Laboratório de Matemática

10/10/78

Instituto Nacional de Estudos
e Pesquisas Educacionais
(INEP)

Grupo de Estudos sobre o Ensino
da Matemática de Porto Alegre

(GEEMPA)

Classe-Piloto - 6ª série

Instituto de Educação General Flores da Cunha

1 9 7 6

Esquema dos conteudos de 1976

Previsão dos conteudos para 1977 e 1978

Unidade sobre Transformações Geométricas - quadro teórico
plano

Unidade sobre Medida - quadro teórico
plano

Esquema de conteudos matemáticos para 6ª série - Projeto INEP-GEEMPA

Classe-piloto - I.E. Gen. Flores da Cunha - 1976

TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

SIMETRIAS TRANSLAÇÕES ROTAÇÕES HOMOTETIAS

combinatória

MEDIDAS

Comprimento	Superfície	Volume (capacidade)	Ângulo	Massa	Tempo
			tipos soma dos ângulos internos de polígonos		

Frações ordinárias e decimais

RELAÇÕES

LÓGICA

Propriedades:
- Reflexiva
- Simétrica
- Anti-simétrica
- Transitiva

Equivalências

Ordens:
- totais
- parciais

Funções:
- injetoras
- sobrejetoras
- bijetoras

NUMERO CARDINAL

CONSTRUÇÃO DOS NUMEROS INTEIROS $\mathbb{Z}$

Adição
Subtração
Multiplicação
Divisão

PROJETO INEP - GEEMPA - Classe Piloto - 6ª série

I.E. General Flores da Cunha

PREVISÃO DE CONTEÚDOS PARA 1977 e 1978.

Prática das Operações +, -, x, : com números inteiros (Z)

Potenciação, Radiciação e Logarítmos

Análise de suas Propriedades

Ordem em Z

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS (Q)

Operações em Q e suas propriedades

Isomorfismo entre números Racionais e partes de um Inteiro (Frações)

Ordem em Q

PROPORCIONALIDADE

Direta e Inversa; propriedades das proporções;

regra de três; juros, percentagem;

teorema de Tales.

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS

Estrutura dos Reais

CÁLCULO LITERAL: Polinômios

Fatoração: Produtos Notáveis

Equações (1º e 2º grau)

Sistemas de Equações

RELAÇÕES MÉTRICAS NOS TRIÂNGULOS

Teorema de Pitágoras.

INEP - GEEMPA - 6ª série - I.E. General Flores da Cunha.

QUADRO TEÓRICO DA UNIDADE SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÈTRICAS.

Constata-se desde alguns anos um mal-estar crescente entre aqueles que tem por obrigação o ensino da Geometria Elementar. Todos tomam consciência de que as coisas não estão boas nem nos livros nem no que a tradição [illegible] nos legou de passado.

Gustave Choquet, 1965.

A Geometria é a exploração do espaço. Uma criança, desde seu nascimento explora o espaço.

Quando ela chega à escola, algumas destas explorações já estão a bom caminho: é preciso encorajá-las e extendê-las, multiplicando as experiências a serem oferecidas aos alunos, a fim de que eles construam conceitos relativos ao espaço. Contudo, lembremo-nos, sempre que conceitos não se ensinam - tudo o que se pode fazer é criar, apresentar situações e experiências que ajudarão os alunos a formá-los.

Dienes, 1966.

O pensamento geométrico é um estágio impossível de ser omitido no desenvolvimento normal da atividade racional do homem.

Se alguém tiver ao menos alguma consciência, ele terá consciência do tempo e do espaço; a continuidade geométrica está, de alguma forma, inseparávelmente ligada ao pensamento consciente.

Os problemas da geometria requerem uma combinação de tempo e esforço, concentração e poder de associação de que poucos alunos são capazes.

Para julgar completamente as capacidades de um estudante, é necessário colocá-lo em atividade e apelar continuamente para sua iniciativa individual e seu espírito de criatividade. Nada disso pode ser concebido no âmbito de estudos "úteis", onde todos os elementos, incluídos por causa de sua utilidade técnica, são ensinados dogmáticamente e onde a excelência do ensino é definida como a rápida e exata memorização dos assuntos dados. Apenas aqueles tópicos com uma qualidade de "brinquedo", de "jogo", têm valor educativo, e dentre todos esses jogos, a geometria euclidiana é a menos gratuita e a mais rica em significado, em vista de suas constantes referências aos fundamentos subjacentes - entendidos intuitivamente.

