

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

Escola Estadual de 1ª e 2ª Graus  
SERVIÇO DE COORDENAÇÃO PEDAGÓGICA  
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ATUALIZAÇÃO SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA - 1978.

AS SEIS ETAPAS DO PROCESSO DA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Autor: Z.P.Dienes

Tradução: Nelcy Dondoni  
Borella

### DESCRIÇÃO DAS ETAPAS:

O que é compreender? o que é aprender? É preciso reconhecer que para estas perguntas, nós não temos ainda uma resposta cientificamente satisfatória. Se é verdade que ninguém duvida mais hoje em dia que a relação estímulo resposta conduza um adestratoamento que, tanto no plano da compreensão como na aprendizagem posterior, representa geralmente blocos, é necessário mostrar, então, quais são os elementos constitutivos do processo de aprendizagem digno deste nome.

Partimos do teorema da existência segundo o qual é a partir de um ambiente rico que a criança pode construir seus conhecimentos e tomamos como exemplo a aprendizagem da língua materna. Todo o mundo sabe que as que vivem num meio onde se fala uma língua rica, são capazes de construir, de elaborar uma língua rica. Nós procuramos demonstrar ao longo das nossas pesquisas teóricas (Bibliografia: "Construction des mathématiques". Pensée et structure", "Comprendre la mathématique" que mergulhar as crianças em águas profundas" facilita seu processo de abstração no qual fomos levados a distinguir seis etapas diferentes às quais pensamos ser necessário levar em conta na organização do ensino de matemática, se desejarmos que todas as crianças aprendam, isto é, se quisermos evitar de fechar a porta das ciências matemáticas a um grande número, como foi o caso no passado e como acontece ainda na maior parte dos casos.

#### 1ª ETAPA : JOGOS PRELIMINARES

A noção de ambiente nos parece fundamental, porque, em certo sentido, toda a aprendizagem equivale a um processo de adaptação do organismo ao seu ambiente. Dizer de uma criança, de um adulto ou mesmo de animal, ou de uma maneira mais geral de um organismo qualquer, que aprendeu qualquer coisa, significa que este organismo, este adulto ou esta criança pode modificar seu comportamento em relação a um determinado ambiente. Na fase que precede a aprendizagem, o organismo está mal adaptado a uma determinada situação, a um determinado ambiente, mas graças à aprendizagem o organismo pode se adaptar ao ponto de indivíduo se tornar capaz de dominar as situações que ele encontra neste ambiente, é o que os pedagogos designam, de uma maneira geral, pelo nome de aprendizagem.

Para ser mais preciso, a adaptação tem lugar numa fase que podemos chamar de FASE DO JOGO LIVRE. Todos os jogos infantis representam uma espécie de exercício que permite à criança se adaptar às situações que ela irá encontrar na sua vida futura. Ora, se nos propomos a fazer a criança aprender a lógica, parece necessário fazê-la confrontar-se com situações que a conduzirão a formar os conceitos lógicos. Para a aprendizagem destes conceitos, forçoso nos é reconhecer que de uma maneira geral, o ambiente no qual a criança vive não comporta ATRIBUTOS que nós consideramos como Lógicos. Portanto, é necessário inventar um ambiente artificial. Em contato com este ambiente, a criança será conduzida pouco a pouco a formar os conceitos lógicos de uma maneira mais ou menos sistemática. O exemplo de um tal ambiente pode, por exemplo, compreender o universo dos blocos lógicos. Um jogo de blocos lógicos se compõe de muitas peças em madeira ou plástico, onde variam sistematicamente as seguintes variáveis: a cor, a forma, a espessura e o tamanho. Evidentemente, não é necessário aprender a estas quatro variáveis. Podemos igualmente fazer outras. Se desejarmos que a criança faça os seus primeiros passos em direção à aprendizagem das noções relativas ao conceito de potência, é necessário colocá-la num ambiente favorável a esta aprendizagem. Um tal ambiente poderia ser constituído pelos jogos Multibase nas quais, segundo cada base, fornecemos um certo número de objetos cujo volume ou superfície vão aumentando em relação à base escolhida.

