



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul

*Arquivado em 3/10/81
M. Martins
CALM*

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

2 x 2 x 2 =

5 x 2 x 2 =

8 x 2 x 2 =

2 x 3 x 2 =

6 x 3 x 2 =

8 x 3 x 2 =

2 x 4 x 2 =

8 x 4 x 2 =

2 x 5 x 2 =

8 x 5 x 2 =

5 x 5 x 2 =

5 x 4 x 2 =

L'ARITHMÉTIQUE AVEC LES NOMBRES EN COULEURS

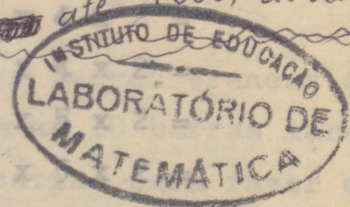
Caleb Gattegno

IV

Les nombres jusqu'à 1000

(nº de 1 até 1.000, 2º outm)

Proprietés et Operations



1. Multiplicações

2. Divisão

3. Potenciações

4. Frações (nº Racionais)

5. Numerações (unidade, dezena, centena, milhar, compõe e decomposição)

6. Divisor - múltiplo

TRADUTORAS

Esther Galanternick

Eva Tomasoni Monteiro de Barros

Maria Helena Azevedo Ferreira

Vera Neuza Lopes

Alunas do D.E.E. - C.F.T.S.E.

Outubro, 1962

Primeira parte:

OS NÚMEROS ATÉ 1000

1. Escolham uma barra, depois, coloquem sobre ela uma outra, de modo que formem uma cruz.

Qual é o resultado desta multiplicação? (Multiplicação)

Se escolhermos dois números pares e se dobrarem o comprimento de uma das barras, que é preciso fazer com a outra para que o resultado fique o mesmo?

4. Tomem, p. ex., uma barra laranja e uma marron. Se dobrarem a laranja, que barra porão em cruz para formar 80? Se dobrarem ainda, qual é a nova barra que porão em cruz? Podem continuar dobrando? Dobrem agora a marron: que barra será necessário colocar em lugar da laranja?

Formem, tantos quantos puderem achar, produtos que, como no exemplo anterior, fiquem iguais quando se dobra um dos fatores.

2. Em lugar de colocar 2 barras em cruz, pode-se também superpor 3 que se cruzem uma a outra?

Formem um número com auxílio deste "trio" de barras. Se as 3 barras forem vermelhas, que resultado obtém vocês, multiplicando todas juntas?

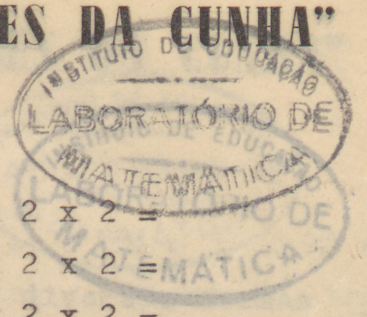
Formemos o "trio" do qual a barra superior é uma vermelha. Sabemos que isto significa que dobramos um produto já conhecido. Achem as respostas nos casos seguintes:



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul

-2-



- | | | | | |
|-------------|------------------|-------------|------------|--------------|
| 2 x 2 x 2 = | 7 x 100 ou 700 | 3 x 2 x 2 = | setecentos | 4 x 2 x 2 = |
| 5 x 2 x 2 = | 8 x 100 ou 800 | 6 x 2 x 2 = | oitocentos | 8 x 2 x 2 = |
| 8 x 2 x 2 = | 9 x 100 ou 900 | 9 x 2 x 2 = | novecentos | 10 x 2 x 2 = |
| 2 x 3 x 2 = | 10 x 100 ou 1000 | 3 x 3 x 2 = | mil. | 4 x 3 x 2 = |
| 5 x 3 x 2 = | | 6 x 3 x 2 = | | 7 x 3 x 2 = |
| 8 x 3 x 2 = | | 9 x 3 x 2 = | | 10 x 3 x 2 = |
| 2 x 4 x 2 = | | 3 x 4 x 2 = | | 4 x 4 x 2 = |
| 8 x 4 x 2 = | | 6 x 4 x 2 = | | 7 x 4 x 2 = |
| 2 x 5 x 2 = | | 9 x 4 x 2 = | | 10 x 4 x 2 = |
| 8 x 5 x 2 = | | 3 x 5 x 2 = | | 4 x 5 x 2 = |
| 5 x 5 x 2 = | | 6 x 5 x 2 = | | 7 x 5 x 2 = |
| 5 x 4 x 2 = | | 9 x 5 x 2 = | | 10 x 5 x 2 = |

Procurem as que dão as mesmas respostas. 2 barras laranjas colocadas em cruz dão o produto 100. Pode-se também formá-lo com o trio de barras 10, 5, 2 que é o dobro de 50. Este trio pode ser representado de diferentes modos: amarelo, laranja e vermelho, seja 5, 10, 2; laranja, vermelho e amarelo, seja 10, 2, 5; vermelho, laranja e amarelo, seja, 2, 10, 5. Achamos sempre 100, por exemplo?

Verifiquem o que está escrito:

$$100 = 10 \times 10 = 10 \times 5 \times 2 = 5 \times 10 \times 2 = 10 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 10 = 2 \times 10 \times 2 = 5 \times 2 \times 10$$

Se do trio retirarmos a barra superior, isto significa que dividimos o produto formado pelo trio, pelo valor desta barra. Assim:

100 : 2 = 10 x 5 = 50	600 : 100 =	100 : 5 = 10 x 2 = 20
100 : 2 = 5 x 10 = 50	300 : 3 =	100 : 5 = 2 x 10 = 20
100 : 10 = 2 x 5 = 10		100 : 10 = 5 x 2 = 10

4. Façam a mesma coisa com as barras azul, amarela e vermelha, seja 9, 5, 2 e escrevam tôdas as respostas.

Com 8 x 5 x 2, 7 x 4 x 2 e 6 x 3 x 2.

5. Façam uma cruz com 2 barras laranjas.

Se agora se formarem todos os trios possíveis, obtem-se, conforme a barra colocada seja em cima:

- | | | | |
|--------------|----------------|-----------|-----------------------|
| vermelha | 2 x 100 ou 200 | que lemos | <u>duzentos</u> . |
| verde-claro | 3 x 100 ou 300 | " " | <u>trezentos</u> . |
| carmin | 4 x 100 ou 400 | " " | <u>quatrocentos</u> . |
| amarelo | 5 x 100 ou 500 | " " | <u>quinhentos</u> . |
| verde-escuro | 6 x 100 ou 600 | " " | <u>seiscentos</u> . |

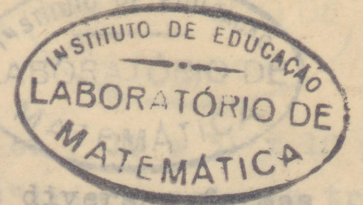
Para saber como chamamos 12 dez, é suficiente saber que: 12 x 10 = 120 = 10 x (10 + 2) = 10 dez + 10 dois = 100 + 20 = cento e vinte, que



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul

-3-



preta	7 x 100 ou 700	que lemos	<u>setecentes.</u>
marron	8 x 100 ou 800	" "	<u>oitocentos.</u>
azul	9 x 100 ou 900	" "	<u>novecentos.</u>
laranja	10 x 100 ou 1000	" "	<u>mil.</u>

Quantas barras brancas são necessárias, colocadas ponta a ponta, para fazer o comprimento representado pelos "trios" seguintes:

laranja,	laranja,	vermelha
laranja,	laranja,	amarela
laranja,	laranja,	preta
laranja,	laranja,	laranja.

