzes na primeira e três vêzes na segunda. Logo: (14;21) = (2 x ~~7; 3 x 7)~~ = (2;3). Por êsse método obtemos logo o par que tem o número menor ou, como diremos de agora em diante, os <u>têrmos</u> <u>menores</u>.

Êsse par é o primeiro da família. Nós o chamamos, às vêzes, <u>o par irredutível</u>, porque não podemos tornar seus têrmos menores. Começando com (28;42) e procedendo da mesma maneira, veremos que se podem utilizar as barras vermelhas, porque os dois têrmos são pares, ou as barras negras; assim temos:

(28;42) = (14 x 2; 21 x 2) = (14;21) = (2 x 7; 3 x 7) = (2;3)

(28;42) = (4 x 7; 6 x 7) = (4;6) = (2;3)

(28;42) = (2 x 14; 3 x 14) = (2;3)

Escrevendo tudo isto sob forma de frações, temos:

$$\frac{28}{42} = \frac{14 \times 2}{21 \times 2} = \frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{28}{42} = \frac{4 \times 7}{6 \times 7} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{28}{42} = \frac{2 \times 14}{3 \times 14} = \frac{2}{3}$$

No nº 2, nós formamos as famílias de frações ou de pares de números ordenados equivalentes, começando pelas irredutíveis, Aqui, nós começaremos com não importa qual fração e encontraremos a que família ela pertence, procurando a que fração irredutível ela é equivalente.

Encontra a família a qual pertence cada uma das frações seguintes:

(35;70)	(81;27)
(18;54)	(25;125)
(72;12)	(91;169)

4. Cada vez que uma fração nos é dada, sabemos como obter outras que lhe são equivalentes. Podes explicar como fazes?

Se escrevermos (a;b) para um par ordenado qualquer, com o qual o comprimento <u>a</u> é medido pelo comprimento <u>b</u>, podes dizer se os pares seguintes são equivalentes ou não?

(a;2 x b)	(5 x a;b)	(5 x a;7 x b)
(3 x a;3 x b)	(5 x a;5 x b)	(7 x a;7 x b)

$(^a/_b\ ;\ ^b/_2)$ $(^a/_3\ ;\ ^b/_3)$ $(^a/_7\ ;\ ^b/_7)$

$(^a/_3\ ;\ ^b/_5)$ $(^a/_5\ ;\ ^b/_7)$ $(^a/_9\ ;\ ^b/_{11})$

5. Escreve quais quer frações equivalentes às seguintes:

(A;B)

(B;A)

(A;C)

(Z;T)

6. Quando nos dão uma fração onde os têrmos são números, em vez de letras, elas têm um fim para a série das frações equivalentes?

Ex.: $^2/_3 =$

$^7/_5 =$

Ao contrário, se não precisamos quais são os comprimentos e se escrevemos em vez de $^2/_3$ e $^7/_5$, $^a/_b$ e $^c/_d$?

$^a/_b =$

$^c/_d =$

Tudo isso que te pedimos, é para notares o que fizeste em cada um dos casos precedentes e de o refazeres no caso onde os números não são dados.

7. Se (a;b) é uma fração, (b;a) é uma outra fração, chamada sua recíproca.

Encontra as recíprocas das frações seguintes:

(7;3) (2;5) (11;13)

(41;93) (11;97) (51;15)

Qual é a recíproca da recíproca de uma fração?

Se começamos com os pares seguintes:

(1;2) (1;3) (1;4) (1;5) (1;6)

suas recíprocas são:

Mas até agora, quando a barra branca estava contida um certo número de vêzes num comprimento formado por outras barras, nós dávamos a isso um nome. 13 era a medida da barra laranja e da verde clara ponta a ponta, servindo-nos da barra branca como medida. 13 é pois equivalente àquilo que nós escrevemos agora (13;1) ou $^{13}/_1$. Conseqüentemente, os números inteiros são pares ordenados onde o segundo têrmo

<u>é 1 (um) e não se escreve</u>. Quando reencontramos, por exemplo, o par (5;1) nós o escreveremos $^5/1$ ou 5 como julgarmos mais útil.

Escreve quais são as formas possíveis que podem tomar:

(12;1)	$^9/1$
$^7/1$	(17;1)
72	$^{15}/1$
$^{121}/1$	83
(57;1)	(73;1)

Podes encontrar as respostas para:

$^9/1 + (13;1) + 8 =$

$(17;1) - (12;1) + {}^6/1 =$

$(11;1) + (17;1) + {}^3/1 - {}^6/1 - 4 =$

$7 + (21;1) - {}^1/3 \times (15;1) =$

8. A recíproca de 13 escrevemos $^1/13$ se utilizamos a notação com a barra.

Com essa notação, podemos escrever a recíproca da recíproca $\frac{1}{\frac{1}{13}}$ e sabemos que ela é igual a 13.

Escreve a recíproca da recíproca da recíproca de 13 utilizando a mesma notação, e encontra seu valor. Faze o mesmo com 12, 121, / 372.

