UMA TEORIA DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Capítulo II do livro
"Constructions des Mathématiques"
de Z.P. Dienes.

Trad. da Prof. Esther Pillar Grossi

Antes de abordar uma teoria da aprendizagem da matemática, é indispensável definir claramente o que se deve entender por matemática. Não deve ser considerada como um conjunto de técnicas, por mais indispensáveis que estas sejam para a utilização efetiva da matemática. A matemática deve ser olhada primordialmente como uma estrutura das relações, sendo o simbolismo formal sòmente um meio de comunicar tal ou qual elemento desta estrutura.

Uma proposição matemática é uma proposição relativa a alguma conexão no interior da estrutura; para exprimí-la, nós recorremos a um simbolismo que, em suma, é uma espécie de linguagem especialmente inventada com esta finalidade. Por exemplo, a proposição simbólica

$$2(a+b) = 2a+2b$$

estabelece uma conexão entre duas partes da estrutura, uma relativa à adição, a outra à multiplicação. Saber que podemos passar dos símbolos "$2(a+b)$" aos símbolos "$2a+2b$", e vice-versa, é um conhecimento técnico que pode não conter nenhuma compreensão do traço de união simbolizado pela fórmula. Já mostrei que tais proposições sôbre as estruturas são continuamente formuladas em nossas escolas sem que as estruturas em si mesmas sejam compreendidas.

Por matemática, entenderei pois as verdadeiras conexões estruturais entre conceitos ligados à idéia de número (matemática pura), assim como suas aplicações aos problemas reais (matemática aplicada).

Por aprendizagem da matemática, entenderei a apreensão de tais conexões e de sua simbolização, assim como a aquisição da aptidão para aplicar os conceitos formados às situações reais que se apresentam no mundo.

É difícil de conceber como uma teoria do gênero "estímulo-resposta" pode se aplicar à aprendizagem assim definida. Tal teoria considera o estudo como um processo de capacitação graças ao qual certas respostas podem ser ulteriormente provocadas por certos estímulos. Ora, se nós olhamos profundamente a lição de matemática corrente, é justamente êste processo de capacitação que nós aí encontramos. Apresentam-se estímulos, que são ligados a certas reações, batizadas como "respostas certas" com alguma explicação (só parte do processo que abarca tôda a estrutura). Um sistema de recompensas, reforçado em certos casos, por um sistema de punições, torna os alunos aptos a fornecer "respostas certas". Na maioria dos casos, quando os alunos reagem com "respostas certas", a professôra não vai mais longe, não aprofunda mais. Trata-se sobretudo depois de "pôr ordem nas coisas", no conjunto dos conhecimentos e instalar uma resposta determinada a um estímulo determinado; e a professôra não se refere à estrutura, senão acessòriamente, na medida em que esta facilite "a colocação em ordem". Os alunos que fornecem habitualmente "respostas erradas" são em geral aquêles cuja compreensão não pode sustentar a cadência do desenvolvimento da estrutura. Resta-lhes aprender certos "truques" para aumentar o número de "respostas certas" que êles se sentem pressionados a dar, na situação de condicionamento em que êles se encontram. Mas, não é verdade que, mesmo aquêles cujas respostas foram na maior parte "certas", realmente compreenderam as partes da estrutura às quais estas respostas se referem.

O que, então, torna o sistema "estímulo-resposta" menos adequado ao estudo da matemática que ao de outras disciplinas? É que o importante, em matemática, é muito mais a estrutura que o conteúdo. É o contrário em história, quando o que mais pesa para os fatos históricos, é que êles se tenham produzido, ainda que num estágio mais adiantado se façam tentativas para "estruturar" os acontecimentos, considerando-os como partes de um esquema. No domínio do pensamento matemático, contràriamente esta estruturação constitui um elemento fundamental. Ainda mais, os modêlos, as estruturas realizadas são primeiramente consideradas como objetos matemáticos que se imbricam em outras estruturas; estas, por sua vez, tornando-se familiares, são olhadas como objetos matemáticos e assim sucessivamente. Êsta superposição de modêlos ou de estruturas se produz com uma rapidez alarmante para quem não é iniciado na matemática e que ficará logo abandonado ao último lugar da fila.