René Thom, 1971.

O estudo do desenvolvimento da noção de espaço ou das inumeráveis noções que interferem na representação de espaço - se impõe por muitas razões na psicologia da criança.

Primeiramente, é claro que na medida em que a evolução das diversas formas do pensamento da criança tem condições de nos informar sobre o mecanismo da inteligência e sobre a formação da razão humana em geral, <u>o problema do espaço</u> apresenta uma importância de primeiro plano.

Piaget, 1972.

A Geometria ocupa um lugar previlegiado na história das idéias.

Battro, 1974.

Um mecanismo operatório tal como o mecanismo necessário para a aprendizagem da medida se apoia sobre operações mais elementares, das quais ele constitui a síntese, e entre outros sobre a coordenação dos deslocamentos.

Piaget, 1973.

A métrica euclidiana repousa sobre a noção de deslocamento e os deslocamentos constituem matemáticamente um "grupo" tal que eles possam ser representados num espaço a três dimensões estruturado por um sistema de coordenados.

Piaget, 1973.

Os deslocamentos são os resultados das composições de pares de simetrias istoé, as translações e rotações, incluindo a transformação idêntica.

Papy, 1967.

Tenho dúvidas se os estudantes estão aprendendo mais hoje do que aprendiam há dez anos atrás. Eu me pergunto se o aumento de produtividade que se verifica na vida econômica também ocorre no Ensino. Tenho a impressão de que a resposta seria negativa: assim como nos Estados Unidos, aqui também não se está investindo o suficiente em pesquisa básica e no desenvolvimento de novos procedimentos educacionais. Não acredito que possamos melhorar o nível da educação gastando todo nosso esforço e dinheiro com o aumento de escolas e contratação de novos professores. Tenho a impressão de que vocês conseguiram colocar mais gente para dentro das escolas, estendendo as oportunidades educacionais para um número maior de pessoas. Mas se estes mesmos estudantes estão recebendo uma educação mais efetiva e produtiva, é algo que me pergunto, eu também me questiono acerca da parcela das reformas educacionais que estão sendo postas em prática, dentre aquilo que está no papel. Não há dúvidas, no entanto, que o sistema educacional brasileiro evidencia sinais de vitalidade: ele quer se reformar, quer tornar-se melhor. Eu só acho que para isto muita pesquisa tem que ser feita. A indústria e a Agricultura nos Estados Unidos gastam de 5 a 10 por cento de seus investimentos em pesquisa (enquanto que a Educação gasta 0,5 %), sem o que estes dois setores não poderiam crescer como crescem. Creio ser esta a grande lição que ainda temos que aprender."

Robert Bush, 1974.

O objetivo da geometria elementar permanece sempre o mesmo: é o espaço euclidiano a três dimensões (e seus sub-espaços) . O que mudou consideràvelmente nos últimos 50 anos, é a maneira de descrever a estrutura deste espaço e a partir dela generalizar certos aspectos.

Como ponto de partida, podemos tomar os "Grundlagen de Geometrie" de Hilbert. Seus termos não definidos e sua maneira de agrupar os axiomas mostram uma fenomenologia da Geometria que se pode considerar clássica. Ele remonta há muitos anos atrás na história da matemática, desde Euclides e seus predecessores. Na abordagem de Hilbert os termos não definidos são: o ponto, a reta, o plano, a relação de incidência, a relação de intermediaridade eaa relação de congruência. Os axiomas são divididos em grupos segundo o plano seguinte:

I - Incidê ncia

II - Ordem

III - Congruência

IV - Paralelismo

A axiomática de Hilbert foi a primeira axiomatização completa (monomorfa) da Geometria euclidiana. A partir de lá, Hilbert, analisando a relação entre a Geometria sintática e analítica obteve o resultado seguinte:

1- Pode-se considerar a geometria analítica tradicional nos Números Reais como um modelo das axiomas de Hilbert. Por causa da propriedade de monomorfia deste sistema axiomático, este modelo éisomorfo a qualquer outro.