Se escolhermos a base 3, será necessário fornecer uma peça que se tomará como unidade, em seguida outras peças cujo volume será três vezes aquele da unidade, assim sucessivamente. Através de uma interação livre com este material, a criança fará seus primeiros passos em direção à aprendizagem das propriedades das potências.

Poderíamos dar um grande número de exemplos semelhantes para mostrar como se pode criar um ambiente artificial para a aprendizagem de um conjunto qualquer de noções matemáticas.

## 2ª ETAPA: JOGOS ESTRUTURADOS

Após um certo período de adaptação, isto é, de jogo a criança se dará conta das restrições da situação. Há certas coisas que não se pode fazer. Há certas condições que é necessário satisfazer antes de poder atingir certos objetivos. A criança se dá conta das regularidades impostas à situação. Neste momento, quando a criança se depara com estas restrições dando-se conta delas, ela estará pronta para jogar com as restrições que lhe serão artificialmente colocadas. As restrições se chamam: AS REGRAS DO JOGO.

Quando se joga xadrês, é totalmente arbitrário que / certas peças tenham certas propriedades no jogo. Estas propriedades não dependem de nenhuma maneira da forma ou de outras propriedades físicas das peças.

Da mesma maneira, nós podemos sugerir jogos com regras

às crianças. Após algum tempo de jogo, as crianças mesmas poderão inventar outras regras, mudar e jogar os jogos correspondentes. Evidentemente, se desejarmos que as crianças aprendam as estruturas matemáticas os conjuntos de regras que sugeriremos estarão de acordo com as estruturas matemáticas pertinentes.

Os jogos se realizarão utilizando certos materiais estruturados adequados ao conceito que se pretende trabalhar com as crianças.

### 3ª ETAPA : COMPARAÇÃO DE JOGOS

Evidentemente, jogar jogos estruturados segundo as leis matemáticas inerentes a uma estrutura matemática qualquer, não é aprender matemática. Como as crianças podem extrair do conjunto destes jogos as abstrações matemáticas subjacentes? O meio psicológico é fazê-las jogar jogos que possuem a mesma estrutura, mas que têm uma aparência muito diferente para as crianças. Assim, a criança será levada a descobrir as ligações de natureza abstrata que existe entre os elementos de outro jogo, de estruturas idênticas. É o que nós chamamos de JOGOS de DICIONÁRIO: ou se desejarem utilizar um termo matemático: os jogos de ISOMORFISMO. Assim, a criança separa a estrutura comum dos jogos e se desembaraça das partes não pertinentes. Por exemplo, as propriedades dos blocos lógicos que não são pertinentes são a utilização das cores, das formas, etc..

Podemos utilizar outras propriedades, podemos mesmo utilizar conjuntos de conjuntos e considerar as propriedades dos conjuntos em lugar das propriedades dos objetos. Também não é essencial que haja um certo número determinado de valores para cada tributo que se introduziu no jogo. O importante é que haja muitos atributos, que cada um destes atributos tenha muitos valores e que a criança possa manipular estas variáveis, escolhendo os conjuntos de blocos, e os conjuntos de conjuntos, ou em geral, os conjuntos de elementos quaisquer, de maneira que os elementos possam ser distinguidos uns dos outros pela percepção da criança. Assim os jogos jogados com uma concretização serão identificados sob o ponto de vista da estruturas. É neste momento que a criança se dará conta de que é "semelhante" nos diferentes jogos realizados, isto é, a criança, encontrando esta semelhança, terá realizado uma ABSTRAÇÃO.

### 4ª ETAPA: REPRESENTAÇÃO da ABSTRAÇÃO

É claro que a criança ainda não estará apta para abstração, porque ela ainda não está fixado em seu espírito. Antes de tomar plena consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo da representação.