Ferrem um quadrado com 10 barras laranjas. Quantas barras brancas são necessárias para fazer um quadrado igual? Se colocarem as 10 barras laranjas ponta á ponta, quantas barras brancas serão necessárias para fazer o mesmo comprimento?

Podem dizer quantas barras laranjas são necessárias para fazer o comprimento mil? E quantos grupos de 10 barras laranjas? Podem fazer um cubo, utilizando sômente barras laranjas? Que comprimento farão tôdas estas barras laranja, ponta à ponta? Se quiserem utilizar os cubos brancos, quantos são necessários para fazer o mesmo comprimento?

6. Se dividimos o nº 1000 por 10, o que obtemos?

Se dividimos o nº 1000 por 100, o que obtemos?

Completem o quadro seguinte:

7 x 10 x 10 =	7 x 100 =	10 x 8 x 10 =
10 x 8 =	700 : 7 =	800 : 80 =
800 : 100 =	800 : 8 =	500 : 100 =
900 : 90 =	600 : 60 =	600 : 6 =
600 : 10 =	600 : 100 =	400 : 40 =
300 : 30 =	300 : 3 =	300 : 100 =

7. Achem:

5 x 16 =	2 x 35 =	4 x 8 =
4 x 14 =	2 x 32 =	4 x 16 =
2 x 25 =	3 x 20 =	5 x 14 =
4 x 18 =	2 x 15 =	27 x 2 =

Se não sabem fazê-lo, usem as barras.

Achem:

60 x 10 =	10 x 70 =	10 x 90 =
80 x 10 =	8 x 100 =	6 x 10 x 10 =
30 x 10 =	10 x 50 =	7 x 10 x 10 =

8. Tomem o dôbro de 60, de 70, de 80, de 90.

Façam os "trios" que correspondem a êstes produtos.

Escrevam-nos de todos os modos possíveis.

Para saber como chamamos 12 dez, é suficiente saber que: 12 x 10 =

10 x 12 = 10 x (10 + 2) = 10 dez + 10 dois = 100 + 20 = cento e vinte, que



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul



se escreve 120.

Façam a mesma coisa com 14 dez, 16 dez, 18 dez. As diversas formas tro com as quais podemos escrever êsses números, vão nos permitir ver imediata mente quais são os números seguintes:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 120 : 10 ou $\frac{1}{10}$ de 120 = | 120 : 12 ou $\frac{1}{12}$ de 120 = |
| 120 : 2 ou $\frac{1}{2}$ de 120 = | 120 : 60 ou $\frac{1}{60}$ de 120 = |
| 120 : 6 ou $\frac{1}{6}$ de 120 = | 120 : 3 ou $\frac{1}{3}$ de 120 = |
| 120 : 4 ou $\frac{1}{4}$ de 120 = | 120 : 20 ou $\frac{1}{20}$ de 120 = |
| 120 : 5 ou $\frac{1}{5}$ de 120 = | 120 : 2 ou $\frac{1}{2}$ de 120 = |
| 140 : 10 ou $\frac{1}{10}$ de 140 = | 140 : 14 ou $\frac{1}{14}$ de 140 = |
| 140 : 2 ou $\frac{1}{2}$ de 140 = | 140 : 10 ou $\frac{1}{10}$ de 140 = |
| 140 : 7 ou $\frac{1}{7}$ de 140 = | 140 : 5 ou $\frac{1}{5}$ de 140 = |
| 160 : 10 ou $\frac{1}{10}$ de 160 = | 160 : 20 ou $\frac{1}{20}$ de 160 = |
| 160 : 2 ou $\frac{1}{2}$ de 160 = | 160 : 16 ou $\frac{1}{16}$ de 160 = |
| 160 : 8 ou $\frac{1}{8}$ de 160 = | 160 : 80 ou $\frac{1}{80}$ de 160 = |
| 160 : 5 ou $\frac{1}{5}$ de 160 = | 160 : 4 ou $\frac{1}{4}$ de 160 = |
| 160 : 20 ou $\frac{1}{20}$ de 160 = | 160 : 32 ou $\frac{1}{32}$ de 160 = |
| 180 : 10 ou $\frac{1}{10}$ de 180 = | 180 : 18 ou $\frac{1}{18}$ de 180 = |
| 180 : 2 ou $\frac{1}{2}$ de 180 = | 180 : 90 ou $\frac{1}{90}$ de 180 = |
| 180 : 9 ou $\frac{1}{9}$ de 180 = | 180 : 8 ou $\frac{1}{8}$ de 180 = |
| 180 : 4 ou $\frac{1}{4}$ de 180 = | 180 : 45 ou $\frac{1}{45}$ de 180 = |
| 180 : 6 ou $\frac{1}{6}$ de 180 = | 180 : 60 ou $\frac{1}{60}$ de 180 = |
| 180 : 20 ou $\frac{1}{20}$ de 180 = | 180 : 30 ou $\frac{1}{30}$ de 180 = |

9. Quanto é: ou $\frac{1}{7}$ de 210 = 210 : 30 ou $\frac{1}{30}$ de 210 =
- | | | | |
|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $\frac{1}{10}$ de 120? | $\frac{1}{16}$ de 160? | $\frac{5}{18}$ de 180? | $\frac{1}{9}$ de 180? |
| $\frac{6}{14}$ de 140, | $\frac{3}{14}$ de 140? | $\frac{3}{20}$ de 120? | $\frac{7}{12}$ de 120? |

10. Se retirarmos o 0 em cada um dos novos números que acabamos de escrever, o resultado é o mesmo que se tivéssemos dividido por 10. Se multiplicarmos um número por 10, que mudança isto produzirá na escrita do mesmo número? Vejam se é exato para todos os números que conhecem que terminam por

- zero: Quais
- | | |
|-------------|------------|
| 160 : 10 = | 16 x 10 = |
| 180 : 10 = | 7 x 10 = |
| 50 : 10 = | 5 x 10 = |
| 1000 : 10 = | 100 x 10 = |

Que é 170? 130, Podem dar-lhe um nome? Utilizando barras, podem formar êsses números com o auxílio de um "trio"?



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

-5-

Conte Eis aqui um modo de fazer um dêles: 130. É 13 dez ou $(10 + 3) \times 10$ ou $100 + 30$ ou cento trinta. Para colocá-lo em forma de "trio", podemos trocar 10 por 2×5 e temos: $13 \times 5 \times 2$ ou (laranja e verde-claro), amarelo, vermelho.

$$130 = 5 \times 13 \times 2 = 5 \times 2 \times 13 = 2 \times 5 \times 13 = 2 \times 13 \times 5 = 13 \times 5 \times 2 =$$

Completam:

$$130 : 5 \text{ ou } \frac{1}{5} \text{ de } 130 = 26 \quad 130 : 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ de } 130 = 13$$

$$130 : 13 \text{ ou } \frac{1}{13} \text{ de } 130 = 10 \quad 130 : 2 \text{ ou } \frac{1}{2} \text{ de } 130 = 65$$

$$130 : 26 \text{ ou } \frac{1}{26} \text{ de } 130 = 5 \quad 130 : 65 \text{ ou } \frac{1}{65} \text{ de } 130 = 2$$

Façam a mesma coisa com 110, 150, 170, 190.

