

Multiplicação

MULTIPLICAÇÃO

Natureza da Tarefa



Para muitos professores multiplicação e divisão significa exercitar tabuadas. Fatos tais como 7×6 e $72 \div 8$ precisam ser memorizados; o aluno repete sempre essas combinações até sabê-las, finalmente. Presentemente, contudo, multiplicação e divisão são temas fascinantes. Juntos e eles envolvem uma nova aproximação (aprosch) para a descoberta das relações entre os números e não lidam com fatos desligados que devem ser apreendidos peça por peça. Cada tabuada de multiplicação não mostra somente uma estrutura clara que é facilmente entendida e dominada; as várias tabuadas mesmas mostram tal interrelação que não há dificuldade para re-presentar todos os fatos de que se necessita.

A relação entre multiplicação e divisão pode ser claramente demonstrada com o nosso material bem como adição e subtração. É uma interrelação semelhante de "fazer e desfazer", uma aproximação para o mesmo fato de número, partindo de direção opostas.

Multiplicação (e também divisão) é definida pela equação $n \times a = b$ - (n vezes a é igual a b). Nessa equação n define o número de vezes que a é produzido, é chamado o m u l t i p l i c a d e r. Chama-se a o m u l t i p l i c a n d o: é o número a ser multiplicado. O resultado da multiplicação é marcado por k, o p r o d u t o.

Se na equação acima n e a são dados e o total b é procurado, estamos lidando com multiplicação. Se a questão é dada de forma que se parte do total b e se pergunta quantas vezes a está contido nela, chama-se o processo divisão. Nesse caso n é o desconhecido, muda-se a equação por $n = \frac{b}{a}$ ou $n = \frac{b}{a}$. Esta equação define a divisão. Chama-se n o q u o c i e n t e (do latim "quotiens", significando "quantas vezes"); ele estabelece o número de vezes que o divisor a está contido no dividendo b.

Há, contudo, ainda, outra possibilidade. Podemos perguntar pelo tamanho de a a parte que se obtém quando o total b é dividido em n partes. Podemos achar o seu valor pela equação $a = \frac{b}{n}$ ou $a = \frac{1}{n}$ de b ou a é igual a $\frac{1}{n}$ de b.

Este tipo de divisão pode ser tratado como tópico separado; é chamado "partitiva" e leva diretamente ao conceito das partes fracionárias.

Até agora a comparação de duas quantidades têm sido sempre expressa ou apontando sua diferença ou declarando o que deve ser somado ao número menor ou subtraindo da maior para torná-los iguais.

Agora a comparação dos dois números se baseará em outro tipo de relação. Se compararmos, por exemplo: 3 e 15, podemos expressar sua relação pelas duas equações: $5 \times 3 = 15$ e $1/5$ de $15 = 3$.

A criança mesma estudará essas relações em vários experimentos. Ela achará que 15 é 5 vezes maior que três e que três é somente um quinto do tamanho de 15. Por isso ela descobrirá a multiplicação e a divisão como novos meios de comparar quantidades.

Uma vez compreendida a interconexão entre a multiplicação e a divisão, podemos facilmente ver a função oposta das duas operações também. Multiplicação significa crescimento, não somente por somar alguma coisa, mas por multiplicar qualquer coisa que havia no começo. Contrariamente, a divisão significa: dividir alguma coisa em parte, isto é, diminuir.

Se reproduzimos 3 cinco vezes, isso importa $3+3+3+3+3$, isto é, podemos referir o processo de multiplicação de volta para adição com o uso de parcelas iguais. Semelhantemente se subtraímos um 3 depois de outro de 15, achamos que há 5 de tais partes em 15. Assim, a divisão se faz na uma subtração com subtraíndos iguais. Nos experimentos atuais, contudo investigaremos a multiplicação e divisão como conceitos de multiplicar e dividir e não como adição e subtração.

Cada professor pode decidir se deseja ensinar multiplicação primeiro e então divisão ou se ele quer que a criança trabalhe nas duas operações com um número, antes de ir para o número seguinte.

O SIGNIFICADO DAS TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO

A relação de número expressa pela multiplicação é nova para nós.

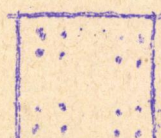
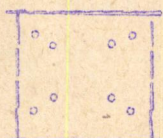
Por $5+3$ queremos dizer que há um 5 e um 3 para serem somados; ambas parcelas desempenham o mesmo papel e são representadas pelo bloco 5 mais o bloco 3. Mas 5×3 significa que o 3 deve ser reproduzido 5 vezes para se obter o produto. É um erro dizer que nós multiplicamos dois números - somente um número é multiplicado 5 vezes, e o 3.

A essência da multiplicação é que alguma coisa será tomada - não uma mas diversas vezes. Assim se a criança quer representar a resposta para 5×3 , ela pode agora pegar o seu bloco 3, cinco vezes. O 5 como tal não deve ser visto; o cinco é um operador com uma função diferente do 3 sobre o qual ele opera. A criança poderia achar o mesmo resultado adicionando 5 blocos de 3, mas a tabuada de 3 é um corte rápido pelo qual, após estudo apropriado, ela pode representar total diretamente.

