Arquivado em
5/11/82
Westphalen
C.A.L.M.

L'ARITHMETIQUE AVEC LES NOMBRES EN COULEURS

Caleb Gattegno.

fatos básicos

IV.

Les nombres jusqu'à 1000 (os nºs. até 1.000)

Proprietés et Operations

Delachaux & Niestlé S.A.

Neuchatel — Paris VII éme

4 Rue de L'Hôpitel /32 Rue de Grenelle.

T r a d u t ó r a s :

Esther Galanternick
Eva Tomasoni Monteiro de Barros
Maria Helena Azevedo Ferreira
Véra Neuza Lopes

OUTUBRO, 1962. — Alunas do D.E.E. - C.F.T.S.E.

Primeira parte: OS NÚMEROS ATÉ 1000.

1. Escolham uma barra, depois, coloquem sôbre ela uma outra, de modo que formem uma cruz.

Qual é o resultado desta multiplicação?

Se escolhermos dois números pares e se dobrarem o comprimento de uma das barras, que é preciso fazer com a outra para que o resultado fique o mesmo?

Tomem, por exemplo, uma barra laranja e uma marron. Se dobrarem a laranja, que barra porão em cruz para formar 80? Se dobrarem ainda, qual é a nova barra que porão em cruz? Podem continuar dobrando? Dobrem agora a marron; que barra será necessario colocar em lugar da laranja?

Formem, tantos quantos puderem achar, produtos que, como no exemplo anterior, fiquem iguais quando se dobra um dos fatôres.

2. Em lugar de colocar duas barras em cruz, pode-se também superpôr três que se cruzam uma à outra?

Formem um número com auxilio dêste "trio" de barras. Se as três barras fôrem vermelhas, que resultado obtêm vocês, multiplicando todas juntas?

Formemos o "trio" do qual a barra superior é uma vermelha. Sabemos que isto significa que dobramos um produto já conhecido. Achem as respostas nos casos seguintes:

2 × 2 × 2 =	3 × 2 × 2 =	4 × 2 × 2 =
5 × 2 × 2 =	6 × 2 × 2 =	8 × 2 × 2 =
8 × 2 × 2 =	9 × 2 × 2 =	10 × 2 × 2 =
2 × 3 × 2 =	3 × 3 × 2 =	4 × 3 × 2 =
5 × 3 × 2 =	6 × 3 × 2 =	7 × 3 × 2 =
8 × 3 × 2 =	9 × 3 × 2 =	10 × 3 × 2 =
2 × 4 × 2 =	3 × 4 × 2 =	4 × 4 × 2 =
8 × 4 × 2 =	6 × 4 × 2 =	7 × 4 × 2 =
2 × 5 × 2 =	9 × 4 × 2 =	10 × 4 × 2 =
8 × 5 × 2 =	3 × 5 × 2 =	4 × 5 × 2 =
5 × 5 × 2 =	6 × 5 × 2 =	7 × 5 × 2 =
5 × 4 × 2 =	9 × 5 × 2 =	10 × 5 × 2 =

Procurem as que dão as mesmas respostas.

3. Duas barras laranja colocadas em cruz dão o produto 100. Pode-se tambem formá-lo com o trio de barras 10 5 2 que é o dôbro de 50. Este trio pode ser representado de diferentes modos: amarelo, laranja e vermelho, seja 5 10 2; laranja, vermelho e amarelo, seja 10 2 5; vermelho, laranja e amarelo, seja 2 10 5. Achamos sempre 100, por exemplo?

Verifiquem o que está escrito:

$100 = 10 \times 10 = 10 \times 5 \times 2 = 5 \times 10 \times 2 = 10 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 10 = 2 \times 10 \times 5 = 5 \times 2 \times 10.$

Se do trio retiramos a barra superior, isto significa que dividimos o produto formado pelo trio pelo valor desta barra. Assim:

$100 \div 2 = 10 \times 5 = 50$	$100 \div 5 = 10 \times 2 = 20$
$100 \div 2 = 5 \times 10 = 50$	$100 \div 5 = 2 \times 10 = 20$
$100 \div 10 = 2 \times 5 = 10$	$100 \div 10 = 5 \times 2 = 10$

4. Façam a mesma coisa com as barras azul, amarela e vermelha, seja 9 5 2 e escrevam tôdas as respostas.

Com 8 × 5 × 2, 7 × 4 × 2 e 6 × 3 × 2.

5. Façam uma cruz com duas barras laranjas.

Se agora se formarem todos os trios possíveis, obtem-se, conforme a barra colocada seja em cima:

vermelha	2 × 100 ou 200	que	lemos	duzentos.
verde-claro	3 × 100 ou 300	"	"	trezentos.
carmin	4 × 100 ou 400	"	"	quatrocentos.
amarelo	5 × 100 ou 500	"	"	quinhentos.
verde-escuro	6 × 100 ou 600	"	"	seiscentos.
prêta	7 × 100 ou 700	"	"	setecentos.
marron	8 × 100 ou 800	"	"	oitocentos.
azul	9 × 100 ou 900	"	"	novecentos.
laranja	10 × 100 ou 1000	"	"	mil.

Quantas barras brancas são necessárias, colocadas ponta a ponta, para fazer o comprimento representado pelos "trios" seguintes:

laranja, laranja, vermelha
laranja, laranja, amarela
laranja, laranja, prêta
laranja, laranja, laranja.

Formem um quadrado com dez barras laranjas. Quantas barras brancas são necessárias para fazer um quadrado igual? Se colocarem as dez barras laranjas ponta a ponta, quantas barras brancas serão necessárias para fazer o mesmo comprimento?

Podem dizer quantas barras laranjas são necessárias para fazer o comprimento mil? E quantos grupos de dez barras laranjas? Podem fazer um cubo utilizando sòmente barras laranjas? Que comprimento farão tôdas estas barras laranja ponta a ponta? Se quiserem utilizar os cubos brancos, quantos são necessários para fazer o mesmo comprimento?

6. Se dividimos o número mil por dez, o que obtemos?
Se dividimos o número 1000 por 100, que obtemos?
Completem o quadro seguinte:

7 × 10 × 10 =	7 × 100 =	10 × 8 × 10 =
10 × 8 =	700 ÷ 7 =	800 ÷ 80 =
800 ÷ 100	800 ÷ 8 =	600 ÷ 100 =
900 ÷ 90	600 ÷ 60 =	600 ÷ 6 =
600 ÷ 10	600 ÷ 100 =	400 ÷ 40 =
300 ÷ 30	300 ÷ 3 =	300 ÷ 100 =

7. Achem:

5 × 16 =	2 × 35 =	4 × 8 =
4 × 14 =	2 × 32 =	4 × 16 =
2 × 25 =	3 × 20 =	5 × 14 =
4 × 18 =	2 × 15 =	27 × 2 =

Se não sabem fazê-lo, usem as barras.