11. Escrevam os produtos por 10 dos números compreendidos entre:

21	e	30
31	e	40
41	e	50
51	e	60
61	e	70
71	e	80
81	e	90
91	e	100.

Com 2 teremos:

2	$2 \times 2 = 4$	2	$2 \times 71 = 142$	2	$2 \times 81 = 162$	2	$2 \times 91 = 182$
	$2 \times 8 = 16$		$2 \times 86 = 172$		$2 \times 96 = 192$		$2 \times 106 = 212$

Dêem-lhes um nome como fizeram anteriormente, e assegurem-se de que esteja exato. Interroguem seus vizinhos antes de perguntar à sua professora. Ponham alguns sob forma de "trio" e completem:

$$210 : 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ de } 210 = 21 \quad 210 : 21 \text{ ou } \frac{1}{21} \text{ de } 210 = 10$$

$$210 : 70 \text{ ou } \frac{1}{70} \text{ de } 210 = 3 \quad 210 : 3 \text{ ou } \frac{1}{3} \text{ de } 210 = 70$$

$$210 : 7 \text{ ou } \frac{1}{7} \text{ de } 210 = 30 \quad 210 : 30 \text{ ou } \frac{1}{30} \text{ de } 210 = 7$$

Podem fazer um quadro como aquêles do exercício 8, para alguns dos números que escreveram?

12. Sabemos agora escrever e ler todos os números compreendidos entre 100 e 1000, que terminam por um 0. Podemos colocá-los sob forma de "trio", contendo uma barra laranja, com exceção de alguns casos. Quais são os casos onde não é possível? Expliquem porque?

Quais são os fatores de: 630, 710, 530, 210, 190, 230, 990, 750, 840, 180, 270, 360, 960, 720, 420, 410?

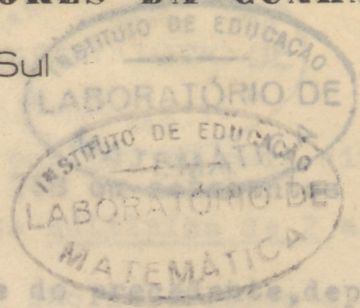
13. Ponham os números seguintes por ordem crescente: 730, 470, 920, 890, 770, 900, 650, 310, 190, 570, 690, 700.

E os seguintes por ordem decrescente: 150, 710, 980, 20, 410, 690, 830, 900, 540, 180, 210, 390, 760.



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul



Contem por cem a partir de 100;

" " dez a " de 10;

" " vinte a " de 10;

" " vinte a " de 20;

" " conqüenta a partir de 50;

15. " " " a " de 10, depois de 20, depois de 30, depois de 40;

" " sessenta a " de 60, " de 50, " de 40, " de 10;

Escrevem todos os múltiplos (inferiores a 1000) de:

20 30 40

50 60 80

Escrevem e para as dezenas, e para as unidades:

723 Que notaram?

14. Se, partindo de um número qualquer, dobramos, depois dobramos o resultado e continuamos a sobrar assim, diremos que "se parte....dobrando sempre". Com 2 teremos:

$$2 \quad 2 \times 2 = 4 \quad 2 \times 4 = 8$$

$$16. \quad 2 \times 8 = 16 \quad 2 \times 16 = 32 \quad 2 \times 32 = 64$$

$$\text{mínimo} \quad 2 \times 64 = 2(60 + 4) = 2 \times 60 + 2 \times 4 = 120 + 8$$

Este último número se chama cento e vinte e oito e se escreve 128.

$2 \times 128 = 2(120 + 8) = 2 \times 120 + 2 \times 8 = 240 + 16$ ou $240 + 10 + 6$ que se escreve 256 e se lê duzentos e cinquenta e seis.

$2 \times 256 = 2(250 + 6) = 2 \times 250 + 2 \times 6 = 500 + 12$ ou quinhentos e doze que se escreve 512.

$2 \times 512 = 2(500 + 12) = 2 \times 500 + 2 \times 12 = 1000 + 24$ que lemos mil e vinte e quatro e se escreve 1024.

Partam de 10 e dobrem sempre. Que notaram?

Partam de 3 e dobrem sempre:

$$3 \quad 2 \times 3 = \quad 2 \times (2 \times 3) = \quad 2 \times 2 \times (2 \times 3) =$$

$$17. \quad 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 3) = \quad 2 \times (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3) =$$

Para dobrar 96, podemos fazer de dois modos:

$$1 \quad 2 \times 96 = 2 \times (90 + 6) = 2 \times 90 + 2 \times 6 = 180 + 12 = 180 + 10 + 2 = 192, \text{ ou } \underline{\text{cento e noventa e dois}}$$

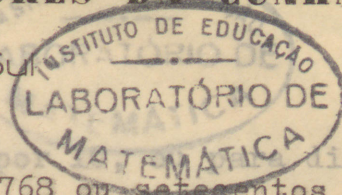
2. $2 \times 100 = 200$; ora, 96 é 4 menos que 100; duas vezes 4 são 8, tiramos 8 de 200 e obtemos 192.

$$2 \times 192 = 2(190 + 2) = 2 \times 190 + 2 \times 2 = 380 + 4 = 384 \text{ ou } \underline{\text{trezentos e oitenta e quatro.}}$$



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul



19. Sabemos que $2 \times 384 = 2(380 + 4) = 2 \times 380 + 2 \times 4 = 760 + 8 = 768$ ou setecentos e sessenta e oito.

Repitam estas séries onde cada número é o dôbre do precedente, depois voltem atrás, dividindo por 2 cada n^o, um depois do outro, até encontrarem o 1^o número da série.

15. Quando um número tem 3 algarismos como 768 ou 384, o da esquerda é o das centenas, o do meio é o das dezenas e o da direita é o das unidades. 700 tem 7 centenas, não tem dezenas e não tem unidades.

casos: 720 4 7 " " 2 dezenas e não tem unidades.

723 " 7 " " e 3 unidades.

Escrevemos c para as centenas, d para as dezenas e u para as unidades:

723 = 7(c) 2(d) 3(u) ou $7 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1$.

Escrevam do mesmo modo:

475	1985	831
649	505	368
999	706	216
5x180=	160x5 =	168x5 =

16. Entre 90 e 100, há os números: 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. Que números há entre:

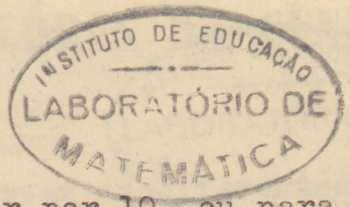
200	e	210
320	e	330
370	e	380
430	e	440
560	e	570
610	e	620
780	e	790
890	e	900
940	e	950

Escreve em algarismos os números seguintes: setecentos e trinta e três, seiscientos e trinta e sete, novecentos e onze, quinhentos e oito, trezentos e vinte e um, quatrocentos e um.