Esta representação lhe permitirá falar daquilo, que que abstraiu de olhar de fora, de sair do jogo, ou do conjunto de jogos, examinar os jogos e de refletir sobre seu conteúdo. Uma tal representação pode ser um conjunto de gráficos, um sistema cartesiano, um

4.  
um diagrama de Venn ou qualquer outra representação visual ou auditiva no caso das crianças que não pensam essencialmente de uma maneira visual.

#### 5ª ETAPA DESCRIÇÃO das PROPRIEDADES -SIMBOLIZAÇÃO

Após a introdução de uma representação, ou mesma de muitas representações da mesma estrutura, será possível examinar essa representação. O objetivo deste exame é dar-se contas das propriedades da abstração realizada. Numa representação podemos facilmente nos dar conta das propriedades principais do ser matemático que acabamos de abstrair. Isto significa que é necessário, nesta etapa uma descrição da representação realizada. Para uma descrição, é necessário e evidentemente, uma linguagem. É por isso que a constatação das propriedades da subtração, nesta 5ª etapa, deve ser acompanhada pela invenção de uma linguagem e a descrição da representação a partir da linguagem inventada. É melhor, se possível, que a criança invente sua própria linguagem e que, mais tarde, as crianças auxiliadas pelo professor, discutam entre elas se uma das linguagens introduzidas é mais vantajosa que as outras.

Esta descrição formará a base de um sistema de axiomas. Cada parte de descrição poderá servir de axioma ou mesmo, mais tarde, de teorema.

#### 6ª ETAPA:

A maior parte das estruturas matemáticas são tão complexas que elas possuem um número infinito de propriedades. É impossível citar todas as propriedades numa descrição do sistema que se engendrou.

Portanto é necessário de certa maneira encerrar a descrição num domínio finito, número finito de palavras. Isto quer dizer que precisamos de um método para chegar a certas partes da descrição, sendo dada uma primeira parte que tomamos como ponto de partida. Estes métodos para chegar a outras partes da descrição são as REGRAS DO JOGO DE DEMONSTRAÇÃO.

As descrições posteriores, às quais chegaremos, serão chamadas de "TEOREMAS DO SISTEMA". Inventamos, assim um sistema formal no qual há AXIOMAS, isto é a primeira parte da descrição e as REGRAS DO JOGO. Poderá haver outras que serão as REGRAS LÓGICO-MATEMÁTICAS da demonstração.

Após, haverá os teoremas do sistema que são as partes da descrição às quais se chega a partir da descrição inicial, utilizando as regras do jogo.

## CONCLUSÕES

### RESUMO DAS ETAPAS:

A primeira etapa introduz o indivíduo no ambiente que é construído expressamente para que certas estruturas matemáticas possam ser retiradas. A primeira adaptação a este ambiente se chama "Jogo Livre".

Em segundo lugar, há a etapa dos jogos estruturados. Regularidades que foram descobertas pela criança em seu ambiente levam-na à possibilidade de examinar jogos. Um jogo tem início, regras e um fim. As regras representam as dificuldades nas situações matemáticas, como em toda situação cotidiana ou científica. Manipular as dificuldades de uma situação é dominar a situação na qual as dificuldades existem.

Essas dificuldades podem ser naturais ou artificiais.

Terceira etapa. Aqui o indivíduo se dá conta da estrutura comum dos jogos estruturados já jogados.

Quarta etapa. A estrutura comum é representada de uma maneira gráfica ou de outra. O indivíduo se torna capaz de substituir (reemplir) a representação vazia pelos estados e os operadores particulares de um jogo particular da estrutura em questão.

Quinta etapa: Aqui se estudam as propriedades da representação, isto é, as propriedades da abstração atingida. Com este fim é preciso inventar uma linguagem.