Achem:

60 × 10 =	10 × 70 =	10 × 90 =
80 × 10 =	8 × 100 =	6 × 10 × 10 =
30 × 10 =	10 × 50 =	4 × 100 =

8. Tomem o dôbro de 60, de 70, de 80, de 90.
Façam os "trios" que correspondem a êstes produtos.
Escrevam-nos de todos os modos possíveis.

Para saber como chamamos 12 dez, é suficiente saber que: 12 × 10 = 10 × 12 = 10 × (10 + 2) = 10 dez + 10 dois = 100 + 20 = <u>cento e vinte</u>, que se escreve 120.

Façam a mesma coisa com 14 dez, 16 dez, 18 dez. As diversas formas com as quais podemos escrever êsses números, vão nos permitir ver imediatamente quais são os números seguintes:

120 ÷ 10 ou 1/10 de 120 =	120 ÷ 12 ou 1/12 de 120 =
120 ÷ 2 ou 1/2 de 120 =	120 ÷ 60 ou 1/60 de 120 =
120 ÷ 6 ou 1/6 de 120 =	120 ÷ 3 ou 1/3 de 120 =
120 ÷ 4 ou 1/4 de 120 =	120 ÷ 20 ou 1/20 de 120 =
120 ÷ 5 ou 1/5 de 120 =	
140 ÷ 10 ou 1/10 de 140 =	140 ÷ 14 ou 1/14 de 140 =
140 ÷ 2 ou 1/2 de 140 =	140 ÷ 10 ou 1/10 de 140 =
140 ÷ 7 ou 1/7 de 140 =	140 ÷ 5 ou 1/5 de 140 =
160 ÷ 10 ou 1/10 de 160 =	140 ÷ 20 ou 1/20 de 140 =
160 ÷ 2 ou 1/2 de 160 =	160 ÷ 16 ou 1/16 de 160 =
160 ÷ 8 ou 1/8 de 160 =	160 ÷ 80 ou 1/80 de 160 =
160 ÷ 5 ou 1/5 de 160 =	160 ÷ 4 ou 1/4 de 160 =
160 ÷ 20 ou 1/20 de 160 =	160 ÷ 32 ou 1/32 de 160 =
180 ÷ 10 ou 1/10 de 180 =	180 ÷ 18 ou 1/18 de 180 =
180 ÷ 2 ou 1/2 de 180 =	180 ÷ 90 ou 1/90 de 180 =
180 ÷ 9 ou 1/9 de 180 =	180 ÷ 8 ou 1/8 de 180 =
180 ÷ 4 ou 1/4 de 180 =	180 ÷ 45 ou 1/45 de 180 =
180 ÷ 6 ou 1/6 de 180 =	180 ÷ 60 ou 1/60 de 180 =
180 ÷ 20 ou 1/20 de 180 =	180 ÷ 30 ou 1/30 de 180 =

9. Quanto é:

1/10 de 120? 1/16 de 160? 5/18 de 180? 1/9 de 180?
6/14 de 140? 3/14 de 140? 3/20 de 120? 7/12 de 120?

10. Se retirarmos o 0 em cada um dos novos números que acabamos de escrever, o resultado é o mesmo que se tivéssemos dividido por dez. Se multiplicarmos um número por 10, que mudança isto produzirá na escrita do mesmo número?

Vejam se é exato para todos os números que conhecem que terminam por zero:

$160 \div 10 =$ $16 \times 10 =$
$70 \div 10 =$ $7 \times 10 =$
$50 \div 10 =$ $5 \times 10 =$
$1000 \div 10 =$ $100 \times 10 =$

Que é 170? 130? Podem dar-lhe um nome?

Utilizando barras, podem formar êsses números com o auxílio de um "trio" "trio"?

Eis aqui um modo de fazer um dêles:

130. É 13 dez ou $(10+3) \times 10$ ou $100+30$ ou cento e trinta. Para colocá-lo em forma de "trio", podemos trocar 10 por 2×5 e temos: $13 \times 5 \times 2$ ou (laranja e verde-claro), amarelo, vermelho.

$130 = 5 \times 13 \times 2 = 5 \times 2 \times 13 = 2 \times 5 \times 13 = 2 \times 13 \times 5 = 13 \times 5 \times 2 = 13 \times 2 \times 5.$

Completem:

$130 \div 5$ ou 1/5 de 130 = $130 \div 10$ ou 1/10 de 130 =
$130 \div 13$ ou 1/13 de 130 = $130 \div 2$ ou 1/2 de 130 =
$130 \div 26$ ou 1/26 de 130 = $130 \div 65$ ou 1/65 de 130 =

Façam a mesma coisa com 110, 150, 170, 190.

11. Escrevam os produtos por 10 dos números compreendidos entre:

21 e 30
31 e 40
41 e 50
51 e 60
61 e 70
71 e 80
81 e 90
91 e 100.

Dêem-lhes um nome como fizeram anteriormente, e assegurem-se de que esteja exato. Interroguem seus vizinhos antes de perguntar à sua professôra.

Ponham alguns sob forma de "trio" e completem:

$210 \div 10$ ou 1/10 de 210 = $210 \div 21$ ou 1/21 de 210 =
$210 \div 70$ ou 1/70 de 210 = $210 \div 3$ ou 1/3 de 210 =
$210 \div 7$ ou 1/7 de 210 = $210 \div 30$ ou 1/30 de 210 =

Podem fazer um quadro como aquêle do exercício 8, para alguns dos números que escreveram?

12. Sabemos agora escrever e ler todos os números compreendidos entre 100 e 1000, que terminam por um 0. Podemos colocá-los sob forma de "trio", contendo uma barra laranja, com exceção de alguns casos. Quais são os casos onde não é possível? Expliquem porquê.

Quais são os fatôres de: 630, 710, 530, 210, 190, 230, 990, 750, 840, 180, 270, 360, 960, 720, 420, 410?

13. Ponham os números seguintes por <u>ordem crescente</u>: 730, 470, 920, 890, 770, 900, 650, 310, 190, 570, 690, 700.

E os seguintes por <u>ordem decrescente</u>: 150, 710, 980, 20, 410, 690, 850, 900, 540, 180, 210, 390, 760.