Se continuamos a tomar as recíprocas, não é necessário mais do que ajuntar novas barras e novos 1 (uns).

Podes ler:

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{9}}}} \qquad \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{21}}}}}\ ?$$

Começa de baixo.

Encontra o valor destas frações.

Se começamos com $^2/3$ sua recíproca é:

Podemos também escrever, empregando a notação $\frac{1}{\frac{2}{3}}$

A recíproca de $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ é $\frac{1}{\frac{1}{\frac{2}{3}}}$ e assim por diante.

Qual é a quarta recíproca de $^5/7$?

Qual é a sétima recíproca de $^3/4$?

Viste como podemos saber se um só esfôrço o valor dum número qualquer de recíprocas de uma fração?

9. Se escrevemos 12 + 13 sabemos que a resposta é 25.

Se escrevemos (12;1) + (13;1) qual é a reposta?

Podemos adicionar dois pares ordenados de números, quando o segundo têrmo dêstes pares é igual a 1.

Mas os comprimentos 12, 13 e 25 podem ser medidos com não importa qual outra barra que nós escolhemos. Substituimos então simplesmente êsses números por pares ordenados, conservando a relação da adição. Se, por exemplo, medimos com ajuda da barra amarela, temos então (12;5) + (13;5) = (12 + 13;5); o sinal + do lado esquerdo significa sòmente que juntamos o promeiro número e que deixamos o segundo intacto, pois que êle representa a barra que serve de medida.

Quando adicionamos frações que têm a mesma unidade de medida, basta juntar as quantidades medidas e escrever a resposta indicando que a unidade foi conservada idêntica.

(7;2) + (5;2) = (12;2) porque 7 + 5 = 12

(15;3) + (17;3) = (32;3) porque 15 + 17 = 32

Se utilizamos a barra, a notação vem a ser:

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2}$$

$$\frac{15}{3} + \frac{17}{3} = \frac{15+17}{3} = \frac{32}{3}$$

Encontra o valor das adições seguintes, operando como acima:

(2;13) + (4;13) + (9;13) =

$^4/_9 + ^3/_9 + ^1/_9 =$

$^1/_6 + ^2/_6 + ^3/_6 + ^4/_6 + ^5/_6 =$

$^2/_7 + ^{11}/_7 =$

(8;15) + $^9/_{15}$ + (7;15) =

(7;72) + (12;72) + (24;72) + (36;72) =

10. Vemos que 6=10 - 4 pode também ser escrito (6;1) = (10;1) - - (4;1). Podemos subtrair os pares, quando o segundo têrmo é o mesmo em cada um dos dois, ainda que êle seja diferente de 1?

Mediremos a barra verde escura, a laranja e a carmim pela barra verde clara. Temos sempre 6 = 10 - 4, o que, desta vez, escreveremos:

(6;3) = (10;3) - (4;3)

Assim, quando vamos subtrair dois pares tendo o mesmo segundo têrmo, basta subtrairmos um do outro os dois primeiros têrmos e escrever a resposta sob a forma de um par em que a unidade de medida seja a mesma.

(15;7) - (9;7) = (6;7) porque 15 - 9 = 6

(21;11) - (13;11) = (8;11) porque 21 - 13 = 8

Isso qu notamos assim, utilizamos a barra:

$$\frac{15}{7} - \frac{9}{7} = \frac{15 - 9}{- 7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{21}{11} - \frac{13}{11} = \frac{21 - 13}{11} = \frac{8}{11}$$

Encontra o valor das subtrações seguintes:

(7;13) - (2;13) =

(31;9) - (7;9) =

(8;19) - $^{7}/19$ =

(11;23) - (6;23) =

$^{7}/15$ - $^{4}/15$ =

$^{11}/12$ - (5;12) =

11. Combinamos agora as duas idéias de adição de frações e de frações equivalentes.

Se temos (7;18) + (6;18) sabemos que é igual a (7 + 6;18). Mas, (6;18) = (1;3).

Se pois, nos dão (7;18) + (1;3), devemos pensar em tôdas as frações equivalentes a (1;3) e escolher aquela cujo segundo têrmo é igual a 18.

Procederemos como se segue:

(7;18) + (1;3) = (7;18) + (6;18)

Se desejamos, podemos escrever tôda a seqüência das frações equivalentes a (1;3) que são necessárias para chegar a um segundo têrmo igual a 18:

(1;3) = (2;6) = (3;9) = (4;12) = (5;15) = (6;18).

Mas podemos ganhar tempo, pois que se sabe que 3 x 6 = 18 e que (1 x 6;3 x 6) = (1;3)

Se nos dão (7;25) + (3;5), poderemos proceder assim:

(7;25) + (3;5) = (7;25) + (3 x 5;5 x 5) = (7;25) + (15;25) = (22;25) porque vemos incontinente que 5 x 5 nos dá o segundo têrmo da primeira fração.

O mesmo se nos dão (3;7) + (5;21), é preciso substituir (3;7) por sua equivalente (9;21) e ajuntar 9 e 5. A resposta é (14;21) ou (2.3).