2- Pode-se construir os Números Reais a partir dos fundamentos sintéticos da Geometria de modo que todo modelo possa ser parametrizado intrínsicamente. Isto constitui a aritmetização da Geometria que Hilbert realizou introduzindo seu cálculo dos segmentos de reta. Nesta ordem de idéias, o papel dos teoremas de Desargues e de Pappus Pascal é bem conhecido.

No século XX novas maneiras de organizar e de estruturar a geometria foram desenvolvidas, se bem que muitas das idéias fundamentais remontem já ao século XIX:

a- O paralelismo estando na base de um conceito de incidência, pode-se acrescentar a axioma do paralelismo forte ao primeiro grupo dos axiomas de Hilbert.

Este ponto de vista nasceu com Wiener e foi desenvolvido por Bachmann e sua escala em Kiel.

g- Do ponto de vista vetorial, o problema de congruência estáligado à introdução de um produto escalar. Na discussão do problema de metrização deum espaço vetorial se cai naturalmente sobre as formas bilineares e as quadráticas associada (secções cônicas). Em termos de uma métrica do espaço euclidiano pode ser olhado como um espaço vetorial tri-dimensional sobre os reais munido de uma métrica (euclidiana).

h- Há outras maneiras de abordar a Geometria euclidiana a partir de teorias e de conseitos como os de espaço topológico, de espaço métrico, etc... pelos quais a geometria euclidiana se insere em outras teorias mais gerais. Devemos assinalar aqui de uma forma particular o que se chama a geometria de distância.

As correntes de idéias que acabamos de descrever influenciaram a pedagogia da geometria e conduziram ou estão em vias de conduzir a novos programas para o ensino de geometria nas escolas. No que segue, vamos discutir algumas das correntes mais significativas da reforma da geometria escolar. Parece-nos adequado fazer esta discussão em três níveis:

1- A pré-geometria; 2- Ageometria intuitiva; 3- A geometria axiomática e sistematizada. Os dois últimos níveis estão intimamente ligados um ao outro, sobretudo se se considera o desenvolvimento do sistema axiomático como um processo de matematização de fatos intuitivos. Trataremos pois simultaneamente destes níveis quando tratarmos de certos aspectos de geometria escolar moderna, tais como, geometria de incidênsia e afim, ordem e números, geometria das transformações, álgebra linear e geometria vetorial.

PRÉ GEOMETRIA NA ESCOLA PRIMÁRIA:

Uma característica importante de pedagogia moderna de matemática consiste na liberação de um dogmatismo que foi falsamente associado à matemática enquanto ciência. Não é em direção ao livro de Euclides ou seu sistema axiomático que se deveria orientar o primeiro ensino da geometria, mas antes em direção à exploração do espaço pela criança.

Isto conduz ao conceito de <u>espaço afim</u> (ou de plano afim), do qual existe entre outros, modelos finitos, a maior parte dentre eles (exceção feita dos planos) são ligados aos corpos finitos da mesma maneira que a Geometria euclidiana o é ao corpo dos Números Reais.

b- As transformações naturais dos espaços e dos planos são as translações que constituem um grupo. Para todos os espaços afins e muitos planos afins, existe um corpo de coordenadas de modo que o Grupo de translações seja um <u>espaço vetorial</u> sobre este corpo. Pode-se então descrever inteiramente a estrutura afim por meio de estrutura de espaço vetorial.

c- Pode-se efetuar a aritmetização de um espaço ou de um plano afim por um outro método diferente do de Hilbert seguinte uma abordagem algébrica agradável devida a Artin estuda-se o anel dos endomorfismos do grupo das translações que é constituido principalmente de dilatações do espaço ou do plano afim. Se os teoremas de Desargues ou de Pappus-Pascal são válidos para a estrutura afim, pode-se isolar num anel dos endomorfismos um corpo que pode servir de corpos escalares.

d- Pode-se reconduzir a intermediaridade a uma ordem total sobre as retas. Esta ordem, do ponto de vista vetorial se reencontra na ordem total do corpo das escalares.

e- Nos espaços munidos de uma relação de incidência de Hilbert (estes espaços não são necessàriamente afins nem ordenados), a relação de congruência pode ser definida a partir de aplicações chamadas isometrias. No lugar de axiomas de congruência, dá-se uma caracterização axiomática do grupo das isometrias como sub-grupo do grupo dos automorfismos do espaço de incidência dado. É um aspecto novo da idéia de Félix Klein de caracterizar as geometrias por meio dos grupos de transformações.

f- No plano o grupo das isometrias é gerado pelas simetrias centrais e axiais. Como exite uma correspondência biunívoca entre estes geradores e seus conjuntos de pontos fixos (ponto e reta respectivamente) e como se pode exprimir as relações de incidência utilizando sòmente estas aplicações, uma geometria absoluta pode ser construída fazendo apelo a um grupo abstrato chamado o grupo do plano.