Contem por cem a partir de 100;
" " dez a " de 10;
" " vinte a " de 10;
" " vinte a " de 20;
" " cinqüenta a partir de 50;

Contem por cinqüenta a partir de 10, depois de 20, depois de 30, depois de 40;

Contem por sessenta, a partir de 60, depois de 50, depois de 40, depois de 10.

Escrevam todos os múltiplos (inferiores a 1000) de:

20	30	40
50	60	70
80	90	

Que notaram?

14. Se, partindo de um número qualquer, dobramos, depois dobramos o resultado e continuamos a dobrar assim, diremos que "se parte.....dobrando sempre".

Com 2 teremos:

$2 \qquad 2 \times 2 = 4 \qquad 2 \times 4 = 8$

$2 \times 8 = 16 \qquad 2 \times 16 = 32 \qquad 2 \times 32 = 64$

$2 \times 64 = 2(60 + 4) = 2 \times 60 + 2 \times 4 = 120 + 8$

Êste último número se chama cento e vinte e oito e se escreve 128.

$2 \times 128 = 2(120 + 8) = 2 \times 120 + 2 \times 8 = 240 + 16$ ou $240 + 10 + 6$ que se escreve 256 e se lê duzentos e cinqüenta e seis.

$2 \times 256 = 2 \times (250 + 6) = 2 \times 250 + 2 \times 6 = 500 + 12$ ou quinhentos e doze que se escreve 512.

$2 \times 512 = 2(500 + 12) = 2 \times 500 + 2 \times 12 = 1000 + 24$ que lemos mil e vinte e quatro e se escreve 1024.

Partam de 10 e dobrem sempre. Que notaram?

Partam de 3 e dobrem sempre:

$3 \qquad 2 \times 3 = \qquad 2 \times (2 \times 3) = \qquad 2 \times (2 \times (2 \times 3)) =$

$2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 3) = \qquad 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3) =$

Para dobrar 96, podemos fazer de dois modos:

1) $2 \times 96 = 2 \times (90 + 6) = 2 \times 90 + 2 \times 6 = 180 + 12 = 180 + 10 + 2 = 190 + 2 = 192$.
ou cento e noventa e dois.

2) $2 \times 100 = 200$; ora 96 é 4 menos que 100; duas vêzes 4 são 8, tiramos 8 de 200 e obtemos 192.

$2 \times 192 = 2 \times (190 + 2) = 2 \times 190 + 2 \times 2 = 380 + 4 = 384$ ou trezentos e oitenta e quatro.

$2 \times 384 = 2 \times (380 + 4) = 2 \times 380 + 2 \times 4 = 760 + 8 = 768$ ou setecentos e sessenta e oito.

Repitam estas séries onde cada número é o dôbro do precedente, depois voltem atrás dividindo por dois cada número, um depois do outro, até encontrarem o primeiro número da série.

15. Quando um número tem três algarismos como 768 ou 384, o da esquerda é o das centenas, o do meio é o das dezenas, e o da direita é o das unidades.
700 tem 7 centenas, não tem dezenas e não tem unidades.
720 tem 7 centenas, 2 dezenas e não tem unidades.
723 tem 7 centenas, 2 dezenas e 3 unidades.
Escrevemos c para as centenas, d para as dezenas e u para as unidades:
$723 = 7\,(c) + 2\,(d) + 3\,(u)$ ou $7 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1$.

Escrevam do mesmo modo:

475	192	831
649	505	368
999	706	216

16. Entre 90 e 100, há os números: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99.

Que números há entre:
200 e 210
320 e 330
370 e 380
430 e 440
560 e 570
610 e 620
780 e 790
890 e 900
940 e 950?

Escrevam em algarismos os números seguintes:
setecentos e oitenta e três
seiscentos e trinta e sete

novecentos e onze...
quinhentos e oito
trezentos e vinte e um
quatrocentos e um.

Leiam os números seguintes:

731, 601, 756, 987, 814, 513, 247, 303, 388, 111.

17. Partam de 5 e dobrem sempre. Que notaram? Partam de 4 e vão dobrando. Partam de 8, de 16. Que notaram?

Partam de 6 e dobrem sempre. Que notaram? Quais são os números que darão a mesma seqüência?

Voltam atrás começando pelo maior número inferior a 1000 que obtiveram.

18. Partam de sete e dobrem sempre. Voltem atrás logo que atingirem quase 1000.

Partam de 11 e dobrem sempre. Voltem atrás logo que atingirem quase 1000.

Idem 13

Idem 15.

Em vez de dobrar, multipliquem cada vez por quatro. Que notam? Que devem fazer para obter os mesmos números, voltando atrás?

Em lugar de multiplicar por 4, multipliquem por 8. Que notam? Se querem achar os mesmos números, voltando, que devem fazer?

19. Sabemos o que é preciso fazer para multiplicar por 10, ou para dividir por 10, um número que termine por um 0.

Quais são os algarismos das unidades dos números <u>múltiplos de 2</u> e que chamamos <u>números pares</u>?

Podem achar todos os números múltiplos de 5 que são inferiores a 1000? Por qual algarismo terminam êles?

São todos pares? Quais dêles o são? Quais os que não são?

20. A cruz marron, amarela, e a cruz carmin e laranja, são equivalentes. Quais são os múltiplos de 5 que são também múltiplos de 10? Qual é a relação entre o número que multiplica 5 e o que multiplica 10, quando se coloca cada um dêstes números sob estas duas formas?

Pois que é tão fácil multiplicar por 10, sabem o que podem fazer para multiplicar um número por 5? Se não sabem, utilizem as barras para os seguintes casos: 16×5 18×5 5×22 5×14 5×12.

Quando tiverem visto o uso que podemos fazer da multiplicação por 10 para poupar tempo e esfôrço, procurem o que podemos fazer nos casos 5×17 ou 5×13. Já que não é cômodo tomar a metade de 17 ou de 13, multiplicaremos por 10 primeiro e depois dividiremos o resultado por 2:

$5 \times 17 = 1/2$ de (10×17) ou $1/2$ de $170 = 85$, pois $1/2$ de $100 = 50$ $1/2$ de $70 = 35$.

$5 \times 13 = 1/2$ de (10×13) ou $1/2$ de $130 = 65$, pois $1/2$ de $100 = 50$ $1/2$ de $30 = 15$.