Não hesitemos - porque isto vale a pena - em nos deter mais demoradamente sôbre êste processo. Para tornar tão clara quanto possível a matéria, recorrendo à teoria gramatical, mais familiar, nós falaremos, de "sujeitos" e de "predicados" no lugar de pedir emprestado ao vocabulário da lógica as "classes" e os "elementos". Consideremos o conceito de número natural. O predicado "há aqui três" se refere a uma coleção de coisas. Esta coleção é o sujeito do predicado acima, isto é, do predicado que enuncia que há três coisas na coleção. Superando êste estágio, nós poderíamos, considerando três maçãs e três laranjas, ser tentados a dizer: "há tantas maçãs quantas laranjas". Nós utilizamos agora um nôvo predicado "há tantos de..., quantos de...". Qual é o sujeito dêste predicado? Certamente não são as coleções. O sujeito é o número de coisas numa das coleções. Êste número, o número três, foi utilizado antes exatamente como um predicado aplicando-se a uma coleção. Em seguida êle foi utilizado como um sujeito ao qual um nôvo predicado é aplicado, o predicado: "há tantos de... quantos de..." Mais precisamente, êste predicado tem dois sujeitos, o número de coisas na coleção de maçãs e o número de coisas na coleção de laranjas. O que nós dizemos é que êstes dois números são iguais, ou o mesmo. Isto seria ainda mais claro se nós considerássemos o predicado "há menos... que..." Se há duas laranjas e três maçãs, nós podemos aplicar o predicado "há menos... que..." às laranjas e às maçãs e dizer "há menos laranjas que maçãs", Os sujeitos são os números 2 e 3, o predicado "é inferior a" o que se escreve simbòlicamente

$$2 < 3$$

No início, 2 e 3 diziam algo a respeito de coleções de objetos, em seguida os predicados "é o mesmo que" ou "é inferior a" dizem algo a respeito de 2 e 3. É fácil continuar e dizer algo sôbre "é o mesmo que". Por exemplo, para esclarecer o que é adicionar, é preciso recorrer ao conceito "é o mesmo que".

Se nós contamos até 2 e depois continuamos a contagem de mais 3, nós descobrimos que encontramos o"mesmo" número que se tivéssemos contado diretamente até 5.

Da mesma forma para uma boa explicação da multiplicação precisa-se da adição e a fórmula 2(a+b) requer simultâneamente a adição e a multiplicação; falando em outros têrmos, esta fórmula dá indicação sôbre uma grande quantidade de coisas, as quais por sua vez dizem respeito a outras coisas e assim por diante, até chegarmos aos números, que dão informações sôbre coleções de objetos. Exprimindo-se em linguagem gramatical, os predicados tornam-se sujeitos para outros predicados, e o céu é o único limite desta corrida matemática...

As pessoas habilidosas em manejar os predicados e pô-los na condição de sujeitos constituem os bons matemáticos. Cada vez que um matemático cria um predicado, êle começa quase imediatamente a se perguntar o que poderia vir a dizer sôbre êste nôvo predicado. Aplicar um predicado a uma certa classe de sujeitos, é estabelecer uma espécie de muro ao redor dêles; uma pessoa com espírito matemático experimentará ràpidamente uma sensação de claustrofobia matemática em tais espaços fechados e começará a se perguntar o que há do outro lado da amurada - em outros têrmos, ela começará a procurar as conexões entre seus predicados. Não se poderá segurá-la encerrada por muito tempo. Se êste tipo de pensamento aberto sem cessar é a essência do pensamento matemático, então é claro que é radicalmente diferente do pensamento trivial. Os psicólogos que estudaram os problemas da aquisição mental e do pensamento, raramente eram matemáticos; é talvez por isso que até aqui não foi proposta nenhuma teoria conveniente para explicar as modalidades de aprendizagem neste domínio muito particular.