Sexta etapa: Sendo dado que todas as propriedades não podem ser descritas numa descrição, toma-se um número mínimo e se inventa um processo para se deduzir outras. Este número mínimo de descrições chama-se "os axiomas". O processo para se deduzir outros chama-se uma demonstração e as propriedades posteriores chama-se Teoremas.

A manipulação de um tal sistema, chamado sistema formal, é a meta final da aprendizagem matemática de uma estrutura.

Na pedagogia tradicional, se agia exatamente em sentido inverso. Introduzia-se um sistema formal por meio de símbolos. Nos damos conta de que a criança não é capaz de compreender tal sistema, por consequência, utilizamos meios audiovisuais para fazê-la compreender. Quer dizer que, a partir da etapa do simbolismo, passamos à etapa da representação.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P.

Trad. A.B.Krebs

LES SIX ÉTAPES DU PROCESSUS

D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUE

I - DESCRIPÇÃO DAS ETAPAS

O que é compreender? O que é aprender? É preciso confessar que para essas duas perguntas nós ainda não temos respostas cientificamente satisfatórias. Se é verdade que ninguém mais duvida, hoje em dia, que tanto sobre o plano da compreensão como o da aprendizagem posterior, representa muitas vezes, bloqueios, resta provar quais são os elementos constitutivos do processo de aprendizagem, digno deste nome.

Partimos do teorema da existência segundo o qual é a partir de um ambiente rico que a criança pode construir seus conhecimentos, e, vamos tomar como modelo a aprendizagem da língua materna. Todo mundo sabe que as crianças que vivem num meio onde se fala uma língua rica são capazes de construir, de elaborar uma língua rica (riqueza de recursos sintáticos e de vocabulário). Temos mostrado, ao longo de nossas pesquisas, ao mesmo tempo, teóricas e práticas (Construction des mathématiques - Dienes - P.U.F. - Pensée et structure; Comprendre la mathématique - Dienes - O.D.D.L.) que "mergulhar a criança em água profunda" facilita seu processo de aprendizagem, isto é, ao mesmo tempo o processo de abstração, de generalização e de transferência.

Nossos trabalhos posteriores nos permitiram analisar mais de perto o processo de abstração no qual nós fomos levados a distinguir seis etapas diferentes. O estudo que queremos aqui apresentar e ilustrar com exemplos tomados de empréstimo à lógica e à geometria refere-se a essas diferentes etapas, as quais evidentemente, é preciso levar em conta na organização do ensino matemático, se quisermos que todas as crianças ao chegarem, isto é, se quisermos evitar de fechar a porta das ciências matemáticas a maior número, como foi o caso no passado e, como, em grande parte, ainda é o caso presentemente.

PRIMEIRA ETAPA

A noção de ambiente nos parece fundamental porque, em certo sentido, toda aprendizagem equivale a um processo de adaptação do organismo a seu ambiente. Dizer de uma criança, de um adulto ou mesmo de um animal, ou, de um modo geral, de um organismo qualquer que aprendeu alguma coisa significa que este organismo, este adulto ou esta criança modificou seu comportamento em relação a um determinado ambiente. Na fase que precede a aprendizagem, o organismo está mal adaptado a uma determinada situação, a um determinado ambiente, mas, graças à aprendizagem o organismo pode se adaptar a ponto do indivíduo se tornar capaz de dominar as situações que ele encontra neste ambiente. Se levamos em conta este aspecto da adaptação que representa toda aprendizagem, parece razoável apresentar à criança um ambiente ao qual ela possa se adaptar. Este processo de adaptação a um ambiente é o que os pedagogos designam de um modo geral,

sob o nome de aprendizagem.