Chegamos às chamadas tábuas de multiplicação, não estudando o fato separado 5×3 ou 6×7 , mas examinando os múltiplos de 3, antes de estudar os de 7. Voltamos atrás à equação que define multiplicação: $n \times a = b$. Se conservarmos n constante e deixarmos a variar de 1 a D , conservaremos o mesmo número de partes e deixaremos o tamanho de cada parte crescer. Se $n = 4$, chegamos à tábua seguinte:

$$\begin{aligned} 4 \times 1 &= 4 \\ 4 \times 2 &= 8 \\ 4 \times 3 &= 12, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Podemos representar estas relações por uma configuração de 4 no qual nos pegamos à coleção 4, mas mudamos o tamanho de cada 4 partes iguais



Estas gravuras ajudarão mais tarde a mostrar a relação estrutural entre, por exemplo, 2×3 e 4×3 . Contudo, este tipo de tábua é raramente usado: embora seja interessante porque é a contra-parte da partilha, a espécie de divisão na qual o tamanho de cada parte(a) terá de ser achada, se um número estiver dividido em número estabelecido de partes. Na figura acima não vemos somente de modo fácil que $4 \times 3 = 12$; podemos também, concluir que qualquer uma das quatro partes de 12 é 3.

Se agora variarmos o número de partes n e conservarmos o tamanho a constante chegamos à forma mais usual da tábua da multiplicação. Quando fazemos $a = 4$ e deixamos n variar de 1 a 10, achamos:

$$\begin{aligned} 1 \times 4 &= 4 \\ 2 \times 4 &= 8 \\ 3 \times 4 &= 12, \text{ etc. até } 10 \times 4 = 40. \end{aligned}$$

Em muitas experiências da criança achará por si mesma qual é o resultado, quando ela lida com dois ou mais blocos de 4 em lugar de um só. Em Aritmética Estrutural ela descobre estas tábuas e estuda-as, assim de modo que ela possa usar um fato para encontrar um outro relacionado. Ela aprende não somente a interrelação dos fatos simples de uma tábua, mas também as relações das tabuadas mesmo, como por exemplo, quando ela descobre a interdependência aproximada dos fatos de 9 e de 10.

Em dias que já vão longe as crianças tinham de aprender estas tabuadas de cor. Os livros-textos modernos insistem em que os fatos simples da multiplicação de todas as tabuadas devem ser praticados e aprendidos separadamente.

No ensino de Aritmética Estrutural evitamos o exercício tão ferverosamente como rejeitamos o separar a parte das tabuadas como peças sem relação.

Mostraremos como a criança será capaz de reconstruir qualquer fato da multiplicação tão facilmente como os fatos da adição e subtração - neste tempo já dominado.

EXPERIMENTOS QUE ENSINAM MULTIPLICAÇÃO

Em Aritmética Estrutural não desenvolvemos respostas de papa

gais para as questões de multiplicações. Nós visamos que a criança entenda o significado básico da multiplicação, deduzir que ela possa derivar qualquer fato dos princípios entendidos. Para verificar sua prontidão e interesse, nós lhe apresentamos alguns experimentos preliminares em multiplicação.



PRIMEIROS EXPERIMENTOS EM MULTIPLICAÇÃO

Há dez conjuntos de multiplicação des blocos. Cada um contém dez blocos da mesma qualidade; há 10 um; 10 dois; 10 três; até 10 dez.

Um dos conjuntos de multiplicação - por exemplo - o bloco de 10 blocos dois é colocado numa mesa próxima. Pede-se a criança que traga ao professor um dos blocos dois. Feito isso, a criança executa três mais desses recados. A criança geralmente soma os blocos e anuncia com o último bloco que eles imperiam em 6 todos juntos. Isto pode ser apontado como correto, mas não importa no jogo. A seguir, pede-se a criança que traga 5 vezes um dois. A criança raramente faz isso. Quase todas as vezes ela diz: "Por que hei de ir 5 vezes?" Não possa trazer cinco blocos de dois numa vez? Isto é exatamente o que se esperava que elas descobrissem: um simples bloco de 2 tomado 5 vezes é o mesmo que 5 blocos de 2 tomados de uma vez.

Se a criança parece interessada em descobrir o total, ela está pronta para o passo seguinte. Ela pode inserir os blocos na "pista dos números" e encontrar que 5 dois alcançam o marco 10. Dizemos-lhe que tal fato se expressa como "cinco vezes dois é igual a dez" e que usando o novo sinal X para vezes ela pode registrar sua descoberta: $5 \times 2 = 10$.

Para crianças que entendam este passo, o professor usa cartões com ordens neles: 3×3 , 1×6 , 6×1 , e assim por diante. Todos os tipos de blocos são espalhados nas mesas próximas, entre eles cubos simples. As crianças se revezam apanhando os cartões e fazendo o que eles dizem: 3×3 significa pegar três blocos de três. 1×6 pede por um bloco de seis; 6×1 significa seis blocos de um.

Há uma graça neste jogo que o torna ainda mais divertido e introduz a noção importante de que significa zero vezes um número. Entre os cartões a criança pode encontrar 9×0 . Ela lê: "nove vezes nenhuma coisa". Grande consternação! Ocasionalmente, bons atores correm para a mesa nove vezes, não agarram nada, bloco nenhum, e finalmente sentam-se sem nada nas mãos. Em outro cartão pode-se encontrar 0×7 . A criança lê: "zero vezes 7". É claro que isto representa nenhuma vez sete ou nada e o jogador orgulhosamente permanece sentado, enquanto as outras crianças movimentam-se a procura de seus blocos.

Este jogo familiariza a criança com a significação dos exemplos escritos de multiplicação. Sua compreensão de 6×1 ou 1×6 é muito importante para o desenvolvimento dos conceitos claros que são mais vitais em trabalho futuro. Não importa se a criança acha ou não o total para cada exemplo; isto é fácil de fazer por meio da PISTA DE NÚMEROS, se elas estiverem interessadas.