Dispõe-se todavia de um pequeno núcleo de dados experimentais reunidos por psicólogos orientados para a matemática, núcleo a partir do qual podem-se esboçar as grandes linhas de uma teoria da aprendizagem de matemática. Entretanto, resta muito a fazer. Seria preciso que os problemas fôssem submetidos ao corpo docente inteiro; os professôres em exercício poderiam então participar ativamente na coleta de observações e contribuiriam assim para o estabelecimento das bases sólidas de uma teoria aceitável.

As fontes em que nós nos apoiamos para esboçar nossa teoria são as bem conhecidas pesquisas de Piaget, os trabalhos do "Cogintion Project de Harvard", dirigidos por Bruner, o marcante trabalho realizado por Frederick Bartlett e algumas de minhas próprias experiências. O leitor se reportará à bibliografia para as referências detalhadas.

aqui

Digamos primeiro algumas palavras sôbre estas pesquisas. Piaget foi o primeiro a ver que o processo de formação de um conceito é muito mais longo do que se pensava e que um importante trabalho, aparentemente sem relação com o conceito, deve ser feito antes que se tenha uma leve indicação sôbre a direção que o pensamento está em vias de seguir. É o estágio largamente inconsciente, o estágio do jôgo, em que se lida com os elementos do conceito bem antes de ter a menor idéia que êstes elementos poderão um dia ajudar a classificar de maneira cômoda os acontecimentos do mundo. O bebê brinca com os sons e as sílabas muito antes de ter idéia de que mais tarde êstes sons poderão tornar-se meios de comunicação. A criança brinca com taquinhos ou outros objetos, agrupando-os em coleções de formas ou tamanhos especiais muito antes de saber que ela está realmente em vias de se familiarizar com os elementos que lhe permitirão formar mais adiante os conceitos de número e espaço. Nós vivemos as flutuações dos prêços e dos lucros, muito antes de experimentar coordená-los numa teoria econômica. É evidente que, em cada um dêstes casos, não poderíamos formar conceitos sem ter jogado antes, por muito tempo, com seus elementos.

1º

Nº e espaço

Depois surge a segunda etapa, introduzida pela lenta descoberta de uma direção, através da qual nossas experiências podem progressivamente se reunir num todo significativo. O nenê começa a observar que certos sons se produzem tôdas as vêzes que certos acontecimentos se dão; assim, sua irmã aparece tôdas as vêzes que seu nome é pronunciado. Gradualmente, êle se esforça por produzir sons em circunstâncias "apropriadas"; efetivamente, êle ensaia orientar-se conscientemente para a comunicação com significado. A criança, brincando com taquinhos, acaba por descobrir que as coleções que contêm dois objetos têm algo em comum: por exemplo, que há um objeto para si e um para sua mãe. É a aurora da experiência matemática, que atingirá seu zênite muito mais tarde, com a apreensão do número puro. Em nossas reflexões sôbre os prêços e os salários, pode haver um momento em que sentiremos necessidade de compreender as conexões aí existentes e iremos à biblioteca retirar um livro sôbre economia. Cêdo ou tarde, esta segunda etapa conduz à terceira, quando de alguma maneira a "imagem amadurece" e nós sentimos que "compreendemos". O ciclo está completo quando nós percebemos de repente que chegamos ao ponto final de um itinerário mental. Segue-se então um período de exercícios, com a finalidade de enraizar firmemente o nôvo conceito em nossa experiência e de incorporá-lo ao arsenal de que dispomos para desenredar as confusões do nosso meio. O nenê que aprendeu a dizer "Mamãe" põe-se a dizê-lo e redizê -

2º

3º

Compreensão

lo, mais e mais vêzes, exclusivamente para ver se obtém o efeito suposto. A criança que descobriu o número se porá interminàvelmente a construir pilhas com um mesmo número de cubos ou outras coisas do mesmo gênero e, além disso insistirá para que os adultos tomem parte nestas repetições o que, bem entendido, os cansa por sua monotonia. Para compreender o ponto de vista da criança, podemos nos lembrar de nossa própria tendência a cansar nossos amigos com tôda teoria recém descoberta e por aplicá-la nas circunstâncias menos adaptadas. Eis-nos à etapa prática que segue a realização do conceito; e esta etapa constituirá por sua vez aquela fase inicial do jôgo que conduzirá à próxima colheita de conceitos. Assim, os ciclos se encadeiam, um após o outro, cada ciclo sendo construido sôbre os ciclos prèviamente realizados.