Para ser mais preciso, a adaptação tem lugar numa fase que podemos designar por fase do jogo livre. Todos os jogos infantís re-  
presentam uma espécie de exercício que permite à criança se adaptar  
às situações que ela terá de encontrar em sua vida futura. Ora, se  
nos propomos a fazer a criança aprender lógica, parece necessário  
defrontá-la com situações que a conduzirão a formar conceitos lógi-  
cos. Se conservamos este exemplo da lógica, é forçoso reconhecer que  
que de um modo geral o ambiente no qual vive a criança não comporta  
atributos que nós consideramos como lógicos. É preciso, então, inven-  
tar um ambiente artificial. Ao contacto desse ambiente a criança,  
pouco a pouco, será levada a formar conceitos lógicos de um modo ma-  
is ou menos sistemático. O exemplo de um tal ambiente pode, por exem-  
plo, compreender o universo dos blocos lógicos. Um jogo de blocos  
lógicos se compõe de várias peças de madeira ou de plástico onde se  
faz variar sistematicamente as seguintes variáveis: a cor, a forma,  
a espessura e o tamanho. Evidentemente, não é necessário se ater a  
essas quatro variáveis. Pode-se, igualmente, fazer variar outras. Se  
quisermos que a criança faça seus primeiros passos para a aprendiza-  
gem de noções concernentes ao conceito de potência é aconselhável  
colocá-la num ambiente correspondente. Um tal ambiente pode ser cons-  
tituído pelos jogos Multibases, onde, segundo cada base, fornecemos  
um certo número de objetos cujo volume ou a superfície vão crescen-  
do em relação à base escolhida. Se escolhemos a base 3 é preciso  
prover uma peça que se toma por unidade, em seguida, outros pedaços  
cujo volume será três vezes o da unidade, a seguir outras peças cujo  
volume será nove vezes o da unidade e, assim por diante. Por uma li-  
vre interação com este material, a criança fará seus primeiros pas-  
sos para a aprendizagem das propriedades das potências. Poderíamos  
dar um grande número de exemplos semelhantes para mostrar como se  
pode criar um ambiente artificial para a aprendizagem de um conjun-  
to qualquer de noções matemáticas.

## SEGUNDA ETAPA

Após um certo período de adaptação, isto é, de jogo, a cri-  
ança se dá conta das exigências, restrições da situação. Há certas  
coisas que não se pode fazer. Há certas condições que é preciso sa-  
tisfazer antes de poder atingir certos fins. A criança se dá conta  
das regularidades impostas à situação. Neste momento, está pronta a  
jogar com as restrições que lhe serão artificialmente impostas. Es-  
tas restrições chamam-se: as regras do jogo.

Quando se joga xadrez é totalmente arbitrário que certas  
peças tenham certas propriedades no jogo. Estas propriedades não de-  
pendem em nada da forma ou de outras propriedades físicas das peças.  
Do mesmo modo, pode-se sugerir às crianças jogos com regras: as pró-  
prias crianças poderão, a seguir, inventar outras regras, trocar as  
regras e, jogar os jogos correspondentes. Assim, elas se habituarão  
com a manipulação de regularidades. Evidentemente, se queremos que  
a criança aprenda estruturas matemáticas, os conjuntos de regras que  
vamos sugerir serão sobre estruturas matemáticas pertinentes. Os jo-  
gos se farão por meio de certos materiais estruturados como aqueles  
indicados acima.