Achem as respostas:

$5 \times 24 =$	$5 \times 25 =$	$5 \times 42 =$
$28 \times 5 =$	$5 \times 64 =$	$24 \times 5 =$
$5 \times 180 =$	$160 \times 5 =$	$168 \times 5 =$
$35 \times 5 =$	$19 \times 5 =$	$15 \times 5 =$

Quando fôr possível, verificarão com os trios que efetuaram.

21. Contem de 5 em 5, a partir de 5. Escrevam os números obtidos.

Quanto fazem: 12×5? 20×5? 21×5? 30×5? 50×5?
11×5? 22×5? 33×5? 44×5? 55×5?

A cruz que representa estas multiplicações se compõe de uma barra amarela colocada atravessada no comprimento formado por barras laranja com outra na ponta. Podemos então obter a resposta multiplicando por 5 o número de barras laranja ponta a ponta e juntando o produto por 5 de outra barra.

$33 \times 5 = (3 \times 10 + 3) \times 5 = 15 \times 10 \times 15 = 15 \times 10 + 10 + 5 = 16 \times 10 + 5 = 160 + 5 =$ 165.

Podemos encurtar desta maneira:
33 x 5 = 30 x 5 + 3 x 5 = 150 + 15 = 165

ou

$$\begin{array}{r} 33 \\ \times 5 \\ \hline 15 \\ 150 \\ \hline 165 \end{array}$$

Servimo-nos aqui de uma disposição na qual as unidades são colocadas numa coluna, as dezenas, as dezenas noutras e as centenas noutra acima.

Disponham assim as seguintes multiplicações:

43 x 5	78 x 5	56 x 5	39 x 5

Comparem com o outro método e vejam qual o que leva menos tempo e menos esfôrço.

22 - Para multiplicar por 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, podem utilizar os trios, pois 20 ÷ 2 x 10, 30 = 3 x 10, 40 = 4 x 10, etc.

Podem achar as respostas seguintes e escrevê-las:

20 x 17 =	19 x 20 =	31 x 20 =
2[illegible] x 30 =	42 x 3 0=	30 x 30 =
12 x 40 =	40 x 22 =	25 x 40 =
50 x 18 =	20 x 50 =	13x 50 =
8 x 60 =	13 x 60 =	60 x 11 =
70 x 6 =	12 x 70 =	70 x 90 =
80 x 12 =	11 x 80 =	9 x 80 =

23 - Façam um quarteto, como por exemplo, uma barra marron, uma laranja, uma vermelha, uma verde escuro, cruzadas umas sôbre as outras. Troquem a ordem das barras e vejam o que resultou do produto. Escrevam os diferentes produtos obtidos com um "quarteto" que contem uma barra laranja.

Por exemplo o "quarteto" acima pode se traduzir de tôdas as formas seguintes
8 x 10 x 2 x 6 = 80 x 12 = 10 x 8 x 2 x 6 = 10 x 2 x 8 x 6 = 20 x 48 = x
10 x 6 x 2 x 8 = 60 x 16 = 960 e mais outras ainda 960 = 2 x 480 =
6 x 160 = 8 x 120 = 10 x 96 = 12 x 80 = 16 x 60 = 20 x 48.
cada um destes produtos podendo se ler de duas maneiras, por exempolo:

16 x 60 ou 60 x 16.

Quando formarem um "quarteto" ., se retirarem uma duas ou três barras, podem ver quais são as quẽ restam e multiplicá-las junto. Isto dará o resultado da divisão pelo valor da ou das barras retiradas. Acharão assim:

960 : 2 =	960 : 6 =	960 : 8 =
960 : 10 =	960 : 12 =	960 : 16 =
960 x 20 =	960 : 48 =	960 : 60 =
960 x 80 =	960 : 96 =	960 : 120 =
960 x 160 =	960 : 480 =	

Isto se pode ~~x~~ lêr sob a forma de fração.
Quanto é:

1/2 de 960 = 1/6 de 960 ? 1/8 de 960 ? etc...

Podemos lêr facilmente as questões seguintes:

1/16 de 960 =	3/16 de 960 =	5/16 de 960 =
1/12 de 960 =	5/12 de 960 =	7/12 de 960 =
1/48 de 960 =	21/48 de 960 =	33/48 de 960 =

Formem os "quartetos" que seguem, façam os produtos e divisões e depois escrevam algumas frações: laranja, amarelo, carmin, vermelha;
laranja, verde escuro, carmin
laranja, preto, verde claro, vermelha.

Façam "trios" sem utilizarem as barras laranja. Podem efetuar o produto? Façam um quadro dos que já conhecem. Podem trocar um "trio", contendo uma barra carmin, por um "quarteto" que contenha duas vermelhas? O produto é mais fácil de efetuar assim?

$6 \times 7 \times 4 = 6 \times 7 \times 2 \times 2 = 42 \times 2 \times 2 = 84 \times 2 = 168.$

Primeiramente transformamos $6 \times 4 \times 7$ ou $4 \times 7 \times 6$ de modo a ter $6 \times 7 \times 4$, depois trocamos o 4 por 2×2.

Qualquer "trio" contendo a barra marron pode ser transformado em um "quarteto", com uma barra vermelha e uma carmin, ou em um "quinteto", com três vermelhas. Isto torna certas multiplicações bem mais fáceis. $8 \times 7 \times 6 = 7 \times 6 \times 8 = 7 \times 6 \times 4 \times 2 = 7 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2 = (42 \times 2) \times 2 \times 2 = (84 \times 2) \times 2 = 168 \times 2 = 2 \times 160 + 2 \times 8 = 320 + 16 = 336.$

Façam o mesmo, usando as barras seguintes: verde-claro, marron, azul;
verde-claro, marron, prêta;
azul, marron, azul.

Quando há uma amarela e uma marron, há necessidade de seguir êste método? Digam porquê.

25. Podemos fazer a mesma coisa para multiplicar por 16, por 32 ou por 64. Se sabemos já multiplicar por 8, podemos dobrar uma vez mais para achar o resultado da multiplicação por 16. Dobrando ainda, obteremos o da multiplicação por 32 e dobrando ainda, o da multiplicação por 64. Seja:

$25 \times 2 = 50$ $\quad$ $25 \times 4 = 100$ $\quad$ $25 \times 8 = 200$
$25 \times 16 = 400$ $\quad$ $25 \times 32 = 800$ $\quad$ $25 \times 64 = 1600$

É fácil de se lembrar que 25×4 ou $4 \times 25 = 100$, de modo, digo, de onde $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 800.$

$27 \times 2 = 54$ $\quad$ $27 \times 4 = 108$ $\quad$ $27 \times 8 = 216$
$27 \times 16 = 432$ $\quad$ $27 \times 32 = 864$

Quando podemos nos recordar de um dêstes resultados, torna-se fácil achar a outros. Mas em cada caso preciso, há vantagem em procurar o meio mais cômodo para obter a resposta.