Leiam os números seguintes: 601, 756, 987, 814, 513, 247, 303, 388, 111.

17. Partam de 5 e dobrem sempre. Que notaram? Partam de 4 e dobrem sempre. Partam de 8, de 16? que notaram? Partam de 6 e dobrem sempre. Que notaram? Quais são os números que dão a mesma seqüência?

18. Partam de 7 e dobrem sempre. Voltem atrás logo que atingirem quase 1000. Idem 15. Em vez de dobrar, multipliquem cada vez por 4. Que notam? Que devem fazer para obter os mesmos números, voltando atrás? Em lugar de multiplicar por 4, multipliquem por 8. Que notam? Se quiserem achar os mesmos números, voltando, que devem fazer?



-8-

19. Sabemos o que é preciso fazer para multiplicar por 10, ou para dividir por 10, um nº que termina por um 0.

Quais são os algarismos das unidades dos números múltiplos de 2 a que chamamos números pares?

Podem achar todos os números múltiplos de 5 que são inferiores a 1000? Por qual algarismo terminam eles? São todos pares? Quais são eles? Quais os que não são?

20. A cruz marron, amarela e a cruz carmin e laranja, são equivalentes. Quais são os múltiplos de 5 que são também múltiplos de 10, Qual é relação entre o nº que multiplica 5 e o que multiplica 10, quando se coloca cada 1 destes números sob sob estas 2 formas?

Pois que é tão fácil multiplicar por 10, sabem o que podem fazer para multiplicar um nº por 5? Se não sabem, utilizem as barras para os seguintes casos: 16 x 5 18 x 5 5 x 22 5 x 14 5 x 12

Quando tiverem visto o uso que podemos fazer da multiplicação por 10, para poupar tempo e esforço, procurem o que podemos fazer nos casos 5x17 ou 5x13. Já que não é cómodo tomar a metade de 17 ou de 13, multiplicaremos por 10 primeiro e depois dividiremos o resultado por 2:

5x17 = 1/2 de (10x17) ou 1/2 de 170 = 85, pois 1/2 de 100 = 50 ou 1/2 de 70 = 35.

5x13 = 1/2 de (10x13) ou 1/2 de 130 = 65, pois 1/2 de 100 = 50 e 1/2 de 30 = 15. Achem as respostas: 5x 24= 5x25= 5x42=

28x 5 = 5x64= 24x5 =
5x180= 160x5 = 168x5 =
35x5 = 19x5 = 15x5 =

Quando fôr possível, verificarão com os trios que efetuaram.

21. Contem de 5 em 5. Escrevam os números obtidos.

quanto fazem: 12 x 5? 20 x 5? 21 x 5? 30 x 5? 50 x 5?
11 x 5? 22 x 5? 33 x 5? 44 x 5? 55 x 5?

A cruz que representa estas multiplicações se compõe de 1 barra amarela colocada atravessada no comprimento formado por barras laranja com outra na ponta. Podemos então obter a resposta, multiplicando por 5 o nº de barras laranja ponta a ponta e juntando o produto por 5 de outra barra.

33x5=(3x10+3)x5 = 15x10+15=15x10+10+5=16x10+5=160+5=165

Podemos encurtar desta maneira: 33x5=30x5+3x5=150+15=165 ou 33

Servimo-nos aqui de uma disposição na qual as unidades são colocadas numa coluna, as dezenas, as dezenas noutras e as centenas noutra acima.

 33
 x5
 15
 150
 165

Disponham assim as seguintes multiplicações:

43 x 5 78 x 5 56 x 5 39 x 5

Comparem com o outro método e vejam qual o que leva menos tempo e menos esforço.

22. Para multiplicar por 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, podem utilizar os trios, pois 20 = 2 x 10, 30 = 3 x 10, 40 = 4 x 10, etc.

Podem achar as respostas seguintes e escrevê-las:

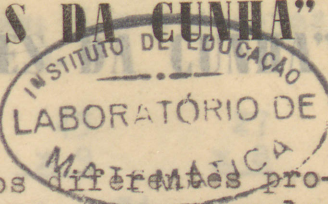
20 x 17 = 19 x 20 = 31 x 20 =
21 x 30 = 42 x 30 = 30 x 30 =
12 x 40 = 40 x 22 = 25 x 40 =
50 x 18 = 20 x 50 = 13 x 50 =
8 x 60 = 13 x 60 = 60 x 11 =
70 x 6 = 12 x 70 = 70 x 90 =
80 x 12 = 11 x 80 = 9 x 80 =

23. Façam um quarteto, como por exemplo, uma barra marron, uma laranja, uma vermelha, uma verde-escuro, cruzadas umas sôbre as outras. Troquem a ordem



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul



-9-

das barras e vejam o que resultou do produto. Escrevam os diferentes produtos obtidos com um "quarteto" que contém um barra laranja. Por exemplo o "quarteto" acima pode-se traduzir de tôdas as formas seguintes: $8 \times 10 \times 2 \times 6 = 80 \times 12 = 10 \times 8 \times 2 \times 6 = 10 \times 2 \times 8 \times 6 = 20 \times 48 = 10 \times 6 \times 2 \times 8 = 60 \times 16 = 960$ e mais outras ainda $960 = 2 \times 480 = 6 \times 160 = 8 \times 120 = 10 \times 96 = 12 \times 80 = 16 \times 60 = 20 \times 48$. Cada um destes produtos, podendo se ler de 2 maneiras, por ex.: 16×60 ou 60×16 . Quando dormarem um "quarteto"... se retirarem 1, 2 ou 3 barras, podem ver quais são as que restam e multiplicá-las junto. Isto dará o resultado da divisão pelo valor da ou das barras retiradas. Acharão assim:

$960 : 2 =$	$960 : 6 =$	$27 \times 960 : 8 =$
$960 : 10 =$	$960 : 12 =$	$960 : 16 =$
$960 \times 20 =$	$960 : 48 =$	$960 : 60 =$
$960 \times 80 =$	$960 : 96 =$	$960 : 120 =$
$960 \times 160 =$	$960 : 480 =$	

Isto se pode ler sob a forma de fração. Quanto é?

$1/2$ de 960 ? $1/6$ de 960 ? $1/8$ de 960 ? etc...

Podemos ler facilmente as frações seguintes:

$1/16$ de 960 =	$3/16$ de 960 =	$5/16$ de 960 =
$1/12$ de 960 =	$5/12$ de 960 =	$7/12$ de 960 =
$1/48$ de 960 =	$21/48$ de 960 =	$33/48$ de 960 =

Formem os "quarteto" que seguem, façam os produtos e divisões e depois escrebam algumas frações: laranja, amarelo, carmin, vermelha.

Façam "trios" sem utilizarem as barras laranjas. Podem efetuar o produto? Façam um quadro dos que má conhecem. Podem trocar um "trio", contendo uma barra carmin, por um "quarteto" que contenha 2 vermelhas? O produto é mais fácil de efetuar assim?