Este jogo com os blocos pode ser começado tão cedo quanto a professora deseje, mas nunca depois do estudo das taboadas. Então é geralmente muito tarde. Fatos tais com $1 \times 6 = 6$ e $1 \times 9 = 9$ tornam-se tão completamente aceitos que a criança simplesmente buscará o bloco 6 como resposta a 1×6 sem dar sentido à ação envolvida. Se, contudo, o jogo é começado com principiantes, as crianças recebem as mais dramáticas impressões sobre o que multiplicar por 1 ou multiplicar por 0 implica.

As taboadas de 10 e 5 no "Dual Board"

O objeto do experimento seguinte é promover a compreensão da taboada de multiplicar e o domínio da taboada de 10 e da taboada de 5. Na primeira experiência a criança usa o DUAL BOARD e os conjuntos de multiplicação de 10. O professor diz: "põe uma vez um 10 no quadro". A criança faz e escreve $1 \times 10 = 10$. A seguir, pede-se pedir que ponha "3 vezes um 10" no quadro. Ela insere 3 blocos de 10 no compartimento das dezenas e registra o 30 na forma nova: $3 \times 10 = 30$. Depois de algum tempo as crianças, com suas próprias palavras, "tomam o jeito da coisa" e escrevem toda a taboada.

$$\begin{aligned}
 1 \times 10 &= 10 \\
 2 \times 10 &= 20 \\
 3 \times 10 &= 30 \dots \\
 \\
 10 \times 10 &= 100
 \end{aligned}$$

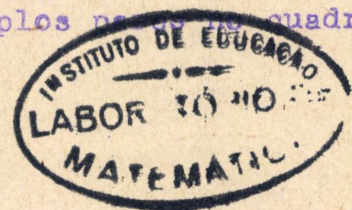
Então elas descobrem que sabem as respostas das tabuadas de 10 de experiências anteriores de adição com os blocos 10. Elas precisam apenas aprender a maneira nova de expressar os resultados e tomá-los numa aproximação diferente e estarão prontos para continuarem na tarefa seguinte. Mas há um conceito novo que é importante: os 10 picos na "Pista dos Números" serão achados como constituindo os últimos múltiplos nas escalas individuais (20 é o fim da escala de 2; 40 é o fim da de 4, e assim por diante. Assim todos os fatos de 10 ocorrem em forma inversa aos dos últimos fatos de cada tabuada.

Uma simples experiência leva à descoberta desta relação básica. O professor insere 3 blocos de 10 no compartimento 10 do Dual Board. A criança sabe que o resultado é 30. Então, os três blocos de 10 são voltados de modo a caber horizontalmente ao em vez de verticalmente, e pergunta-se à criança quantos três igualam três dezenas. Colocando agora os tres no topo dos blocos 10 a criança descobre o fato: $3 \times 10 = 10 \times 3$. Ao mesmo tempo vemos que, estruturalmente: 3 vezes 10 não é 10 vezes 3. O resultado do número é o mesmo 30 unidades, mas no primeiro caso nós temos blocos 10 eo número 3 indica quantos há. No segundo caso temos bloco 3 eo número 10 indica quantos. Há uma identidade numérica, produzindo dois retângulos congruentes, mas suas estruturas diferem porque os dois fatores desempenham papéis diferentes; um é o multiplicador, (o ativo) e o outro é o multiplicando, que nos dá o tamanho da fileira que é produzida tantas vezes quanto o multiplicador indica. O multiplicador no primeiro caso é 3, no segundo é 10. Deve-se à estrutura decimal de nosso sistema de número a particularidade especial do trabalho com 10 que nós sabemos quantas unidades há em cada múltiplo. Três blocos de 10 mostram as 30 unidades; nos a notação expressa por um três no lugar das dezenas, mas as 30 unidades, assim 30. Quando avançamos para outras tabuadas isto não é assim: 5×5 , por exemplo, também significa que podemos selecionar 5 ao vez de 5 vezes um 5, mas quando é " cinco cinco " ? O total precisa ser expresso em dezenas e unidades.

Estudamos a tabuada de 5 a seguir por causa da relação últimos 5 e dos 10. A criança usa o Dual Board os 10 e uma pilha de 10 blocos de 5. O professor pode primeiro inserir 4 dos blocos 10. A criança verifica que eles importam em 40. Agora 4 blocos de de 5 são colocados no cima das 4 dezenas. A criança vê que eles ocupam apenas a metade do espaço e, de acordo com isso podem apenas ser 20. Ela então remove os blocos 10 e trabalha só com os 5. Quatro blocos de 5 são colocados e o professor forma fileiras de dezenas com eles. A criança reconhece o parentesco com os 10, com os quatro cinco, somente duas fileiras de 10 podem ser construídas. Isto significa $4 \times 5 = 20$.

O professor deveria agora escrever os exemplos no quadro negro.

$$\begin{array}{ll}
 2 \times 5 = 10 & 8 \times 5 = \\
 4 \times 5 = & 10 \times 5 = \\
 6 \times 5 = &
 \end{array}$$



A criança verificará que um número par de 5 posto no Dual Board sempre iguala a metade deste número de dezenas completas.