<u>Como multiplicar por 25:</u>

Como $25 = 1/4$ de 100, multiplicamos primeiro por 100, quer dizer, pomos dois zeros à direita do número, depois dividimos por 4. Seja:

$$13 \times 25 = \frac{13 \times 100}{4} = \frac{1300}{4} = 325$$

$$27 \times 25 = \frac{27 \times 100}{4} = \frac{2700}{4} = 675$$

$$34 \times 25 = \frac{34 \times 100}{4} = \frac{3400}{4} = 850$$

Procuremos agora, o que dá 27×32:

$27 \times 32 = (25 + 2) \times 32 = 25 \times 32 + 2 \times 32 = 800 + 64 = 864.$

Calculem do mesmo modo: $27 \times 29 =$ $\quad$ $26 \times 26 =$
$26 \times 37 =$ $\quad$ $27 \times 27 =$
$27 \times 26 =$

26. Contem de 25 em 25, partindo de 25. Escrevem os números obtidos, grupando-os por 4. Que notam?

Quais são as terminações (os últimos algarismos à direita) de todos os múltiplos de 25? Quais são os que terminam por dois 0?
Quais são os que terminam por 50 ?
Quais são os que terminam por 75 ?
Quais são os que terminam por 25 ?

Podem dizer, sem calcular a resposta, qual será a terminação de cada um dos produtos seguintes?

Verificarão em seguida: $7 \times 25 =$ $\quad$ $47 \times 25 =$ $\quad$ $12 \times 25 =$
$8 \times 25 =$ $\quad$ $14 \times 25 =$ $\quad$ $16 \times 25 =$
$25 \times 25 =$ $\quad$ $18 \times 25 =$ $\quad$ $19 \times 25 =$
$9 \times 25 =$ $\quad$ $15 \times 25 =$ $\quad$ $5 \times 25 =$

Sabemos agora multiplicar por 5, por 10, por 100, por 2, 4, 8, 16, 32, 64 e por 25. Igualmente por todos os números que requerem simplesmente que se acrescente um zero no fim do resultado de uma dessas multiplicações que já sabemos fazer. É assim que saberemos multiplicar por 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, se sabemos também multiplicar por 3, 6, 7, 9.

Já que $6 = 2 \times 3$, se sabemos multiplicar por 3, basta dobrar a resposta. Seja:

$6 \times 15 = 2 \times (3 \times 15) = 2 \times 45 = 90$
$17 \times 6 = (17 \times 3) \times 2 = 51 \times 2 = 102.$

Calculem:
$29 \times 6 =$
$33 \times 6 =$
$37 \times 6 = (30 + 7) \times 6 =$
$45 \times 6 = (40 + 5) \times 6 =$
$48 \times 6 = (40 + 8) \times 6 =$

Já que $9 = 3 \times 3$, podemos multiplicar por 3 e depois ainda por 3. Para multiplicar por 7, é necessário conhecer todos os produtos por 7 dos números de 1 a 9, e obtemos o resultado, procedendo assim:

$45 \times 7 = (40 + 5) \times 7 = 40 \times 7 + 5 \times 7 = 280 + 35 = 315$
$72 \times 7 = (70 + 2) \times 7 = 70 \times 7 + 2 \times 7 = 490 + 14 = 504$

28. No livro II, dispusemos desta maneira as multiplicações de dois números:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 7 \\ \hline 21 \\ 70 \\ \hline 91 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 23 \\ \times\ 3 \\ \hline 9 \\ 60 \\ \hline 69 \end{array}$$

colocando os números em colunas e somando os resultados parciais obtidos: no primeiro caso $7 \times 3 = 21$ e $7 \times 10 = 70$; no segundo caso $3 \times 3 = 9$ e $3 \times 20 = 60$.

Podemos fazer a mesma coisa em todos os casos que fôrem encontrados aqui:

$$\begin{array}{rl} 49 & \text{e dizemos:} \\ \times\ 6 & 6 \times 8 = 48 \\ \hline 48 & \\ 240 & 6 \times 40 = 240 \\ \hline 288 & \end{array}$$

depois adicionamos.

Do mesmo modo:

$$\begin{array}{rl} 47 & \text{e dizemos:} \\ \times\ 7 & 7 \times 7 = 49 \\ \hline 49 & \\ 280 & 7 \times 40 = 280 \\ \hline 329 & \end{array}$$

e depois adicionamos.

Estas duas multiplicações e a adição que seguem, podem ser feitas mentalmente; então, em lugar de três linhas, basta uma somente:

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

e podemos dizer: $6 \times 8 = 48$, escrevo 8 e retenho 4 dezenas; 6×4 dezenas 24 dezenas, mais as 4 dezenas = 28 dezenas, e escrevo 28 à esquerda do 8.

Façam do mesmo modo as seguintes multiplicações:

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 69 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 27 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 54 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 65 \\ \times\ 5 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 37 \\ \times\ 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 3 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 83 \\ \times\ 7 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 34 \\ \times\ 9 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ \times\ 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 50 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 56 \\ \times\ 40 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 73 \\ \times\ 30 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 69 \\ \times\ 60 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 38 \\ \times\ 70 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r}96\\ \times\ 30\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}83\\ \times\ 70\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}34\\ \times\ 90\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}72\\ \times\ 80\\ \hline\end{array}$$

29. Agora, multipliquemos 120 por 5. Vemos logo que a resposta é 600, porque é possível fazer um "quarteto": verde-claro, carmin, laranja e amarelo, e trocando a ordem temos: $120 \times 5 = 12 \times 5 \times 10 = 60 \times 10 = 600$.

Dispondo como no nº 28, temos:

$$\begin{array}{r}120\\ \times\quad 5\\ \hline 600,\end{array}$$

o que se pode dizer assim: 5×2 dezenas = dez dezenas ou 1 centena; 5×1 centena = 5 centenas; mais uma centena, isto = 6 centenas.