Encontra a resposta para:

(7;12) + (5;36) =

(1;14) + (3;28) =

(3;16) + (5;8) =

$^2/_{21}$ + $^9/_{42}$ =

(15;64) + (11;8) =

(1;15) + (2;5) =

(7;45) + (13;15) =

(7;32) + $^1/_{16}$ =

12. Para substituirmos, podemos proceder da mesma maneira.

Encontra a resposta:

(7;12) - (5;36) =

(5;8) - (;16) =

$^{14}/_{55}$ - $^1/_{11}$=

$^9/_{10}$ - $^{17}/_{100}$ =

13. Podemos naturalmente sdicionar mais de duas frações, dentro da medida em que é possível encontrar as frações equivalentes das frações dadas e que têm uma unidade de medida igual.

(2;7) + (3;14) + (9;28) =

= (2 x 4;7 x 4) + (3 x 2; 14 x 2) + (9;28)=

= (8 + 6 + 9;28) = (23;28)

Podemos mesmo reunir adições e subtrações e operar da mesma maneira.

(2;7) - (3;14) + (9;28) =

= (8;28) - (5;28) + (9;28)=

= (8 - 6 + 9;28) = (11;28)

Encontra a resposta para:

$^1/_9$ + $^5/_{18}$ + $^7/_{36}$ =

$^2/_3$ + $^5/_6$ + $^7/_{12}$ =

(1;15) + $^7/_{30}$ - $^1/_5$ =

(3;5) - $^2/_{10}$ + $^7/_{20}$ =

14.A que chegamos se, das duas barras que medem, não há mais // que uma que é múltiplo de outra como anteriormente.

Seja por exemplo (5;7) e (7;9) para adicionar. Entre as frações equivalentes à (5;7) temos:

$^{5}/7 = {}^{10}/14 = {}^{15}/21 = {}^{20}/28 = {}^{25}/35 = {}^{30}/42 = {}^{35}/49 = {}^{40}/56 =$
$= {}^{45}/63 = {}^{50}/70 = \ldots$ e entre aquelas que são equivalente a $(7;9)$ temos:

$^{7}/9 = {}^{14}/18 = {}^{21}/27 = {}^{28}/36 = {}^{35}/45 = {}^{42}/54 = {}^{49}/63 = {}^{56}/72 =$
$= {}^{63}/81 = \ldots$

Nelas há duas:

$$^{45}/63 \text{ e } {}^{49}/63$$

que apresentam a mesma unidade de medida, seja aqui 63.

Podemos portanto adicioná-las e obter:

$(5;7) + (7;9) = (45;63) + (49;63) = (45 + 49;63) = (94;63).$

É necessário escrever tôdas as frações equivalentes?

$(5;7) + (7;9) = (5 \times 9;7 \times 9) + (7 \times 7;9 \times 7) = (45;63) +$
$+ (49;63)$

seria suficiente.

Êsse processo é mais curto. Podes dizer porque é correto e como fizeste para encontrá-lo?

Resolve as adições seguintes procedendo da mesma maneira:

$(2;3) + (4;5) =$ $\qquad$ $(1;11) + (3;7) =$

$(5;6) + (4;7) =$ $\qquad$ $(2;9) + (1;13) =$

$(7;8) + (5;9) =$ $\qquad$ $(4;7) + (3;10) =$

$^{1}/3 + {}^{2}/5 =$ $\qquad$ $^{2}/13 + {}^{1}/6 =$

$^{3}/7 + {}^{2}/11 =$ $\qquad$ $^{5}/12 + {}^{7}/6 =$

$^{4}/9 + {}^{3}/10 =$

Para as subtrações operamos da mesma maneira.

Encontra as respostas para:

$^{2}/9 - {}^{1}/13 =$ $\qquad$ $(4;5) - (2;3) =$

$^{7}/8 - {}^{5}/9 =$ $\qquad$ $(5;6) - (4;7) =$

$^{3}/7 - {}^{1}/11 =$ $\qquad$ $(4;7) - (3;10) =$

15. Se escrevemos duas frações ao acaso seu segundo têrmo pode ter um fator comum. Isso torna sua adição ou sua subtração mais difícil?

Tomemos um exemplo: (7;8) + (5;27).

Podemos escrever:

(7;18) + (5;27) = (7;2 x 9) + (5;3 x 9) =

= (7 x 3;2 x 9 x 3) + (5x2;3 x 9 x 2) =

= (21;54) + (10;54) =

= (31;54)

Aqui, levamos em consideração o fato de que 9 é um fator comum de 18 e de 27, o que permite abreviar para encontrar as frações equivalentes.

18 = 2 x 9 e 27 = 3 x 9, assim para obtermos uma unidade de medida que contenha por sua vez 18 e 27, é suficiente escolher 54 ou 3 x 2 x 9 ou 2 x 9 x 3 ou 6 x 9. Ora, 6 contém o outro fator de 18 que é 2 e o outro fator de 27 que é 3.

É sempre verdadeiro quando nós nos encontramos em face de frações desta espécie?

Organizado e Arquivado em 5/11/1982 Westphalen CALM