Esta exploração começa desde o nascimento, na escola ela devia ser prosseguida, encorajada e não cortada. Nos primeiros anos, não se deveria ensinar conceitos mas ensinar a partir de situações concretas e visar o desenvolvimento dos conceitos.

Neste tópico, pré- geometria, são tratados na obra de Steiner os seguintes aspectos:

a- Topologia.

b- Domínio convexo.

c- Sólidos geométricos. (Dava-se muita importância no ensino tradicional da Geometria às figuras planas e se esquecia quase completamente as formas e os corpos sólidos)

d- Expressão da congruência em termos de transformação

e- Medida.

Os quais em virtude de sua extensão não são traduzidos aqui. Parte do capítulo Medida aparece no quadro teórico qque embasa a unidade deste nome.

Omitimos neste quadro teórico, tudo o que segue na obra de Steiner sobre Geometria da Incidência e afim, ordem e números, geometria das transformações álgebra linear e geometria vetorial, pelo seu caráter técnico, mas recomendamos seu estudo a professoresde matemática e pedagogos.

BIBLIOGRAFIA

DIENES, Z e GOLDING, E - Les Premiers pas en Mathématique: Exploration de l'espace e pratique de la mesure - OCDL - Paris, 1966.

PIAGET e INHELDER - La representation de l'espace chez l'enfant - PUF - Paris, 1972

PIAGET, INHELDER e SZEMINOKA - La Geometrie spontanée de L'enfant - PUF- Paris, 1973.

PAPY - Mathématique Moderne - 3- Didier - Bruxelles, 1967

GUTTEGNA, PIAGET, BETH, DIUDONNÉ, LICHNEROWICZ, CHOQUET - L'enseignement des mathématique - Delachaux et Mistlé - Paris, 1965.

STEINER, H - La geometrie dans les programmes scolaires - Regional Seminar, Cairo, UNESCO, 1970.

BUSH, R - Correio do Povo - Março de 1974.

PLANO DA UNIDADE DIDÁTICA SOBRE TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

	Problema	Atividade	Material
SIMETRIA	Como determinar eixos de simetria de figuras planas ?	Construir tetraminós e pentaminós. Encontrar critérios de classificação dos mesmos, entre elês, o número de eixos de simetria. Coloc-álos em três tabuleiros, cujas dimensões são previstas para que se deva utilizar todos os pentaminós, sem sobrar nenhum espaço vazio. Para obter esta colocação, é necessário muito domínio do espaço, tanto no aspecto estimativa de medidas de superfície como no das transformações (tentativas de rotações, simetrias e translações). Construir novas figuras utilizando a simetria em outras	Papel quadriculado Pentaminós em madeira Tabuleiros para colocação "Mirror Cards" - Cartões para espelhos. São 24 conjuntos de cartões, importados dos EEUU, que, com dificuldade crescente, exigem determinação de eixos de simetria para formação de figuras pedidas, utilizando um espelho
	Como determinar planos de simetria em sólidos ?	Classificar sólidos geométricos, a partir do número de planos de simetria. Construir nove cubos em argila e marcar em cada um deles um plano de simetria.	Sólidos geométricos. Argila.
	Como representar rotações e simetrias em um mapa ?	Determinar percursos nos mapas. Classificá-los. Determinar o percurso mais curto numa classe de equivalência. Determinar os percursos geradores de todos os outros. Compor percursos.	Mapas das simetrias e das rotações do quadrado e do triângulo equilátero.
	Como representar simetrias num sistema de coordenadas ?	Distribuir organizadamente os pequenos objetos no triangulado ou no quadriculado de modo que cada uma de suas regiões fique perfeitamente caracterizada. (Nota: esta atividade é preparadora da construção dos números inteiros - positivos e negativos) Associar simetrias e rotações com as transformações das cores e dos tipos de objetos no triangulado e no quadriculado.	Folhas de cartolina com traçados de quadriculados ou triangulados. Grande número de objetos de vários tipos e várias cores (ex.: botões circulares ou quadrados).