Se tomamos o número 121 ou 132 ou não importa qual outro número inferior a 200, podemos, da mesma maneira, multiplicá-lo por 5 e achar:

$$\begin{array}{r}121\\ \times\quad 5\\ \hline 605\end{array}\qquad\begin{array}{r}132\\ \times\quad 5\\ \hline 660\end{array}\qquad\begin{array}{r}143\\ \times\quad 5\\ \hline 715\end{array}\quad\ldots\quad\begin{array}{r}166\\ \times\quad 5\\ \hline 830\end{array}$$

Leiam estas operações em voz alta, como fizeram no precedente e digam se as respostas estão corretas. Verifiquem-nas por êste método:

$143 \times 5 = (140 + 3) \times 5 = 140 \times 5 + 3 \times 5 = 700 + 15 = 715$ ou então pelo método empregado no exercício nº 20:

$$143 \times 5 = \frac{143 \times 10}{2} = \frac{1430}{2} = 715.$$

Efetuem as multiplicações seguintes, empregando sòmente uma linha para achar a resposta:

$$\begin{array}{r}87\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}120\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}215\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}177\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}231\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}198\\ \times\ 4\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}63\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}97\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}313\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}165\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}217\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}256\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}122\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}151\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}145\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}109\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{r}132\\ \times\ 3\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}165\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}137\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}89\\ \times\ 6\\ \hline\end{array}$$

30. Como faremos pára multiplicar entre si dois números de duas cifras? Se um dos algarismos é 0, como em 10, 20, 30, ... 90, já sabemos como é preciso fazer. Com o número 25 e quaisquer outros ainda, nós o sabemos igualmente. Mas se tomarmos, por exemplo, 29×34, como podemos fazer? Podemos fazê-lo de vários modos:

1. Podemos multiplicar 30×34 e subtrair 34: $29 \times 34 = 1020 - 34 = 986$.
2. Podemos escrever: $29 = 2 \times 10 + 9$
   $(2 \times 10 + 9) \times 34 = 2 \times 10 \times 34 + 9 \times 34 = 680 + 9 \times (3 \times 10 \times 4) = 680 + 27 \times 10 + 9 \times 4 = 680 + 270 + 36 = 986$.
3. Podemos escrever $29 = 2 \times 10 + 9$ e
   $34 = 3 \times 10 + 4$
   de onde: $(2 \times 10 + 9) \times (3 \times 10 + 4) = 2 \times 3 \times 10 \times 10 + 2 \times 10 \times 4 + 3 \times 10 \times 9 + 9 \times 4 = 600 + 80 + 270 + 36 = 986$.

Podemos empregar êste último método, dispondo como nos exercícios nº 28 e 29:

29	34	o que pode se lêr assim:	
× 34	× 29	$9 \times 4 = 36$	ou $4 \times 9 = 36$
36	36		
270	270	$9 \times 30 = 270$	ou $30 \times 9 = 270$
80	80	$4 \times 20 = 80$	ou $20 \times 4 = 80$
600	600	$30 \times 20 = 600$	ou $20 \times 30 = 600$
986	986	e adicionando, achamos 986.	

Tôdas estas linhas são necessárias ou é ainda possível fazer algumas adições de cabeça, como no exercício Nº 29?

Dispomos assim:

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 34 \\ \hline 116 \\ 870 \\ \hline 986 \end{array}$$

e dizemos:

4 × 9 = 36, coloco 6 e retenho 3 dezenas, 4 × 20 = 80 ou 8 dezenas, mais 3 dezenas = 11 dezenas, e escrevo 11 à esquerda de 6, seja 116.
30 × 9 = 270, coloco 70 e retenho 2 centenas, 30 × 20 = 600 ou 6 centenas, mais 2 centenas, isto é igual a 8 centenas, e escrevo 8 à esquerda de 70, seja 870.

Calculem: $\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 26 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 29 \\ \times\ 13 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 43 \\ \times\ 14 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 55 \\ \times\ 16 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 37 \\ \times\ 15 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 32 \\ \times\ 32 \\ \hline \end{array}$

E mostrem que obtemos a mesma resposta se trocamos os dois números que multiplicamos.

31. Como podemos achar os resultados mentalmente? Se conhecemos os fatôres dos números, podemos introduzir simplificações. Assim:

1. 55 × 16 = 5 × 11 × 4 × 4 = 5 × 4 × 11 × 4 = 20 × 44 = 880, ou:
   55 × 2 × 8 = 110 × 8 = 880.
2. 37 × 15 = 37 × 10 + à metade dêste número, seja 370 + 185 = 555, ou
   37 × 3 × 5 = 111 × 5 = 555.

Para estas multiplicações rápidas é bom ter um grande número de produtos à nossa disposição, como justamente 3 × 37, que é fácil de reter e que nos dará imediatamente 6 × 37, 9 × 37, 12 × 37, 15 × 37 e alguns outros produtos. Procurem e dêem o resultado de todos êstes produtos.

32. Quais são todos os múltiplos de 11 até 1001? Conhecemos já todos aquêles em que o outro fatôr é um número de um só algarismo. Pois 11 = 10 + 1 para multiplicar por 11, podemos primeiro multiplicar por 10 e depois juntar o número que se multiplicou. Assim: 54 × 11 = 54 × 10 + 54 = 594. Dispondo como no nº 30, temos:

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times\ 11 \\ \hline 54 \\ 540 \\ \hline 594 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ \times\ 11 \\ \hline 63 \\ 630 \\ \hline 693 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 43 \\ \times\ 11 \\ \hline 43 \\ 430 \\ \hline 473. \end{array}$$

Isto nos leva a notar que nos dois números que juntamos para obter a resposta, as dezenas são os dois algarismos do número que multiplica por 11.

É isto sempre verdade?

Que acontece no curso da adição final, se temos os números seguintes:

$\begin{array}{r} 75 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 56 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 47 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 38 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 69 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$ $\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 11 \\ \hline \end{array}$

Repararam em alguma coisa de especial concernente aos três algarismos de tôdas as respostas?

Podem dizer se os números seguintes são múltiplos de 11?

913. 462, 374, 792, 459, 638, 627, 363, 352, 968?

Como reconheceriam os múltiplos de 22, 44, 55, 88 ?

É possível reconhecer os múltiplos de 33, 66, 99 ?

Digam como fariam para multiplicar mentalmente pelos múltiplos de 11 e dêem as respostas a:

32 × 33	12 × 66	14 × 55	17 × 44
8 × 99	45 × 22	13 × 77	15 × 33
23 × 22	29 × 33	16 × 66	12 × 77

33. - Escrevam os múltiplos de 3. Depois adicionem os algarismos de cada um dêstes múltiplos; se o resultado for superior a 9, adicionem ainda os algarismos obtidos, como nos exemplos seguintes:

3 x 111 = 333	3 + 3 + 3 = 9	
3 x 25 = 75	7 + 5 = 12	1 + 2 = 3
3 x 93 = 279	2 + 7 + 9 = 18	1 + 8 = 9
3 x 5 = 15	1 + 5 = 6	

Que notam?
Podem dizer como reconhecemos um múltiplo de 3?
Que poderiam dizer dos múltiplos de 6?