Agora há alguns fatos mais a serem descobertos. Suponhamos que a criança insere 3 cinco no Dual Board. Dois cincos formam 10 e pertencem ao compartimento das dezenas. O terceiro 5 precisa ser colocado no compartimento das unidades. Assim descobre-se que 3 cincos são quinze. Os outros fatos ímpares de 5 são obtidos de modo semelhante. Mas embora as crianças compreendam os fatos pares de 5 de uma vez torna-se necessário mais de um experimento para que esses fatos ímpares. Alguns são muito auxiliados quando se lhes mostra como medir a "cobra" de 5 com uma fileira paralela de 10 como foi feita na adição de colunas. Para variar a professora pode apresentar exemplos de múltiplos em forma de colunas:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

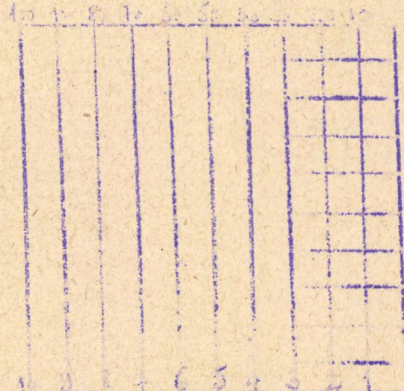
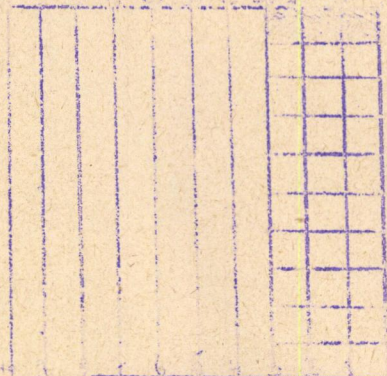
Se, ao chegar ao fato a criança não está segura da resposta, o professor mostra-lhe como pôr os 7 blocos de um extremo a outro para medir que número eles alcançam por meio de dezenas. A criança verá que 6 dos meios alcançam 30 e o sétimo leva-os a 35. As tres dezenas que igualam 6 dos 5 produzem uma impressão muito clara nas crianças.

Assim tôda a tabela do 5 ôé fâcilmente dominada com absoluta segurança.

A TABUADA DE 9 NO TABOLEIRO DUPLO

A tabuada seguinte com a qual experimentamos é, usualmente, a tabuada de 9. Esta é um desafio à mente e é uma satisfação para o professor, tanto como para o aluno ver quão rapidamente é dominada. A mente capaz de um padrão elevado de raciocínio revela sua perspicácia numa compreensão quasi instantânea do princípio estrutural que relaciona a tabuada de 9 aos fatos do 10.

O Dual Board é usado no experimento seguinte: junto com 10 blocos de 9, 10 cubos simples e as dez dezenas. O professor põe três dezenas no Taboleiro Duplo. A criança reconhece 30. As dezenas são retiradas e substituídas por 3 blocos de 9.



Queremos saber quanto é 3 vezes 9. Nós sabemos quanto é 3 vezes 10, assim simplesmente, pedimos emprestados alguns cubos e completamos os nove até fazer dezenas. A criança dirá novamente "30". O professor remove os cubos emprestados: obviamente temos 30 menos 3 que sabemos ser 27. "Isto é claro", foi o comentário satisfeito de um menino. Ele rapidamente inseriu 5 blocos de 9 e começou a raciocinar: 5 dezenas são 50. Cinco noves são 50 - 5; deve ser 45! Continua o experimento e a criança acha fato após fato da tabuada de 9 sem ninguém lhe dizer as respostas ou auxiliar na continuação. Uma criança põe cuidadosamente os cubos, um de cada vez e representa cinco vezes tirando agora 5 cubos dos 50 emprestados pelas fileiras cheias de 10. Outra simplesmente insere os 5 noves, olha para a lacuna e exclama: "50 - menos 5, 45."

3 X 9 = 30 - 3 = 27
5 X 9 = 50 - 5 = 45
7 X 9 = 70 - 7 = 63
4 X 9 = 40 - 4 = 36
6 X 9 = 60 - 6 = 54
8 X 9 = 80 - 8 = 72
9 X 9 = 90 - 9 = 81
1 X 9 = 9
2 X 9 = 18
10 X 9 = 90



Para o professor que duvida que este processo levará a uma resposta imediata, contaremos como a linguagem da criança muda gradualmente. A princípio as crianças dizem "3 dezenas são 30, 3 noves devem ser 30 menos 3 ou 27. Em breve elas dizem "3 dezenas 30, 3 noves 27". Mais tarde 27 é escrito instantaneamente, de modo que se as crianças fazem algum raciocínio, ela deve fazê-lo num relâmpago. Quando interrogadas como conseguiram a resposta, nossas crianças simplesmente afirmam: "Nós o sabemos agora".

Naturalmente tal figuração só é possível se os fatos da subtração tiverem sido dominados. Por isso a introdução da tabuada de nove é um teste sobre se o professor faz um bom trabalho ao ensinar o cál-

culo dos números de dois algarismos e se o funcionamento mental da criança está próprio para o nível.

Há um outro experimento com os nove no Tabuleiro Duplo que foi plenamente, digo, planejado para mostrar sem um caminho mais rápido, como o total de unidades representadas por diversos naves pode ser convertido em dezenas e unidades.

A criança insere qualquer número de naves no compartimento das dezenas no Tabuleiro Duplo, digamos 4. Então o último bloco nove deve ser trocado por nove cubos simples. Para completar os 3 naves para dezenas, a criança deve usar tres dos cubos da última fileira de 9. O resto vai para o compartimento das unidades. Assim a criança descobre que 4 naves formam 3 dezenas e um resto de 6 unidades, ou, $4 \times 9 = 36$. O experimento pode ser continuado enquanto ele interessa a criança e ela obtém fatos como os seguintes:

$4 \times 9 = 36$ $3 \times 9 = 27$ $8 \times 9 = 72$ e $6 \times 9 = 54$

Agora olhem para os dígitos da resposta. Sua soma é sempre 9: "Que interessante," disse um menino que foi rápido em compreender a vantagem dessa relação. O fato 9 nos 40 deve ser 45, nos 70 deve ser 72 e assim por diante. Através desse truque aritmético a tabuada de 9 se torna uma amiga íntima.