	Como determinar as funções algébricas associadas à simetria ?	Descobrir o eixo de simetria, de transformações tais, represen- tades num sistema de referências cartesiano ortogonal. Establecer as relações entre as coordenadas de cada figura e sua imagem por uma simetria. Realizar representações de simetrias dado o eixo. Realizar representações de simetrias dada a função transformadora. Associar simetrias às funções correspondentes. (Nota: Essas atividades de 4ª e 5ª etapas do processo também foram realizadas simultaneamente com as equivalestes para rotações, translações e homotetias, por sua riqueza de comparação e contra-exemplos).	Papel quadriculado com indicação de um sistema de referências cartesiano ortogonal. Fichas com transformações representadas num sistema cartesiano ortogonal.
R O T A Ç Ã O	Como determinar eixos de rotação de sólidos geométricos ?	Encontrar todas as posições para enfiar no tetraedro (ou no cubo) agulha de tricô, de modo que, girando o sólido em torno dela, (menos de 360º), ele volte a ocupar o mesmo espaço que antes. Essas posições são os eixos de rotação do sólido. Classificar os eixos de acordo com sua localização no sólido (passa por dois meios de face; por dois meios de arestas opostas, pelas diagonais principais...)	Tetraedros regulares Cubos Agulhas de tricô
	Como determinar centro e ângulo de rotação no plano ?	Fazer construções com quadrimates, de modo que concretizem rotações. Desenhar imagens de figuras, dados o centro e o ângulo de rotação.	Quadrimate Fichas com desenhos
	Como concretizar as vinte e quatro permutações de quatro elementos, sem repetição ?	Construir todas as torres possíveis, usando quatro cubinhos embutíveis, sem repetir cor na mesma torre. Associar cada torre a uma posição diferente do cubo. Corresponder a transformação no cubo por meio de giro em eixos de rotação e a transformação nas torres.	Cubos embutíveis de quatro cores. Cubo construido com varetas e esferas de 4 cores do material húngaro Babilon, de modo que em cada diagonal principal apareça uma cor diferente de esferas
	Como classificar e ordenar ângulos ?	Percorrer um caminho fechado traçado no chão da aula, colocando uma cadeira cada vez que o aluno se encontra bem defronte a uma das paredes da sala. Determinar o ângulo que é necessário girar para passar de uma posição à outra. (Nota: foi valorizado o ângulo reto ...	Traçado no chão, com movimentação dos próprios alunos.

		Reconhecer ângulos de um quarto de volta em traçados de papel, maiores que um quarto de volta ou menores que um quarto de volta. Caracterização de ângulos retos, agudos e obtusos. Orientar ângulos, acrescentando a discriminação à esquerda ou à direita. Ordenar os ângulos de diversos triângulos que foram recortados.	Fichas didáticas retiradas do livro "Géométrie Elementaire" (Z.P.Dienes). Triângulos desenhados em papel.
	Como medir ângulos ? Como criar unidade arbitrária de ângulos?	Cada aluno criou sua própria unidade e com ela media ângulos representados.	
	Como usar o transferidor ? O que é o grau?	Medições de ângulos usando transferidor	Transferidor
	Como associar ângulo a arcos ?	Traçado de círculos concêntricos Cada aluno ocupava uma intersecção de linha e o professor sugeria as mudanças de posição, tais como: 90º no sentido dos ponteiros do relógio; 15º mais 45º no sentido contrário dos ponteiros do relógio, etc.	Traçado no chão, de círculos concêntricos, cortados por retas que passam pelo centro. Fichas didáticas retiradas do livro "Géométrie dynamique" (Univ. of Illinois - Phillips and Zwoyer).
T R A N S L A Ç Ã O	Como identificar o fragmento do friso que se repete ? Como identificar os invariantes numa translação ?	Reproduzir frisos	Fichas dos livro de Tamas Varga - Munkalapok
	Como representar uma translação num sistema de coordenadas cartesianas ?	Realizar o que se pede nas fichas de trabalho. Por exemplo: Verificar se A é imagem de B pela translação indicada pelo vetor.	Cartões quadriculados com translações representadas. Fichas do livro "Géométrie dynamique".