$6 \times 7 \times 4 = 6 \times 7 \times 2 \times 2 = 42 \times 2 \times 2 = 84 \times 2 = 168$

Primeiramente, transformamos $6 \times 4 \times 7$ ou $4 \times 7 \times 6$ ou $7 \times 4 \times 6$ de modo a ter $6 \times 7 \times 4$, depois trocando o 4 por 2×2 .

Qualquer "trio", contendo a barra marron pode ser transformado em um "quarteto", com uma barra vermelha e uma carmin ou em um "quinteto" com 3 vermelhas. Isto torna certas multiplicações bem mais fáceis. $8 \times 7 \times 6 = 7 \times 6 \times 8 = 7 \times 6 \times 4 \times 2 = 7 \times 6 \times 2 \times 2 \times 2 = (42 \times 2) \times 2 \times 2 = (48 \times 2) \times 2 = 168 \times 2 = 2 \times 160 + 2 \times 8 = 320 = 16 = 336$.

Façam o mesmo, usando as barras seguintes: verde-claro, marron, azul verde-claro, marron, negro; azul, marron, azul

Quando há uma amarela e uma marron, há necessidade de seguir este método? Digam porque?

25. Podemos fazer a mesma coisa para multiplicação por 16, por 32 ou por 64. Se sabemos já multiplicar por 8, podemos dobrar uma vez mais para ter o resultado da multiplicação por 16. Dobrando ainda, obteremos o da multiplicação por 32 e dobrando ainda, o da multiplicação por 64. Seja: $25 \times 8 = 200$

$25 \times 2 = 50$	$25 \times 4 = 100$	$25 \times 8 = 200$
$25 \times 16 = 400$	$25 \times 32 = 800$	$25 \times 64 = 1600$

É fácil de se lembrar que 25×4 ou $4 \times 25 = 100$, de onde $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 800$. $27 \times 2 = 54$ $27 \times 4 = 108$ $27 \times 8 = 216$
 $27 \times 16 = 432$ $27 \times 32 = 864$

Quando podemos nos recordar de um destes resultados, torna-se fácil achar a outros. Mas em cada caso preciso, há vantagem em procurar o meio mais cômodo para obter a resposta.

Como multiplicar por 25:

Como $25 = 1/4$ de 100, multiplicamos primeiro por 100, quer dizer, posmos 2 zeros à direita do nº, depois dividimos por 4. Seja:

$13 \times 25 = \frac{13 \times 100}{4} = \frac{1300}{4} = 325$



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLÔRES DA CUNHA"

Pôrto Alegre - R. G. do Sul

-10-

$$27 \times 25 = \frac{27 \times 100}{4} = \frac{2700}{4} = 675$$

$$34 \times 25 = \frac{34 \times 100}{4} = \frac{3400}{4} = 850$$

Procuramos agora, o que dá 27×32 :

$$27 \times 32 = (25 + 2) \times 32 = 25 \times 32 + 2 \times 32 = 800 + 64 = 864$$

Calculamos do mesmo modo: $27 \times 29 =$ $26 \times 26 =$

$$26 \times 37 =$$

$$27 \times 26 =$$

26. Contem de 25 em 25, partindo de 25. Escrevam os números obtidos, agrupando-os por 4. Que notam?

Quais são as terminações (os últimos algarismos à direita) de todos os múltiplos de 25? Quais são os que terminam por dois 0?

Quais são os que terminam por 50?

Quais são os que terminam por 75?

Quais são os que terminam por 25?

Podem dizer, sem calcular a resposta, qual será a terminação da cada um dos produtos seguintes?

Verificarão em seguida: $7 \times 25 =$ $17 \times 25 =$ $12 \times 25 =$

$$8 \times 25 =$$

$$16 \times 25 =$$

$$25 \times 25 =$$

$$19 \times 25 =$$

$$9 \times 25 =$$

$$5 \times 25 =$$

27. Sabemos agora multiplicar por 5, por 10, por 100, por 2, 4, 8, 16, 32, 64 e por 25. Igualmente por todos os números que requerem simplesmente que se acrescente um zero no fim do resultado de uma dessas multiplicações que já sabemos fazer. É assim que saberemos multiplicar por 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, se soubermos multiplicar também por 3, 6, 7, 9.

Já que $6 = 2 \times 3$, se soubermos multiplicar por 3, basta dobrar a resposta. Seja: $6 \times 15 = 2 \times (3 \times 15) = 2 \times 45 = 90$

$$17 \times 6 = (17 \times 3) \times 2 = 51 \times 2 = 102.$$

Calculamos: $29 \times 6 =$ $33 \times 6 =$ $37 \times 6 = (30 + 7) \times 6$

$$45 \times 6 = (40 + 5) \times 6 =$$
 $48 \times 6 = (40 + 8) \times 6 =$

28. No livro II, dispusemos desta maneira as multiplicações de 2 números:

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 7 \\ \hline 21 \\ 91 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 3 \\ \hline 9 \\ 69 \end{array}$$

30. Podemos fazer a mesma coisa em todos os casos que forem encontrados aqui: $49 \times 6 = 288$ e dizemos: $2 \times 10 \times 34 + 9 \times 34 =$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$6 \times 8 = 48$$

$$6 \times 40 =$$

288 depois adicionamos

Do mesmo modo: $47 \times 7 = 49$ e dizemos: $(2 \times 10 + 9) \times (3 \times 10 + 4) =$

$$\begin{array}{r} 47 \\ \times 7 \\ \hline 49 \\ 329 \end{array}$$

$$7 \times 7 = 49$$

$$7 \times 40 = 280$$

e depois multiplicando adicionamos

Estas 2 multiplicações e a adição que se seguem, podem ser feitas mentalmente, então, em lugar de três linhas, basta somente:

$$\begin{array}{r} 80 \\ \times 6 \\ \hline 480 \\ 480 \\ \hline 960 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 600 \\ \times 6 \\ \hline 3600 \\ 600 \\ \hline 9600 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 986 \\ \times 6 \\ \hline 5916 \\ 986 \\ \hline 5916 \end{array}$$

$$4 \times 20 \text{ ou } 20 \times 4 = 80$$

$$30 \times 20 \text{ ou } 20 \times 30 = 600$$

e adicionando, achamos 986.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 6 \\ \hline 288 \end{array}$$

$$480$$

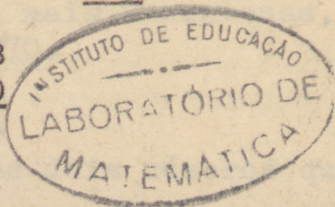
$$480$$

$$960$$

e podemos dizer: $6 \times 8 = 48$, escrevo 8 e retenho 4 dezenas; 6×4 dezenas 24 dezenas mais as 4 dezenas, = escrevo 28 à esquerda do 8.

Façam do mesmo modo as seguintes multiplicações:

$\begin{array}{r} 45 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 73 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 69 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 54 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 65 \\ \times 5 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 37 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 96 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 83 \\ \times 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 9 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{r} 72 \\ \times 8 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 45 \\ \times 50 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \\ \times 40 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 73 \\ \times 30 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 69 \\ \times 60 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 38 \\ \times 70 \\ \hline \end{array}$	
$\begin{array}{r} 96 \\ \times 30 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 83 \\ \times 70 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 90 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 72 \\ \times 80 \\ \hline \end{array}$			



29. Agora, multipliquemos 120 por 5. Vemos logo que a resposta é 600, porque é possível fazer um "quarteto": verde-claro, carmin, laranja e amarelo, e trocando a ordem temos: $120 \times 5 \times 10 = 60 \times 10 = 600$. Dispondo como no nº 28, temos: $120 \times 5 = 600$ e que se pode dizer assim: 5×2 dezenas = dez dezenas ou 1 centena $\times 5 = 5$ centenas; isto = 6 centenas.