A TABUADA DE 2 BASEADA NA DUPLICAÇÃO

O objetivo desse passo é apontar à criança o aspecto característico da tabuada de 2: que um dado número de dois dá o mesmo resultado que é obtido duplicando-se o número em questão. De uma vez que a criança está segura dos duplos de 1 a 10, ela dominará a tabuada de dois sem dificuldade alguma.

Nos experimentos seguintes os blocos unidos e o conjunto de multiplicação dos blocos 2 são usados. Qualquer número de dois é colocado a lado. Suponhamos que há seis fileiras de blocos 2; o professor então coloca dois dos blocos seis em cima dos dois. Assim a criança verifica a relação entre os dois conjuntos de blocos e, desde que ela sabe que dois seis igualam 12, ela escreve $6 \times 2 = 12$. A criança pode então trabalhar sozinha, descobrindo que oito dos blocos dois igualam dois blocos oito, quatro de dois igualam dois de quatros e assim por diante.

As crianças que sabem como duplicar os números de 1 a 10, geralmente precisam somente uma demonstração para dominar a tabuada de 2.

A TABUADA DE 3 NA PISTA DE NÚMEROS

O objetivo desse passo é levar a criança a dominar a tabuada de 3, mostrando-lhe ao mesmo tempo um aspecto novo da multiplicação. As primeiras 3 seções da Pista dos Números (1 a 30) são usadas nestes experimentos com os blocos 3, 8 cubos de qualquer cor, e 2 cubos vermelhos. O professor pede a crianças para achar a escala 3. A criança insere um bloco 3 que alcança um marco 3 da pista. O professor diz-lhe para colocar um cubo no 3 como um "marco".



Um segundo 5 é inserido e alcança o seis. Enquanto isso a criança pode registrar os passos à medida que vai prosseguindo: $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$ e assim por diante. O experimento continua até que os dez marcos estão colocados e a escala está claramente visível. O professor pede à criança para apontar o último marco. É 30 e a criança sabe que ela necessita todos os 10 três para chegar lá. O professor pode a seguir perguntar pelo quanto marco na escala. Ela encontra no meio da escala, como 15, 5 dos três são necessários para chegar a ele.

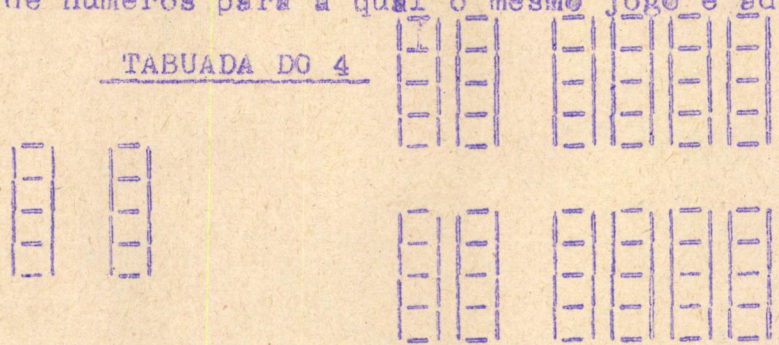
Agora o segundo ato do jogo começa. Os marcos são removidos e o professor pede à criança que os ponha de volta de acordo com as suas ordens. Ele põe um cubo vermelho no fim da escala do 3, como o décimo marco. Isto é naturalmente, 30, e ele escreve $10 \times 3 = 30$.

Agora o outro cubo vermelho é posto como quinto marco - 15; ele escreve $5 \times 3 = 15$. O marco seguinte subindo a escala é o sexto - 12 que ele registra. A medida que isto continua para cada pico da escala de 3, a criança se torna cada vez melhor orientada, especialmente com respeito aos picos salientes 5 e 10.

A fim de imprimir esta escalas mais claramente em suas mentes diversas crianças podem competir num jogo sempre excitante com a pista dos números, no qual cada criança usa cubos de cores diferentes.

Cada uma se revêsa com um "spinner" que mostra os números de 1 a 10. Se o spinner aponta 9 a criança coloca o marco no espaço próprio (27), em cima de qualquer outro que já esteja lá. A cor do cubo mais de cima no fim do jogo decide a qual pico pertence.

Alguns de nossos visitantes sorriem compreensivamente quando se lhes diz que o entusiasmo das do 3º ano é devido a um jogo de competição. Mas eles ouvem o que as crianças dizem quando colocam seus cubos, eles quasi não podem acreditar em seus ouvidos. "Hi, recebi um 8 e 8×3 é 24, assim estou no cume agora!" " 3×3 é 9, e aqui vai o meu cubo!" " 7×3 é 21, estou certo que o Branco ganhará!" Toda a escala é apontada, enquanto a figura da escala de 3 se torna inesquecível. Depois de pouco tempo as crianças estão prontas para outra escala de números para a qual o mesmo jogo é adotado.