O leitor não encontrará dificuldade em ver que esta descrição dinâmica do processo da aprendizagem é mais adaptada às condições da aprendizagem da matemática que qualquer explicação atomística, à base de estímulo-resposta. Mas, bem entendido, isto é sòmente um quadro, e o quadro deve ser preenchido pelo conteúdo que queremos ensinar. As situações diferem umas das outras, por exemplo em sua estrutura lógica. Nós somos pois, levados a coordenar conjuntos de experiências por meio de conexões lógicas diferentes. Pode ser que tenhamos de ensinar que dois acontecimentos A e B se produzem sempre juntos como, por exemplo, o soar da campainha e o início de uma aula. Nós associamos os dois acontecimentos, conjuntando-os num acontecimento único; fazemos uma conjunção de dois acontecimentos anteriormente sem conexão. Numa outra situação sabemos que, se há duas pessoas numa lista de candidatos para um pôsto, sòmente uma pode ser nomeada. Relacionamos êstes acontecimentos disjuntando as duas possibilidades distintas; fazemos uma disjunção de dois acontecimentos que não possuiam conexão antes que a lista de candidatos fôsse elaborada. No caso da conjunção, dizemos: a campainha soa e a aula começa. No caso de disjunção, dizemos: "ou João da Silva obtém o pôsto ou José dos Santos".

Existem numerosas conexões lógicas que estabelecemos entre conceitos já formados. Por exemplo: se o Sr. A é londrino, então posso falar-lhe em inglês. Não é verdade que se posso falar a alguém em inglês, estou necessàriamente em presença de um londrino; pode a pessoa ser de Manchester ou da Escócia ou mesmo de qualquer lugar distante do globo. É esta uma relação de aplicação.

. . . .

As diferenças entre as situações de aprendizagem podem não repousar sòmente sôbre a estrutura lógica da matéria a aprender. Indivíduos diferentes enfrentam o mesmo problema diferentemente, e isto foi trazido claramente à luz pelas pesquisas de Harvard. É possível que a própria natureza do problema estudado tenha influência sôbre a direção segundo a qual se o aborda, mas o que interessa sobretudo é a influência exercida pelo tipo de pensamento que os indivíduos comumente fazem uso.

Frederick Bartlett enumera e examina um certo número de modos de pensar diferentes indo, segundo sua terminologia, do tipo de pensamento "fechado" àquele do artista inteiramente diferente, que êle chama com propriedade "pensamento ousado".

O problema da aprendizagem consiste essencialmente em encontrar um ajustamento apropriado entre o que exige a estrutura da matéria a aprender e a estrutura do pensamento do aluno. Para que o processo da aprendizagem possa ser explicado por uma teoria inteligível, qualquer que seja, é preciso levar em conta estas duas estruturas. É uma tarefa muito difícil e se sabe muito pouco, até o presente, sôbre êste tema, a não ser uma tentativa fragmentária na monografia recente do autor:"Formação do Conceito e Personalidade".

O leitor que desejar penetrar nos pormenores da teoria e ter acesso aos dados experimentais disponíveis se reportará às monografias indicadas na bibliografia. Longos desenvolvimentos aqui não teriam lugar. Daremos sòmente as conclusões principais e as hipóteses que delas resultam, porque é sôbre elas que estão baseadas as sugestões práticas acêrca do estudo da matemática na presente obra.