Se tomamos o nº 121 ou 132 ou não importa qual outro nº inferior a 200, podemos, da mesma maneira, multiplicá-lo por 5 e achar:

$\begin{array}{r} 121 \\ \times 5 \\ \hline 605 \end{array}$	$\begin{array}{r} 132 \\ \times 5 \\ \hline 660 \end{array}$	$\begin{array}{r} 143 \\ \times 5 \\ \hline 715 \end{array}$	$\begin{array}{r} 166 \\ \times 5 \\ \hline 830 \end{array}$
--	--	--	--

Leiam estas operações em voz alta, como fizeram no precedente e digam se as respostas estão corretas. Verifiquem-nas por este método:

$143 \times 5 = (140 + 3) \times 5 = 140 \times 5 + 3 \times 5 = 700 + 15 = 715$ ou então pelo método empregado no exercício nº 20: $143 \times 5 = \frac{143 \times 10}{2} = \frac{1430}{2} = 715$

Efetuem as multiplicações seguintes, empregando somente uma linha para achar a resposta:

$\begin{array}{r} 87 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 120 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 215 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 177 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 231 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 198 \\ \times 4 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 63 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 97 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 122 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 313 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 165 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 217 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$
$\begin{array}{r} 132 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 151 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 145 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 256 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}$
	$\begin{array}{r} 165 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 109 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	
		$\begin{array}{r} 137 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r} 89 \\ \times 6 \\ \hline \end{array}$

30. como faremos para multiplicar entre si 2 números de 2 cifras? se um dos algarismos é 0, como em 10, 20, 30, ..., 90, já sabemos como é preciso fazer. Com o nº 25 quaisquer outros ainda, nós o sabemos igualmente. Mas se tomarmos, por ex., 29×34 , como podemos fazer? Podemos fazê-lo de vários modos:

- Podemos multiplicar 30×34 e subtrair 34: $29 \times 34 = 1020 - 34 = 986$.
- Podemos escrever: $29 = 2 \times 10 + 9$
 $(2 \times 10 + 9) \times 34 = 2 \times 10 \times 34 + 9 \times 34 =$
 $= 680 + 9 \times (3 \times 10 + 4) =$
 $= 680 + 27 \times 10 + 9 \times 4 =$
 $= 680 + 270 + 36 = 986$

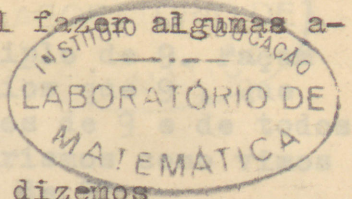
3. Podemos escrever $29 = 2 \times 10 + 9$ e $34 = 3 \times 10 + 4$ donde: $(2 \times 10 + 9) \times (3 \times 10 + 4) =$
 $2 \times 3 \times 10 \times 10 + 2 \times 10 \times 4 + 3 \times 10 \times 9 + 9 \times 4 = 600 + 80 + 270 + 36 = 986$

Podemos empregar este último método, dispondo como nos exercícios nº 28

$\begin{array}{r} 29 \\ \times 34 \\ \hline 36 \\ 270 \\ \hline 986 \end{array}$	$\begin{array}{r} 34 \\ \times 29 \\ \hline 36 \\ 270 \\ \hline 986 \end{array}$	o que se pode ler assim: 9×4 ou $4 \times 9 = 36$ 9×30 ou $30 \times 9 = 270$ 4×20 ou $20 \times 4 = 80$ 30×20 ou $20 \times 30 = 600$ e adicionando, achamos 986.
--	--	---

Tôdas essas linhas são necessárias ou é ainda possível fazer algumas adições de cabeça, como no nº 29? Dispomos assim: 29

$$\begin{array}{r}
 \times 34 \\
 1116 \\
 870 \\
 \hline
 986
 \end{array}$$



e dizemos

4 x 9 = 36, coloco 6 e retenho 3 dezenas, 4 x 20 = 80 ou 8 dezenas, mais 3 dezenas = 11 dezenas, e escrevo 11 à esquerda de 6, seja 116; 30 x 9 = 270, coloco 70 e retenho 2 centenas, 30 x 20 = 600 ou 6 centenas, mais 2 centenas, isto é igual a 8 centenas, e escrevo à esquerda de 70, seja 870.

Calculem:

18	29	43	55	37	32
<u>x 26</u>	<u>x 13</u>	<u>x 14</u>	<u>x 16</u>	<u>x 15</u>	<u>x 32</u>

E mostren que obtemos a mesma resposta se trocarmos os dois números que multiplicamos.

31. Como podemos achar os resultados mentalmente? Se conhecemos os fatores dos números, podemos introduzir simplificações. Assim:

1. 55 x 16 = 5 x 11 x 4 x 4 = 5 x 4 x 11 x 4 = 20 x 44 = 880 ou 55 x 2 x 8 = 110 x 8 = 880.

2. 37 x 15 = 37 x 10 + a metade dêsse nº, seja 370 + 185 = 555, ou 37 x 3 x 5 = 111 x 5 = 555.

Para essas multiplicações rápidas é bom ter um grande número de produtos nossa disposição, como justamente 3 x 37, que é fácil de reter e que nos dará imediatamente 6 x 37, 9 x 37, 12 x 37, 15 x 37 e alguns outros produtos. Procurem e dêem o resultado de todos êsses produtos.

32. Quais são todos os múltiplos de 11 até 1001? Conhecemos todos aquêles em que o outro fator é um nº de um só algarismo. Pois 11 = 10 + 1 para multiplicar por 11, podemos primeiro multiplicar por 10 e depois, juntar o nº que se multiplicou. Assim: 54 x 11 = 54 x 10 + 54 = 594. Dispondo como no nº 30, temos:

$$\begin{array}{r}
 54 \\
 \times 11 \\
 \hline
 54 \\
 540 \\
 \hline
 594
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 63 \\
 \times 11 \\
 \hline
 63 \\
 630 \\
 \hline
 693
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 43 \\
 \times 11 \\
 \hline
 43 \\
 430 \\
 \hline
 473
 \end{array}$$

Isto nos leva a notar que nos dois números que juntamos para obter a resposta, as dezenas são os dois algarismos do número que multiplica por 11. É isto sempre verdade?

Que acontece no curso da adição final, se temos os números seguintes:

73	56	65	47	38	72	69	58
<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>	<u>x 11</u>

Repararam em alguma coisa de especial concernente aos 3 algarismos de tôdas as respostas?

Podem dizer se os números seguintes são múltiplos de 11?

913, 462, 374, 459, 638, 627, 363, 352, 958?

Como reconheceriam os múltiplos de 22, 44, 55, 88?

É possível reconhecer os múltiplos de 33, 66, 99?