34. - Escrevam os múltiplos de 9
Depois adicionem os algarismos de cada um dêstes múltiplos.
Se o resultado for superior a 9, somem ainda os algarismos obtidos.
Que notam?
Escolham um número qualquer de que estejam certo não seja múltiplo de 9. Façam como anteriormente: adicionem ainda o número obtido se for maior que 9. Que notam? Podem dizer qual é a diferença entre os múltiplos de 9 e de todos os outros números, quando adiconamos seus algarismos como vimos fazendo? Podem dizer se os números seguintes são múltiplos de 9?

172	354	702	954	315	475	999	108	378
604	477	455	558	639	738	513	414	711
198	891	415	747					

Se forem digam por que número 9 é multiplo para produzir êste resultado.

35. - Sabemos que 81 é 9 x 9 ou 9 (9 ao quadrado). Formem todos os quadrados inferiores a 1000. Obtemos alguns produtos novos que são úteis e que é bom lembrar:

1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2
13^2	14^2	15^2	16^2	17^2	18^2	19^2	20^2	21^2	22^2	23^2	
24^2	25^2	26^2	27^2	28^2	29^2	30^2					

Êstes produtos podem ser obtidos de diversas maneiras, conforme são formados. Assim: 10^2 20^2 30^2 são muito faceis; todos os números pares a quadrado são múltiplos de 4. Por que?
Para cada um dêles podemos formar um "quarteto" que contenha barras vermelhas. Como? Isto explica por que todo quadrado de um número par é um múltiplo de 4?
Somem os múltiplos de 5. Formem os "quartetos que representam os quadrados dos números. Podem afirmar que êstes quadrados são múltiplos de 25?
Se os números são múltiplos de 4 ou 8, podem afirmar que seus quadrados são múltiplos de 16 ou de 64 ? Expliquem por que.
Que podem dizer dos quadrados dos números que são múltiplos de 7, 9, 11?
Na tábua dos quadrados, há números que são produtos de números menores dos quais vocês já conhecem os quadrados. Vejam se é possivel achar o quadrado dêstes números, tomando em conta êstes conhecimentos. Eis um exemplo:

$28 = 4 \times 7$ $\quad 28^2 = 4^2 \times 7^2 = 16 \times 49$

Esta multiplicação pode ser feita mentalmente, multiplicando antes 16 por 50, depois tirando 16 do resultado; seja $28^2 = 800 - 16 = 784$.

Recomecem o quadro dos quadrados e coloquem aí:
1. Os quadrados já conhecidos;
2. os que podemos encontrar facilmente;
3. os que podemos obter, como ficou dito antes, com o auxílio de seus fatôres e dos quadrados de seus fatôres.

36. Para completar o quadro, vamos agora considerar os quadrados de outros números, tais como 29 e 31, que são primos. Para achar seus quadrados, devemos multiplicá-los por êles mesmos. Em certos casos é possível utilizar um recurso especial, mais simples, assim, nos dois exemplos:

$29 = 30 - 1$ $\qquad 31 = 30 + 1$

$29^2 = (30-1)^2$ $\qquad 31^2 = (30+1)^2$

Sabemos que os quadrados de 30 e de 1, são 900 e 1; podemos utilizá-los para encontrar os quadrados que procuramos? Formemos um quadrado das barras azuis e tentemos recobri-las com o auxílio de dois quadrados, um feito de barras carmins e outro de amarelas. Que constatam? Quais são as duas figuras que encontram ao lado dos dois quadrados?

Podem cobrir um com o auxílio de barras carmins e outro com amarelas? Quantas barras de cada côr são necessárias? Que podem concluir da superfície destas duas figuras?

$$9^2 = 4^2 + 5^2 + ?$$

$$\text{mas } 9 = 4 + 5, \text{ de onde } (4+5)^2 = 4^2 + 5^2 + ?$$

Experimentem de nôvo, com um quadrado feito de pretas cobertas por um quadrado carmin e um verde-claro. Escrevam os resultados como acima. Tentem ainda com um quadrado de barras laranja e utilizando as barras carmin e verde-escuro. Escrevam os resultados como acima. Tentem desta vez com um quadrado cujo lado seja laranja e verde-claro, ponta a ponta, e utilizando um quadrado verde-escuro e um prêto. Escrevam os resultados como acima.

Vejam que para recobrir exatamente um quadrado por dois outros quadrados cuja soma dos lados é igual ao lado do primeiro quadrado, é preciso juntar dois retângulos iguais, dos quais, conhecemos imediatamente os dois lados.

Podem estabelecer por escrito isto, tomando qualquer quadrado como ponto de partida? Façam a aplicação em $31 = 30 + 1$ e

$$27 = 25 + 2.$$

Retomemos nossas barras e formemos em primeiro lugar um quadrado carmin, depois, sôbre dois de seus lados, façamos um retângulo formado de cinco barras azueis, de modo que as duas partes que ultrapassam se recubram. Como vemos que os dois retângulos se recobrem pela superfície de um quadrado amarelo, podemos escrever:

$$9^2 = 2 \times 9 \times 5 + 4^2 - 5^2, \text{ que pode ainda se escrever:}$$

$$9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5 - 4^2. \text{ Mas como } 4 = 9 - 5, \text{ temos:}$$

$$(9-5)^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5.$$

Façam a mesma coisa começando por um quadrado amarelo e utilizando barras brancas. Que podem escrever? Tomem um quadrado verde-claro, esta vez, e as barras marron em lugar das azuis. Que podem escrever? Comecem com um quadrado verde-escuro e tomem as barras laranja para formar os retângulos que se recobrem, procedendo sempre como fizeram. Escrevam o que acharam.

Podem escrever, se tomarem não importa qual, o quadrado, para começar, e não importa quais barras para efetuar a operação?

Façam a aplicação em $29 = 30 - 1$

$$24 = 25 - 1$$

$$23 = 25 - 2$$

Vejam se obtêm os mesmos resultados para os quadrados seguintes:

$$22^2 = (20+2)^2 = (25-3)^2 = (21+1)^2 = (23-1)^2$$

$$26^2 = (25+1)^2 = (28-2)^2 = (20+6)^2 = (30-4)^2$$

37. Retornemos aos quadrados que fizemos com as barras. O quadrado azul é formado de um carmin e de qualquer coisa mais. Esta diferença pode ser realizada pondo ponta a ponta o retângulo de barras carmins e um retângulo composto de cinco azues. É exato?