### TERCEIRA ETAPA

Evidentemente, jogar os jogos estruturados segundo leis matemáticas inerentes à uma estrutura matemática qualquer não é aprender matemática. Como pode a criança extrair do conjunto desses jogos as abstrações matemáticas subjacentes? O meio psicológico é fazer jogar jogos que possuam a mesma estrutura mas que tenham uma aparência muito diferente para a criança. Assim, a criança será levada a descobrir as ligações de natureza abstrata que existem entre os elementos de um jogo e os elementos de outro jogo de estruturas idênticas. É o que nós chamamos jogos de dicionário ou, se quisermos utilizar um termo matemático: jogos de isomorfismo. Assim, a criança destaca a estrutura comum dos jogos e se desembaraça das partes não pertinentes. Por exemplo, as propriedades dos blocos lógicos que não são pertinentes são a utilização das cores, das formas, etc... Poderíamos utilizar outras propriedades, poderíamos mesmo, tomar conjuntos de objetos e considerar as propriedades dos conjuntos em lugar de propriedades dos objetos. Nem mesmo é essencial que tenha um certo número determinado de valores para uma ou outra das variáveis que introduzimos no jogo. O que é importante é que há várias variáveis, que cada uma dessas variáveis tem muitos valores e que a criança possa manipular e essas variáveis escolhendo os conjuntos de blocos, conjuntos de conjuntos ou, de modo geral conjuntos de elementos quaisquer, de modo que os elementos possam ser distinguidos uns dos outros, pela percepção da criança. Assim, os jogos jogados com uma concretização depois a seguir com uma outra concretização, serão identificados do ponto de vista das estruturas. É neste momento que a criança se dá conta de que é "semelhante" nos diversos jogos que praticou, isto é, que ela terá realizado uma "abstração".

### QUARTA ETAPA

De certo, a criança ainda não é capaz de se utilizar desta abstração porque ela ainda não está fixada em seu espírito. Antes de tomar plenamente consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo de representação. Uma tal representação lhe permitirá falar do que ela abstraiu, de olhar ao redor, de sair do jogo, ou do conjunto de jogos, de examinar os jogos e de refletir sobre o seu assunto. Uma tal representação pode ser um conjunto de gráficos, pode ser um sistema cartesiano, pode ser um diagrama de Venn, ou qualquer outra representação visual ou mesmo auditiva, no caso de crianças que não pensam essencialmente de uma maneira visual.

### QUINTA ETAPA

Após a introdução de uma representação, ou mesmo de muitas representações da mesma estrutura, será possível examinar esta representação. A finalidade deste exame é dar-se conta das propriedades da abstração realizada. Numa representação pode-se, facilmente, dar-se conta das principais propriedades do ser matemático que se criou. Isto significa que nesta etapa precisamos de uma descrição do que representamos. Para uma descrição é preciso, evidentemente, uma linguagem, e é por isso que a realização de propriedades de abstração nesta quinta etapa deve ser acompanhada pela invenção de uma linguagem e, à descrição da representação, a partir dessa linguagem inventada. Será melhor, se possível, que a criança invente sua própria linguagem e que mais tarde, as crianças com a ajuda do professor, discutam



entre elas se uma das linguagens introduzidas é mais vantajosa do que as outras. Uma tal descrição formará a base de um sistema de axiomas. Cada parte da descrição poderá servir de axioma ou mesmo, mais tarde, de teorema.

#### SEXTA ETAPA

A maior parte das estruturas matemáticas são tão complexas que possuem um número infinito de propriedades. É impossível citar todas essas propriedades numa descrição do sistema que se engendrou. É preciso, então, de certo modo encerrar a descrição num domínio finito, em um número finito de palavras. Isto quer dizer que precisamos de um método para chegar a certas partes da descrição sendo dada uma primeira parte que tomamos como ponto de partida. Esses métodos para chegar a outras partes da descrição serão nossas regras do jogo de demonstração. As descrições posteriores às quais nós chegaremos serão chamadas os "teoremas do sistema". Assim, inventamos um sistema formal no qual há axiomas, isto é, a primeira parte da descrição e, as regras do jogo. Poderá haver outras que serão regras lógico-matemáticas da demonstração. A seguir haverá teoremas de sistema que são partes da descrição às quais se chega a partir da descrição inicial, utilizando as re

tação. Encontramos, ainda, que a criança não é capaz de aplicar os conceitos, mesmo depois de auxílios audiovisuais; por consequência é preciso ensinar-lhe as aplicações na realidade.

Finalmente, chegamos à realidade de onde devíamos partir. Assim, no ensino tradicional, a direção da aprendizagem era exatamente o contrário da proposta nestas páginas.