Digam como fariam para multiplicar mentalmente pelos múltiplos de 11 e dêem as respostas a:

32 x 33	12 x 66	14 x 55	17 x 44
8 x 99	45 x 22	13 x 77	15 x 33
23 x 22	29 x 33	16 x 66	12 x 77

33. Escrevam os múltiplos de 3. Depois adicionem os algarismos de cada um destes múltiplos; se o resultado fôr superior a 9, adicionem ainda os algarismos obtidos, como nos exemplos seguintes:

3 x 111 = 333	3 + 3 + 3 = 9	3 x 25 = 75	7 + 5 = 12	1 + 2 = 3
3 x 93 = 279	2 + 7 + 9 = 18	1 + 8 = 9	3 x 5 = 15	1 + 5 = 6

Que notam?

Podem dizer como reconhecemos um múltiplo de 3?

Que poderíamos dizer dos múltiplos de 6?

34. Escrevam os múltiplos de 9. Depois adicionem os algarismos de cada um destes múltiplos; se o resultado fôr superior a 9, adicionem ainda os algarismos obtidos. Que notam?

Escolham um nº qualquer de que estejam certo não seja múltiplo de 9. Façam como anteriormente: adicionem ainda o nº obtido, se fôr maior que 9. Que que notam? Podem dizer qual é a diferença entre os múltiplos de 9 e de todos e de todos os outros números, quando adicionamos seus algarismos como vimos fazendo? Podem dizer se os números seguintes são múltiplos de 9?

172 354 702 954 315 475 999 108 378
604 477 455 558 639 738 513 414 711

Se foren, digam por que nº o 9 é múltiplo para produzir este resultado.

35 Sabemos que 81 é 9 x 9 (9 ao quadrado). Formem todos os quadrados inferiores a 1000. Obtemos alguns produtos novos que são úteis e que é bom lembrar:

1² 2² 3² 4² 5² 6² 7² 8² 9² 10² 11² 12² 13² 14² 15²
16² 17² 18² 19² 20² 21² 22² 23² 24² 25² 26² 27² 28² 29² 30²

Estes produtos podem ser obtidos de diversas maneiras, conforme são formados. Assim: 10² 20² 30² são muito fáceis; todos os números pares a quadrado são múltiplos de 4. Porque? Para cada um deles podemos formar um "quarteto" que contenha barras vermelhas. Como? Isto explica por que todo quadrado de um número par é um múltiplo de 4?

Tomem os múltiplos de 5. Formem os "quartetos" que representam os quadrados dos números. Podem afirmar que estes quadrados são múltiplo de 25? Se os números são múltiplos de 4 ou 8, podem afirmar que seus quadrados são múltiplos de 16 ou de 64? Expliquem por que.

Que podem dizer dos quadrados dos números que são múltiplos de 7, 9, 11? Na tábua dos quadrados, há números que são produtos de números menores dos quais vocês já conhecem os quadrados. Vejam se é possível achar o quadrado destes números, tomando em conta estes conhecimentos. Eis um exemplo:

28 = 4 x 7 28² = 4² x 7² = 16 x 49

Esta multiplicação pode ser feita mentalmente, multiplicando antes 16 por 50, depois tirando 16 do resultado; seja 28² = 1800 - 16 = 784

Recomecem o quadro dos quadrados e coloquem aí:

- 1. Os quadrados já conhecidos;
- 2. Os que podemos encontrar facilmente;
- 3. Os que podemos obter, como ficou dito antes, com o auxílio de seus fatores.

36. Para completar o quadro, vamos agora considerar os quadrados de outros números, tais como 29 e 31, que são primos. Para achar seus quadrados, devemos multiplicá-los por eles mesmos. Em certos casos é possível utilizar um recurso especial, mais simples, assim, nos 2 exemplos: 29 = 30 - 1; 31 = 30 + 1

Sabemos que os quadrados de 30 e de 1, são 900 e 1; podemos utilizá-los para encontrar os quadrados que procuramos? Formemos um quadrado das barras azuis e tentemos recobri-los com o auxílio de 2 quadrados, um feito de barras carmins e outro de amarelas. Que constatam? Quais são as 2 figuras que encontram ao lado dos 2 quadrados?

Podem cobrir um com o auxílio de barras carmins e outro com amarelas? Quantas barras de cada cor são necessárias? Que podem concluir da superfície destas 2 figuras?

9² = 4² + 5² + ?

mas 9 = 4 + 5, de onde (4 + 5)² = 4² + 5² + ?

Experimentem de novo com um quadrado feito de pretas cobertas por um quadrado carmin e um verde-claro. Escrevam os resultados como acima. Tentem ainda com um quadrado de barras laranjas e utilizando as barras carmin e verde-escuro. Escrevam os resultados como acima. Tentem desta vez com um quadrado verde-escuro e um preto. Escrevam os resultados como acima.

Vejam que para recobrir exatamente um quadrado por 2 outros quadrados, cuja soma dos lados é igual ao lado do 1º quadrado, é preciso juntar 2 retângulos iguais, dos quais, conhecemos imediatamente os 2 lados.

Podem estabelecer por escrito isto, tomando qualquer quadrado como ponto de partida? Façam a aplicação em 31 = 30 + 1 e 27 = 25 + 2.

Retomemos nossas barras e formemos em 1º lugar um quadrado carmin, depois

sobre 2 de seus lados, façamos um retângulo formado de 5 barras azuis, de modo que as 2 partes que ultrapassam se recubram. Como vemos que os 2 retângulos se recobrem pela superfície de um quadrado amarelo, podemos escrever:

$$9^2 = 2 \times 9 \times 5 + 4^2 - 5^2, \text{ que pode ainda se escrever:}$$

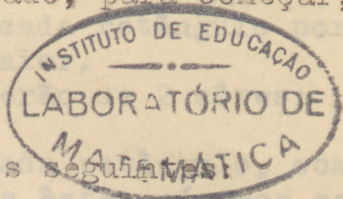
$$9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5 = 4^2. \text{ Mas como } 4 = 9 - 5, \text{ temos:}$$

$$(9 - 5)^2 = 9^2 + 5^2 - 2 \times 9 \times 5.$$

Façam a mesma coisa começando por um quadrado amarelo e utilizando barras brancas. Que podem escrever? Tomem um quadrado verde-claro, esta vez, e as barras marron em lugar das azuis. Que podem escrever? Começar com um quadrado verde-escuro e tomem as barras laranja para formar os retângulos que se recobrem, procedendo sempre como fizeram. Escrevam o que acharam.

Podem escrever, se tomarem, não importa qual, o quadrado, para começar, e não importa quais barras, para efetuar a operação?

Façam a aplicação em $29 = 30 - 1$
 $24 = 25 - 1$
 $23 = 25 - 2$



Vejam se obtêm os mesmos resultados para os quadrados seguintes

$$22^2 = (20 + 2)^2 = (25 - 3)^2 = (21 + 1)^2 = (23 - 1)^2$$

$$26^2 = (25 + 1)^2 = (28 - 2)^2 = (20 + 6)^2 = (30 - 4)^2$$

7. Retornemos aos quadrados que fizemos com as barras. O quadrado azul é formado de um carmin e de qualquer coisa mais. Esta diferença pode ser realizada pondo ponta à ponta o retângulo de barras carmins e um retângulo composto de 5 azuis. É exato?