De onde: $9^2 - 4^2 = 9 \times 5 \times 4 \times 5$ ou $(9+4) \times 5$.

Façam o mesmo com um quadrado preto e um quadrado verde-claro, e encontrem o retângulo igual à sua diferença. Façam ainda com um quadrado laranja e um quadrado carmin, ou um laranja e um preto, ou um marron e um amarelo.

Encontrarão então:

$$7^2 - 3^2 =$$

$$10^2 - 4^2 =$$

$$10^2 - 6^2 =$$

$$9^2 - 7^2 =$$

$$8^2 - 5^2 =$$

Existe uma relação muito simples entre os dois lados de todos êstes retângulos e os lados dos quadrados. Vêem-na? Podem aplicar esta descoberta em:

$13^2 - 8^2 =$
$12^2 - 9^2 =$
$5^2 - 4^2 =$

e verificar com as barras como foi feito antes?

38. Às vêzes os produtos podem-se colocar sob a forma de quadrados de números. Por exemplo:

$$13^2 - 12^2 = 25 \times 1 = 5^2$$

Podem encontrar alguns outros? Quando tiverem alguns exemplos, experimentem o que segue: Construam os três quadrados com as barras que convenham e experimentem formar um triângulo, no qual os lados sejam os lados dos quadrados. Quais são os triângulos obtidos? Façam com todos os exemplos que escolheram.

39. Coloquem uma barra branca sob seus olhos; sua face superior é um quadrado. Podem formar um quadrado com 4 barras brancas? Quantas vermelhas são necessárias para recobrí-las?

Podem fazer um quadrado com 9 barras brancas? Quantas verde-claro para recobrir? Se fizerem um quadrado com 4 carmins, quantas brancas são precisas?

Agora formemos uma série de quadrados, começando pela barra laranja e utilizando cada uma das outras vez por vez. Colocando-as umas sôbre as outras, obtemos uma pirâmide. Façam escorregar todos os quadrados de tal modo que, se olhando de cima, não vejamos senão a beira de cada quadrado no comprimento de dois lados sòmente.

Calculem o número de barras necessárias para resolver, digo, recobrir o bordo:

1. do segundo quadrado (a parte vermelha)
2. do terceiro quadrado (a parte verde-claro) etc...etc...e do
9. décimo quadrado (a parte laranja).

Se incluimos o quadrado branco no vértice, podemos escrever:

$1 + 3 = 4^2$
$1 + 3 + 5 = 3^2$
$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Dêem outras linhas que correspondam aos cálculos que fizeram, e achem a resposta para: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 13$
$1 + 3 + 5 + 5 + 7 + \ldots\ldots + 21$

40. Comecemos agora com uma barra vermelha. Sua face sùperior é um retângulo 2×1. Se colocarmos contra dois de seus lados uma barra verde-claro e uma branca, formamos um outro retângulo 3×1. Ao longo de dois lados dêste retângulo podemos colocar uma barra carmin e uma vermelha e obteremos um retângulo 4×3. Se continuarmos, poderemos obter retângulos cada vez maiores, cada um dêles estando composto da procedente a de uma barra colocada ao lado de dois de seus lados.

Construamos uma pirâmide recobrindo sucessivamente cada retângulo por um retângulo igual, começando por aquêle que é anterior ao maior.

Visto de cima, os lados visíveis de cada retângulo serão de duas côres: as duas barras consecutivas.

Quantas barras brancas são necessárias para cobrir cada retângulo, começando pela vermelha e indo de alto a baixo? Se adicionamos êstes números ao passo que recobrimos um retângulo maior, encontramos:

2	brancas	que	são	iguais	a 2×1
$2 + 4$	"	"	"	"	a 3×2
$2 + 4 + 6$	"	"	"	"	a 4×3
$2 + 4 + 6 + 8$	"	"	"	"	a 5×4

Podem escrever os seguintes e encontrar os resultados como vimos fazendo? Façam a aplicação em:

$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 24$
$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + 50$

41. No exercício nº 30 encontramos a soma dos primeiros números ímpares; agora encontramos a soma dos primeiros números pares. Podem achar rapidamente a soma dos primeiros números inteiros?

1 + 2
1 + 2 + 3
1 + 2 + 3 + 4
1 + 2 + 3 + 4 + 5

etc... ,digamos até vinte números.

SEGUNDA PARTE

OS PROCESSOS DE CÁLCULO.

1. Quando adicionamos dois ou mais números, podemos notar que fazemos assim:

75 + 46 + 109 = 230

ou assim:

```
   75
+  46
+ 109
  230.
```

" Nesta segunda notação, deve-se tomar cuidado que as unidades venham sob as unidades, as dezenas sob as dezenas, e as centenas sob as centenas.

2. Compara estas duas notações e vejam com qual você adiciona o mais depressa e o mais   . Fazem   com um e com outro?

3. Efetua as adições seguintes e conte quanto tempo leva:

123	42	79	225	474
+ 217	+ 159	+ 346	+ 68	+ 313
+ 93	+ 85	+ 57	+ 141	+ 24
+ 74	+ 248	+ 133	+ 219	+ 48
+ 438	+ 177	+ 409	+ 334	+ 56
66	321	123	154	198
+ 139	+ 136	+ 230	+ 65	+ 264
+ 305	+ 274	+ 132	+ 276	+ 75
+ 118	+ 147	+ 213	+ 87	+ 388
+ 78	+ 25	+ 301	+ 398	+ 56

4. Efetua as adições seguintes e contrôle o tempo:

65 + 276 + 87 + 154 + 398 =
474 + 313 + 29 + 38 + 56 =
198 + 75 + 388 + 56 + 264 =
68 + 141 + 219 + 255 + 334 =
346 + 79 + 57 + 409 + 133 =
230 + 301 + 213 + 132 + 123 =
85 + 248 + 42 + 177 + 159 =
136 + 321 + 25 + 274 + 147 =
217 + 123 + 93 + 74 + 438 =
78 + 66 + 139 + 305 + 118 =

Arquivado em 5/11/1982
C.P.L.M.

5. Efetua as adições seguintes e controle o tempo:

37	72	21	64	49
74	45	78	74	63
92	29	93	85	58
55	56	65	96	67
69	96	79	66	93
34	33	44	23	25
18	81	28	35	43
45	15	51	47	37
53	37	72	59	95
+ 87	+ 85	+ 83	+ 91	+ 19