	Como identificar o vetor representativo de uma translação ? Como determinar as funções algébricas associadas a uma translação representada num sistema de coordenadas cartesianas ? $x \mapsto x + a$ $y \mapsto y + b$	Dadas funções para x e y , transformar figuras a partir das coordenadas de seus pontos	Fichas com sistemas de coordenadas cartesianas com um desenho.
HOMOTETIA	Como ampliar ou reduzir uma figura, conservando uma mesma razão entre as distâncias de um ponto fixo a cada ponto imagem, com relação às distâncias dele aos pontos da figura?	Desenha uma figura e a coloca sobre este isopor. Marca um ponto no isopor com um alfinete. Une diversos pontos da tua figura com este alfinete, servindo-te dos barbantes. Constroi uma nova figura, no prolongamento das linhas retas determinadas pelos barbantes, de modo que a dist ância do ponto imagem ao alfinete central seja a metade de sua dist^ancia ao ponto correspondente na figura. Faze o mesmo, porém entre o ponto central e a figura inicial. Com nova figura, marca o ponto central fixo da redução no interior da figura. Nesta nova atividade, vais prolongar os barbantes no sentido ponto fixo, pontos da figura. Constroi uma nova figura de modo que a distância dos pontos imagens ao ponto fixo seja uma vez e meia as distâncias aos pontos da figura. O que acontece comparando as dimensões da figura e de sua imagem ?	Folha de isopor, barbantes, alfinetes.
	Como representar homotetias num sistema de coordenadas cartesianas?	Dadas várias representações de transformações em sistemas de coordenadas cartesianas, encontrar critérios de classificação. (Por exemplo: as transformações em que a imagem e o desenho dado estão no mesmo quadrante ou em quadrantes diferente; as transformações em que a imagem e o desenho inicial conservam ou não as mesmas dimensões). Solicitar que os alunos unam os pontos às suas imagens nas diversas transformações, observando o que caracteriza estas retas. Nas homotetias, essas retas sempre passam pela origem do sistema.	Papel quadriculado, régua, lápis.

	Como caracterizar a função algébrica associada à homotetia, num sistema cartesiano de coordenadas?	Porpor que os alunos analisem como se transformam as coordenadas dos pontos, numa homotetia. (Nota: o estudo das homotetias será um auxiliar valioso para a verdadeira compreensão da Proporcionalidade, conteudo importantíssimo em Matemática).	
Sistema de referência para localização de pontos no plano e no espaço Cartesiano ou não ↓ Ortogonal ou não	Como codificar pontos no plano ou no espaço ?	Realizar o que pedem as fichas	Fichas 1 e 2 e do triangulado

(Nota: este assunto foi tratado antes do estudo das transformações geométricas e muito utilizado durante a sua abordagem).

PROJETO INEP - GEEMPA

ESQUEMA DE CONTEÚDOS SOBRE A UNIDADE DE MEDIDA

A T R I B U T O S E V A L O R E S	ENTES CONTÍNUOS	Tempo MASSA ÂNGULO COMPRIMENTO SUPERFÍCIE VOLUME (capacidade)	Unidades e Sub-Unidades: arbitrárias e legais (utilização do processo iterativo) Função entre valores de atributos a medir e R Sistemas de Medir Valor de posição dos algarismos na escrita da medida. Operações com números com vírgula.

PROJETO INEP - GEEMPA

ETAPAS DE ATIVIDADES E/OU RACIONAIS NECESSÁRIAS PARA A REDESCOBERTA DAS RELAÇÕES BÁSICAS IMPLICADAS NA UNIDADE DE MEDIDA:

- Isolamento de Atributos de objeto.
- Comparação de dois valores do mesmo atributo.
- Ordenação de diversos valores de atributo.
- Igualação de valores de atributos usando um tipo de unidade.
- Medição com uma unidade arbitrária, classificando essas medições em exatas e não exatas. Estimativa.
- Comparação de resultados de medições em que foram usadas medidas diferentes para o mesmo valor de atributo de um objeto.
- Medição com unidades e sub-unidades arbritárias, estabelecendo relações entre as unidades e sub-unidades.
- Codificação das medições utilizando a vírgula.
- Criação de sistemas de medida com base.
- Utilização de sistemas legais de medir. Relações entre as unidades e sub-unidades.
- Cálculo de áreas e volumes, utilizando fórmulas.