Nós já examinamos os três estágios de Piaget na formação do conceito. A cada um corresponde um tipo muito diferente de aprendizagem. No estágio preliminar ou estágio do jôgo corresponde uma atividade desordenada sem finalidade aparente; a pessoa se entrega a esta atividade e encontra prazer por ela mesma; é o tipo do comportamento que chamamos geralmente jôgo. Para que o jôgo seja realizado, é preciso que a pessoa tenha tôda liberdade de experimentar. Esta etapa da aprendizagem dos conceitos deve, pois, ser tão livre quanto possível, sendo os componentes do futuro conceito deixados à disposição dos alunos como material de jôgo. A segunda etapa é mais dirigida, mais orientada, mas ela é caracterizada pela ausência de tôda tomada clara de consciência do que se procura. Nêste estágio, uma atividade até certo ponto estruturada é desejável. Como se chegará a isto depende da estrutura do conceito assím como dos modos de pensamento particulares do aluno. Enquanto não tivermos mais dados sôbre êstes fatôres, o método mais seguro será acumular um grande número de experiências de estruturas variadas mas tôdas conduzindo ao conceito. A terceira etapa deve fornecer uma prática adequada para fixar e aplicar os conceitos que já foram formados. Os jogos que são praticados durante estas etapas serão classificadas em:

a) Jogos preliminares
b) Jogos estruturados
c) Jogos para praticar

Esta classificação refere-se, bem entendido, a um conceito dado. É claro que um jôgo para praticar em relação a um conceito, pode servir como jôgo preliminar para um conceito ulterior. Todavia, é importante não utilizar jogos para praticar como jogos preliminares para o MESMO conceito - êrro comum nas escolas infantis em que se espera ver as crian ças aprender por jogos que elas não podem praticar sem conhecer o que lhes quer ensinar. É também importante aproveitar bem o momento em que uma criança passa de uma etapa à seguinte, afim de lhe fornecer experiências adaptadas à evolução da situação.

....

Foi percebido e depois amplamente confirmado pela observação de crianças em idade escolar que se dedicavam aos seus deveres de matemática, que as pessoas diferem na extensão do que elas são capazes de fazer para se engajarem numa reflexão analítica (lógica) ou construtiva. Apareceu também claramente que as crianças desenvolvem uma reflexão construtiva muito tempo antes de se empenhar numa reflexão analítica. Também, criando-se situações de aprendizagem matemática com a ajuda de materiais, é preciso lembrar-se de que mesmo se as crianças não estão sempre prontas a formar juízos lógicos, elas são capazes de construir conceitos matemáticos muito antes do que se pôde crer até o presente. A exploração lógica do que ela construiu seguirá naturalmente, mas talvez anos mais tarde.

Entremos agora um pouco mais em detalhes no conteúdo da aprendizagem matemática. Nós sabemos que as três etapas de crescimento são necessárias antes que a pessoa se torne completamente apta para utilizar um predicado ou conceito matemático. Como podemos colocar as experiências mais adequadas no caminho das crianças, a fim de acelerar o desenvolvimento dos conceitos? Um conceito matemático contém de hábito um certo número de parâmetros e é a constância das conexões entre êles, ainda que os parâmetros variem, que constitui o conceito matemático.(11) Para dar o maior número de experiências de tal forma estruturadas a fim de encorajar o desenvolvimento do conceito, parece "a priori" desejável que todos os parâmetros possíveis sejam levados a variar ao máximo deixando o conceito intacto. Por exemplo, com o conceito de paralelogramo, pode-se variar a forma fazendo variar os ângulos e o comprimento dos lados opostos, pode-se trocar a posição contanto que os lados opostos permaneçam paralelos. É claro que um conceito de paralelogramos isométricos colocados na mesma posição não constituiria um conjunto de experiências próprias ao desenvolvimento do conceito. Digamos, em resumo, que é necessário variar o maior número possível de parâmetros se se quer ver a reunião das condições otimais de experiência para o desenvolvimento do conceito.

Examinemos, agora, a questão da escôlha da estrutura destinada a formar o conteúdo conceitual real do tema. O resultado dos trabalhos experimentais realizados até êste dia, dá a pensar que para a complexidade lógica, se deveria restringir ao mínimo. Se é de escolher entre um tema pondo acento sôbre a construção e um outro mais carregado do lado analítico, o primeiro será, certamente, mais apropriado, sobretudo para crianças pequenas. A apreciação analítica, o exame crítico de uma situação, são modos de pensamento que exigem um certo grau de maturidade que se constata raramente antes dos 12 anos. Acima desta idade, as crianças co-