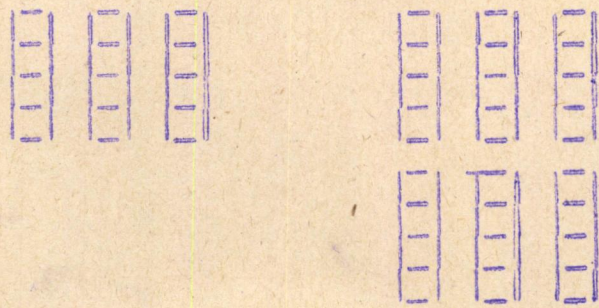


A Tabuada do quatro é muitas vezes ensinada exatamente com o mesmo processo da do três. Achamos no entanto variar, conveniente variar para que se forme através de outros processos uma representação mais nítida na mente da criança. Ensinando a tabuada de 4, nós usamos os dez blocos 4 agrupados em configurações de famílias de números. O professor pode colocar os blocos 4, 2 a 2 próximos um do outro como na figura acima. A criança registra $2 \times 4 = 8$.

Então mais dois blocos 4 são arrumados com os primeiros dois para formar quatro. A criança pensa $8 + 8$ e registra $4 \times 4 = 16$. A seguir, mais 4 blocos são agrupados na configuração 8.

A criança pensa $16 + 16$ e reproduz $8 \times 4 = 32$. Alguns professores podem protestar que é mais difícil para a criança abstrair ... $16 + 16$ de repente. Não o será porém se ela tiver habilidade no cálculo oral. Se uma criança erra (Tem dificuldades) pedimos-lhe para representar $15 + 15 + 2 =$

O experimento continua com 3 blocos 4. Veja-se a figura abaixo:



A criança encontra e registra $3 \times 4 = 12$. Três blocos 4 mais são acrescentados para formar a configuração 6. A criança pensa ... $12 + 12$ e registra $6 \times 4 = 24$.

Agora a criança precisa raciocinar o fato 7. $7 \times 4 = 28$. Depois do fato 6 ter sido bem dominado, o fato 7 pode ser derivado dele, pelo acrescimo de outro 4 ao 24.

O professor porém não repetiria este experimento. Ao contrário deixaria a criança praticar com o jogo dos picos na Pista dos núme -

ros, com os 4. Ela já sabe 5 X 4 e 9 X 4, 1 X 4 e 10 X 4; alguns fatos serão conhecidos das configurações, e reste seria encontrado estudando os picos da escala de 4.

A TABUADA DO 6 NA PISTA DOS NÚMEROS

O passo seguinte é mostrar como a tabuada de 6 pode ser acrescentada a estas que a criança já domina. O jogo de marco descreto previamente pode, naturalmente, ser usado para o estudo da tabuada de 6. Mas para variar o professor pode propor um jogo de dados de "Vai e para" com a pista de números de 1 a 100 e os 10 blocos de 6. Quando o dado marca: Vai! o jogador põe um bloco 6 diretamente na Pista de Números até o marco 6. Com o seguinte "Vai!" ele põe outro bloco até 12. Assim ele encontra uma baliza após outra: 18, 24, 30 e assim por diante, até 60, e pode se revezar com um parceiro que segura 10 cubos simples para serem colocados ao lado da Pista de Números também como picos de 6. O jogador que primeiro alcançar 60 ganha. Ambas crianças olham para as balizas que encontraram e marcaram durante o jogo e escrevem os fatos dos 6. (Este é outro jogo que pode igualmente ser jogado por times). Antes dos blocos serem removidos, o professor pode traçar uma tabuada desses fatos dos 6 no quadro negro e decidir com as crianças que fatos são conhecidos e quais deveriam ser estudados.

Fatos conhecidos	Processo de pensamento através de processo	Fatos derivados
1 X 6 = 6 2 X 6 = 12 3 X 6 = 18 4 X 6 = 24 5 X 6 = 30		
6 X 6 = 36	5 X 6 = 30 6 X 6 = 30 + 6	6 X 6 = 36
7 X 6 =	7 X 3 = 21 7 X 6 = 42	7 X 6 = 42
8 X 6 =	4 X 6 = 24 8 X 6 = 48	
9 X 6 = 54 10 X 6 = 60		



O professor descobrirá, geralmente, que, conforme se vê no quadro acima, há somente 3 fatos novos de multiplicação para serem estudados cuidadosamente: 6 X 6, 7 X 6 e 8 X 6. Descobri que o método acima de raciocínio apela para a maioria das crianças e se encarrega dos fatos a serem aprendidos.

DOMÍNIO DA TABUADA DO 7 E DO 8

O domínio da tabuada do 7 é facilmente adquirido (com exceção de 2 fatos) já que esses fatos são prontamente conhecidos na forma reversa pelo estudo das outras tabuadas. Os 2 fatos que são atualmente desconhecidos são: 7 X 7 e 8 X 7; 6 X 7 e 4 X 7 por exemplo, podem ser derivados dos fatos 7 X 6 e 7 X 4. Na tabuada do 8 o único fato desconhecido é 8 X 8. Todos os restantes são facilmente derivados dos fatos reversos. O professor dá à criança 10 cubos e pede-lhe que coloque os marcos do 7. Se ela protesta que não conhece os picos do 7, deixa-a descobrir que todos os fatos do 7 das outras tabuadas aparecem como picos na escala de 7. Ele pode colocar os blocos/através dos picos das escalas de 4 e os blocos 7 através da pista como picos dos 7. Deste modo ela vê claramente que as duas escalas se encontram no 28 que é o quarto marcos da escala de 7 e o 72 na escala de 4. Da mesma forma a escala de 6 e a do 7 se encontram no 42 que é tanto 7 X 6 como 6 X 7. Então a criança compreende a estrutura das escalas interceptantes que têm múltiplos comuns. Isto é uma descoberta significativa para ela que estará ansiosa para experimentar com a escala do 8.