HABILIDADES A DESENVOLVER NA UNIDADE DE MEDIDA:

- Adequar unidade ao atributo a medir.
- Adequar tamanho da unidade ao valor de atributo.
- Medir com precisão, utilizando os instrumentos adequados.
- Criar unidades arbritárias.
- Relacionar unidades de medir um mesmo atributo.
- Criar sistemas de medir.
- Codificar medidas usando vírgulas.

PROJETO INEP - GEEMPA 1976

QUADRO TEÓRICO DA UNIDADE DE MEDIDA

"Uma grande deficiência do ensino tradicional da Matemática é a forma de apresentar as medidas de comprimento, de áreas, de volume. Na maioria das vezes, nenhuma preparação à gênese dos conceitos, nem de definição conceitual é feita, mas sòmente são apresentadas fórmulas. Baseando-se sobre um conhecimento mais profundo de toda situação de aprendizagem, estão sendo concebidas novas formas de ensinar as medidas.

A importância que se dá aos domínios que contêm os elementos para os quais se quer definir uma medida constitui um aspecto importante destes novos enfoques. Estes domínios de quantidades concretas (QC) podem ser, por exemplo, segmentos de retas (materializadas por pequenos bastões) ou retângulos ou quantidades concretas de água, argila, etc. Em geral, um domínio QC apresenta duas relações, uma de equivalência $\sim$ tão comprido quanto, congruente a (ou congruente por partes a) tão pesado quanto, etc. e uma relação de pré ordem ($\lhd$) mais comprido que, maior que, mais pesado que, etc... Além disso, uma operação parcial ($\oplus$) está definida em QC (reuni-las, fazer a reunião disjunta, misturar, etc...)

As primeiras atividades das crianças devem se relacionar a estes dados e encontrar suas propriedades:

transitividade de $\sim$ e de $\lhd$

antissimetria de $\lhd$

estabilidade de $\sim$ com relação a $\oplus$ (se $A \sim B$ e $C \sim D$, então $A \oplus C \sim B \oplus D$, contanto qu $A+C$ e $B+D$ existam) etc...

É importante que as crianças façam experiências concretas com bastões, com argilas e balanças, com figuras geométricas materializadas, etc.

Com e , estamos em presença de um semi-grupo abeliano ordenado."

(Hans Georg Steiner, 1970)

Medir, em sentido matemátèco, é estabelecer uma aplicação de um conjunto qualquer sobre os números reais ou mais rigorosamente do produto cartesiano de um conjunto consigo mesmo nos números reáis, de modo que satisfaça algumas condições chamadas matemáticamente os axiomas de distância.

Pedagogicamente, entretanto, é aconselhável que se inicie a aprendizagem da medida pelos aspectos físicos de objetos, tais como o comprimento, a superfície, o volume, o peso, atemperatura, etc. Como pré-requisito, portanto o aluno deve distinguir entre sí esses atributos, por exemplo, ser capaz de isolar um aspecto de outros, ter a noção de sua conservação, sendo capaz de coordenar esquemas de ação ligados a esses atributos.

Um segundo passo será comparar valores desses atributos, chegando a estabelecer uma relação de ordem entre grandezas.

Depois, procurar-se-á equilibrar duas grandezas por justaposição.

Só apos começarão os primeiros ensaios de uma medição propriamente dita, procurando, por aproximação, equivaler uma grandeza determinada, por "x" da mesma natureza tomada como unidade.

Para chegar a uma certa precisão, surgirá a necessidade de servir-se de unidades menores e, finalmente, buscar a relação entre essas diversas unidades, criando um sistema de medir.

Então, o aluno estará em condições de por-se a par dos sistemas padronizados existentes, tendo possibilidades de usá-los com autonomia e capacidade de análise, Pode-se esperar seguramente que ele mesmo chegará às formas de áreas e perímetros, se essas fases forem bem vividas.

Medir, utilizar com correção e adequação sistemas padrões de medida, ser capaz de memorizar uma fórmula tanto quanto deduzi-la e criar uma mais econômica e efetiva, são operações indispensáveis ao homem de nossa época que deles necessita para poder observar, controlar e prever os eventos de seu meio.