Façam o mesmo com um quadrado preto e um quadrado verde-claro, e encontrem o retângulo igual à sua diferença. Façam ainda com um quadrado laranja e um quadrado carmin, ou um laranja e um preto, ou um marron e um laranja.

Encontrarão então:

$$7^2 - 3^2 =$$

$$10^2 - 6^2 =$$

$$9^2 - 7^2 =$$

$$8^2 - 5^2 =$$

Existe uma relação muito simples entre os 2 lados de todos estes retângulos e os lados dos quadrados. Vêem-na? Podem explicar essa descoberta? em:

$$13^2 - 8^2 = \quad 12^2 - 9^2 = \quad 5^2 - 4^2 = \quad \text{e verificar com as barras como foi feito antes?}$$

8. Às vezes os produtos podem-se colocar sob a forma de quadrados de números. Por exemplo:

$$13^2 - 12^2 = 25 \times 1 = 5^2$$

Podem encontrar alguns outros? Quando tiverem alguns exemplos, experimentem o que segue: Construam os 3 quadrados com as barras que convenham e experimentem formar um retângulo, no qual os lados sejam os lados dos quadrados. Quais são os triângulos obtidos? Façam com todos os exemplos que escolheram.

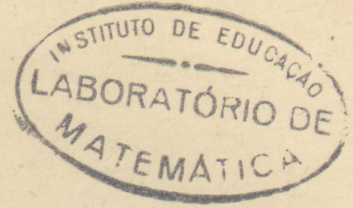
39. Coloquem 1 barra branca sob seus olhos; sua face superior é um quadrado. Podem formar 1 quadrado com 4 barras brancas? Quantas vermelhas são necessárias para recobri-las?

Podem fazer 1 quadrado com 9 barras brancas? Quantas verde-claras para recobrir? Se fizerem 1 quadrado com 4 carmins, quantas brancas são precisas?

Agora formemos uma série de quadrados, começando pela barra laranja e utilizando cada uma das outras vez por vez. Colocando-as umas sobre as outras, obtemos 1 pirâmide. Façam escorregar todos os quadrados de tal modo que, se olhando de cima, não vejamos senão a beira de cada quadrado no comprimento de 2 lados somente.

- Calculem o nº de barras necessárias para recobrir, o bôrdo:
- 1. do 2º quadrado (a parte vermelha)
- 2. do 3º quadrado (a parte verde-claro) etc...etc...e do
- 9. décimo quadrado (a parte laranja).

Se incluimos o quadrado branco no vértice, podemos escrever:



$$1 + 3 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Dêem outras linhas que correspondam aos cálculos que fizeram, e achem a resposta para: $1 + 3 + 5 + 7 +$

40. Começamos agora com uma barra vermelha. Sua face superior é um retângulo 2×1 . Se colocarmos contra 2 se seus lados uma barra verde-claro e 1 branca, formamos um outro retângulo 3×1 . Ao longo de 2 lados deste retângulo podemos colocar uma barra carmin e uma vermelha e obteremos um retângulo 4×3 . Se continuarmos, poderemos obter retângulos cada vez maiores, cada um deles estando composto da precedente e de uma barra colocada ao lado de 2 de seus lados.

Construamos um pirâmide recobrimo, sucessivamente, cada retângulo por 1 retângulo igual, começando por aquele que é anterior ao maior.

visto de cima, os lados visíveis de cada retângulo serão de 2 cores: as 2 barras consecutivas.

Quantas barras brancas são necessárias para cobrir cada retângulo, começando pela vermelha e indo de alto a baixo? Se adicionamos estes números ao passo que recobrimos um retângulo maior, encontramos:

2	brancas que são iguais a	2 x 1
2 + 4	" " " "	a 3 x 2
2 + 4 + 6	" " " "	a 4 x 3
2 + 4 + 6 + 8	" " " "	a 5 x 4

Podem escrever os seguintes e encontrar os resultados como vimos fazendo! Façam a aplicação em:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 24$$

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 50$$

41. No exercício nº 30, encontramos a soma dos primeiros números ímpares: agora encontramos a soma dos primeiros números pares. Podem achar rapidamente, a soma dos primeiros números inteiros?

$1 + 2;$ $1 + 2 + 3;$ $1 + 2 + 3 + 4;$ $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ etc,
 dogamos até vinte números.

SEGUNDA PARTE

OS PROCESSOS DE CÁLCULO

1. Quando adicionamos 2 ou mais números, podemos notar que fazemos assim:
 $75 + 46 + 109 = 230$ ou assim:

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 46 \\ \hline 121 \\ + 109 \\ \hline 230 \end{array}$$

Nesta segunda notação, deve-se tomar cuidado que as unidades venham sob as unidades, as dezenas sob as dezenas, e as centenas sob as centenas.

2. Compara estas 2 notações e vejam com qual você adiciona o mais depressa e mais fácil. Fizeste mais erros numa do que noutra?

3. Efetua as adições seguintes e conta quanto tempo leva:

123	42	79	225	474	666	321
+ 217	+ 159	+ 346	+ 68	+ 313	+ 139	+ 136
+ 93	+ 85	+ 57	+ 141	+ 24	+ 305	+ 274
+ 74	+ 248	+ 133	+ 219	+ 48	+ 118	+ 147
+ 438	+ 177	+ 409	+ 334	+ 56	+ 78	+ 25
	123	154	198			
	+ 230	+ 65	+ 264			
	+ 132	+ 276	+ 75			
	+ 213	+ 87	+ 388			
	+ 301	+ 398	+ 56			

4. Efetua as adições seguintes e contrôle o tempo

$$65 + 276 + 87 + 154 + 398 =$$

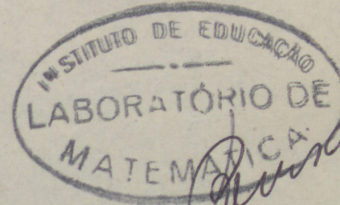
$$478 + 313 + 29 + 34 + 56 =$$

$$198 + 75 + 388 + 56 + 264 =$$

$$\begin{aligned}
 &68 + 141 + 219 + 255 + 334 = \\
 + &346 + 79 + 57 + 409 + 133 = \\
 &230 + 301 + 213 + 132 + 123 = \\
 &85 + 248 + 42 + 177 + 159 = \\
 &136 + 321 + 25 + 274 + 147 = \\
 &217 + 123 + 93 + 74 + 438 = \\
 &78 + 66 + 139 + 305 + 118 =
 \end{aligned}$$

5. Efetua as adições seguintes e controle o tempo:

37	72	21	64	49
74	45	78	74	63
92	29	93	85	58
55	56	65	96	67
69	96	79	66	93
34	33	44	23	25
18	81	28	35	45
45	15	51	47	37
53	37	72	59	95
<u>+ 87</u>	<u>+ 85</u>	<u>+ 83</u>	<u>+ 91</u>	<u>+ 19</u>



Revisado em
22/10/82
W. F. L. S.
Sab. Mat.
CALCUL.

Cuisenaire

L'Arithmétique avec les nombres
en couleurs jusqu'à 1.000