Ela põe os marcos como "post" das outras escalas. Esta está certa de 8 X 1, 8X2, 8 X 3, etc., e muito elegantemente coloca os cubos de 8, 16, 24, 32, etc., como se ela tivesse muitas vezes experimentado com a escala do 8. O único fato que ela não conhece é 8 X 8 = 64, é o único pico que não apareceu nos outros experimentos.

A MÁQUINA DA MULTIPLICAÇÃO

A máquina da multiplicação é um jogo para testar a multiplicação e a divisão. Tem a forma de um retângulo que tem a largura de 11 blocos unidos e a altura de 10 blocos unidos. Na extremidade, (geralmente escondida) por faixas que formam uma segunda camada, há uma folha de papel na qual é impressa a Tábua de Pitágoras. Se a criança deseja verificar seu conhecimento da tabuada de 5, por ex., um guia vertical é colocado na quinta coluna. À esquerda da coluna há jogar para 1 a 10 blocos de 5, um abaixo de outro. Quando a faixa cobrindo essa quinta coluna é movida para baixo de lugar a lugar, ela descobre os múltiplos de 5. Se um bloco de 5 é inserido e a faixa que cobre é abaixada uma unidade, o 5 aparece e assim por diante, até 50. Antes de movimentar a faixa para baixo para deixar a descoberta a criança deveria experimentar seu conhecimento, usando a máquina somente para verificar suas respostas. Ao testar a criança com exemplos de todas as tabuadas, o professor poderia abandonar a forma de equação e preparar para a multiplicação pelo uso da forma em coluna. Os exemplos deveriam incluir os fatos de zero e os fatos da tabuada de 1 com os quais iniciamos a multiplicação.

6	4	8	0	1	3	5
X 7	X 8	X 1	X 9	X 6	X 0	X 9



Se esses forem resolvidos sem erro algum a criança pode ser conduzida ao estudo do estudo da multiplicação.

REALIZAÇÕES (ACHIEVEMENTS)

Num simples diagrama podemos resumir as realizações da criança nesta etapa:

R	Técnica estrutural
10	Estudada no tabuleiro duplo. O sinal e termos da multiplicação são introduzidos.
5	Estudada no Tabuleiro Duplo em relação às dezenas: dois cincos igual 1 dezena, três cincos = 1 dezena + 5.
9	Estudada no Tabuleiro Duplo em relação às dezenas: (3x9=3x10-3=27).
2	Resultados encontrados por duplicação: 4x2=2x4, 6x2=2x6.
3	Estudos da escala três na Pista dos Números.
4	Encontrada por raciocínio aritmético, baseada na estrutura de figuras de números.
6	3 fatos novos: 6x6, 7x6, 8x6 derivados de suas relações com os fatos conhecidos.
7	2 fatos novos - 7x7, 8x7 - derivados de fatos conhecidos.
8	Um fato novo: 8 x 8 - derivado de fatos conhecidos.

Não é nenhuma motivação especial ou o interesse pelo jogo que são responsáveis pelo domínio dessa tabuada pelas nossas crianças. Quanto a isso, os jogos só se tornarão a aprendizagem mais divertida. Contudo, o domínio é obtido porque o aspecto característico de cada jogo mostra a estrutura da tabuada que ela está estudando.

Ela pode esquecer fatos isolados, mas pode reconstruí-los em sua mente, porque leva consigo a figura vertical da escala como um todo e pode assim representar-se os picos especiais. É importante acrescentar que ensinamos a multiplicação só depois de ter sido edificada um conhecimento fundamental de adição e subtração. Nossas crianças trabalharam com os duplos, e para elas a duplicação de 12 ou 24 é um prazer. Quando uma criança vem para auxílio terapêutico em multiplicação nós, geralmente, temos de conduzi-la de volta um a um a tudo dos fundamentos em adição e subtração.

As crianças usarão suas habilidades recentemente adquiridas em multiplicação no estudo da divisão. Nenhuma criança que tenha jogado o jogo do Marco na Pista dos Números se sentirá perplexa

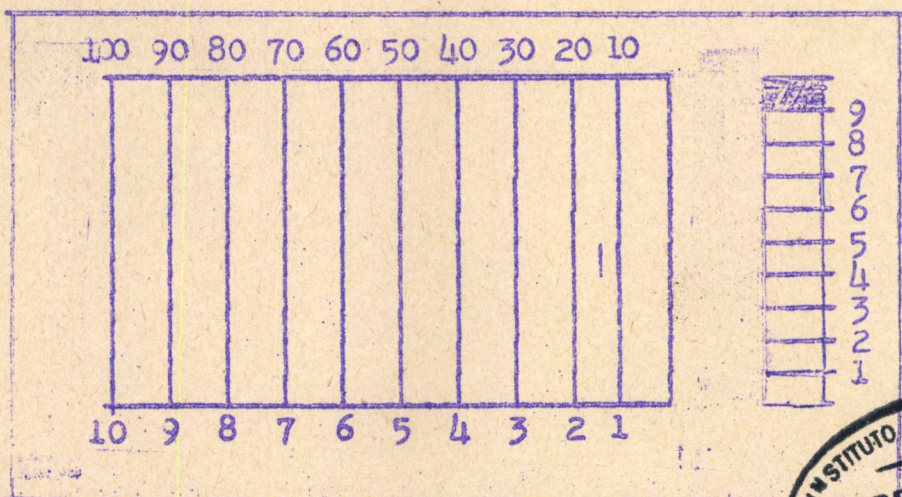
quando confrontadas com qualquer dos picos nas várias escalas e solicitada a encontrar quantos três, setes ou oitos (ou qualquer outro) estão contidos nele.