Os fatos, os acontecimentos que se observa na natureza podem, de um certo ponto de vista, ser classificados em duas categorias: os que são contínuos e os que são descontínuos. Por exemplo, quando se conta quantas maçãs há numa cesta, a passagem de uma maçã que for contada à seguinte não é contínua. Não se dá o mesmo nos passos que se dá para percorrer um trecho de caminho, porque não há nenhum passo entre o primeiro e o segundo, entre o segundo e o terceiro; cada um segue o outro, em sucessão regular. Muitos fenômenos de natureza nos aparecem como contínuos: o escoamento de tempo; o crescimento de uma planta, os deslocamentos no espaço, etc. A medida ou a contagem de acontecimentos discontínuos oferece pouca dificuldade, mas, não é o mesmo para acontecimentos contínuos. Como medir o crescimento? Como saber que uma coisa é maior que outra? Como medir a fuga do tempo?

Naturalmente, a criança resolve muitas vezes estas questões de um simpl[es] golpe de vista. Ela vê bem que a professora é maior que ela. E para isso não encontra nenhuma dificuldade. Ela não tem necessidade de medir a professora; sobretudo quando a criança é muito pequena ela se sai de situações deste gênero com a ajuda de seus sentidos, ûnicamente. A análise não lhe é necessária

Entretanto surge o momento, em que a necessidade de uma medida se faz sentir. Para medir uma quantidade que se transforma de modo contínuo, escolhe-se uma quantidade unitária arbitrária e mede-se a variação em função desta quantidade unitária escolhida.

O que é essencial de bem compreender é que os alunos descubram eles próprios as relações existentes entre as diversas unidades. Que eles aprendam então que há des centímetros num decímetro ainda passa, mas o que é necessário evitar a todo preço, é de lhes fazer decorar tabelas de equivalência sem que eles as tenham descoberto por sí mesmos. A descoberta pessoal através de experiências reais é indispensável; não basta uma experiência isolada; é preciso uma multidão delas, afim de que o aluno tire daí sua convicção, e possa se referir a ela se, [illegible] futuro, ele vie[illegible] a esquecer.

Certos professores pensarão, sem dúvida, que se trata de consagrar muit[o] tempo para não aprender "grande coisa", que os alunos não aprendem, sobre o assunto bastante "dados" e "fatos" para justificar o número de lições que é preciso consagrar para isto. Não é absolutamente assim. Há bastante tempo que se faz aprender de cor para saber que o psitacismo (repetição mecânica de lições que não foram assimiladas) é um medíocre substituto de experiências deste gênero.

"A ausência de tais experiências nos métodos tradicionais tem consequências muito graves sobretudo em países em vias de desenvolvimento em que

muito frequentemente, quando se solicita a alunos de avaliar o comprimento de uma sala, por exemplo, responderão indiferentemente 5m, ou 1 metro etc... Eles aprenderam de cor palavras que lhes são completamente vazias de sentido."

BIEMEL, 1966.

Seguem-se algumas poucas citações de Piaget sobre a complexidade da construção de noção de medida, que justificam o cuidado que tivemos na unidade deste nome.

A evolução de medida apresenta um paralelismo profundo com a construção de idéia de número.

Nós supusemos no capítulo I, que a medida, como a representação dos deslocamentos, implica um espaço estruturado segundo um sistema de referências ou de coordenadas, pois a medida espacial é essencial em movimentos, consistindo em aplicar o que mede sobre o que é medido e a recolocar tantas vezes

...

quantas a parte escolhida como unidade entra no todo a medir."

"Uma regua construída a priori é um condensado de operações já executadas e não há nenhum interesse em saber como o aluno se servirá dela antes de ter estabelecido como ele pode se construir escalas de medida, por grosseiras ou imperfeitas que o sejam."

"Quanto à conservação de um comprimento deslocado em uma simples translação, nós causaremos admiração ao leitor lhe dizendo que esta invariança que constitui o postulado prévio de toda medida euclidiana, estálonge de ser evidente para as crianças e supõe uma construção preliminar."

PIAGET, 1973.

BIBLIOGRAFIA

DIENES, Z - Les premiers pas en Mathématique - OCDL - Paris, 1966.

PIAGET, J - La geometrie spontanée de l'enfant - PUF - Paris, 1973.

Steiner, H - La Geometrie dans les programmes scolaires - Regional Seminar - Cairo, Unesco, 1970.