A criança aprende todas as tabuadas, de modo a ter uma resposta rápida a questões tais como 3×4 . Mas o que é que representa uma resposta pronta? Representa transformar instantaneamente os três e quatro em doze (12) em nossa denominação de dezenas e unidades. Se um homem nos contar que em seu passeio ele viu três vezes quatro passaros, voando sobre os campos, ele realmente, não nos contou quantos passaros ele viu. Os passaros precisam ser medidos em dez, nossa medida padrão (standardt).

O homem faria melhor contando que viu doze passaros.

Nossas crianças viram, no tabuleiro duplo como qualquer quantidade pode assim ser agrupada em dezenas e unidades. Esta compreensão prepara o caminho para o estudo posterior de números denominados (computação com pesos e medidas).

TABULEIRO DUPLO



*Arquivada
em 1981
Mestral*

MULTIPLICAÇÃO

Natureza da Tarefa



Para muitos professores multiplicação e divisão significa exercitar tabuadas. Fatos tais como 7×6 e $72 : 8$ precisam ser memorizados; o aluno repete sempre essas combinações até sabê-las, finalmente. Presentemente, contudo, multiplicação e divisão são temas fascinantes. Juntos eles envolvem uma nova aproximação (approach) para a descoberta das relações entre os números e não lidam com fatos desligados que devem ser apreendidos peça por peça. Cada tabuada de multiplicação não mostra somente uma estrutura clara que é facilmente entendida e dominada; as várias tabuadas mesmas mostram tal interrelação que não há dificuldade para apresentar todos os fatos de que se necessita.

A relação entre multiplicação e divisão pode ser claramente demonstrada com o nosso material bem como adição e subtração. É uma interrelação semelhante de "fazer e desfazer", uma aproximação para o mesmo fato de número, partindo de direção opostas.

Multiplicação (e também divisão) é definida pela equação $n \times a = b$ (n vezes a é igual a b). Nessa equação n define o número de vezes que a é produzido, é chamado m u l t i p l i c a d o r. Chama-se a o m u l t i p l i c a n d o; é o número a ser multiplicado. O resultado da multiplicação é marcado por b, o p r o d u t o.

Se na equação acima n e a são dados e o total b é procurado, estamos lidando com multiplicação. Se a questão é dada de forma que se parte do total b e se pergunta quantas vezes a está contido nela, chama-se o processo divisão. Nesse caso n é o desconhecido e muda-se a equação por $n = b : a$, ou $n = \frac{b}{a}$. Esta equação define a divisão. Chama-se n o q u o c i e n t e (do latim "quotiens", significando "quantas vezes"); ele estabelece o número de vezes que o divisor a está contido no dividendo b.

Há contudo, ainda, outra possibilidade. Podemos perguntar pelo tamanho de a a parte que se obtém quando o total b é dividido em n partes. Podemos achar o seu valor pela equação $a = \frac{b}{n}$ ou $a = \frac{1}{n}$ de b ou a é igual a $\frac{1}{n}$ de b.

Neste tipo de divisão pode ser tratado como tópico separado; é chamado "partitiva" e leva diretamente ao conceito das partes fracionárias.

Até agora a comparação de duas quantidades têm sido sempre expressa ou apontando sua diferença ou declarando o que deve ser somado ao número menor ou subtraindo da maior para torná-los iguais.

Agora a comparação dos dois números se baseará em outro tipo de relação. Se compararmos, por exemplo: 3 e 15, podemos expressar sua relação pelas duas equações: $3 \times 5 = 15$ e $1/5$ de $15 = 3$.

A criança mesma estudará essas relações em vários experimentos. Ela achará que 15 é 5 vezes maior que três e que três é somente um quinto do tamanho de 15. Por isso ela descobrirá a multiplicação e a divisão como novos meios de comparar quantidades.

Uma vez compreendida a interconexão entre a multiplicação e a divisão, podemos facilmente ver a função oposta das duas operações também. Multiplicação significa crescimento, não somente por somar alguma coisa, mas por multiplicar qualquer coisa que havia no começo. Contrariamente, a divisão significa: dividir alguma coisa em parte, isto é, diminuir.

Se reproduzimos 3 cinco vezes, isso importa $3+3+3+3+3$, isto é, podemos referir o processo de multiplicação de volta para adição com o uso de parcelas iguais. Semelhantemente se subtrairmos um 3 depois de outro de 15, achamos que há 5 de tais partes em 15. Assim, a divisão se torna uma subtração com subtraindos iguais. Nos experimentos atuais, contudo investigaremos a multiplicação e divisão como conceitos de multiplicar e dividir e não como adição e subtração.

Cada professor pode decidir se deseja ensinar multiplicação primeiro e então divisão ou se ele quer que a criança trabalhe nas duas operações com um número, antes de ir para o número seguinte.

O SIGNIFICADO DAS TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO

A relação de número expressa pela multiplicação é nova para nós.

Por $5+3$ queremos dizer que há um 5 e um 3 para serem somados; ambas parcelas desempenham o mesmo papel e são representadas pelo bloco 5 mais o bloco 3. Mas 5×3 significa que o 3 deve ser reproduzido 5 vezes para se obter o produto. É um erro dizer que nós multiplicamos dois números - somente um número é multiplicado 5 vezes, 5 e 3.

A essência da multiplicação é que alguma coisa será tomada - não uma mas diversas vezes. Assim se a criança quer representar a resposta para 5×3 , ela pode agora pegar o seu bloco 3, cinco vezes. O 5 como tal não deve ser visto; o cinco é um operador com uma função diferente do 3 sobre o qual ele opera. A criança poderia achar o mesmo resultado adicionando 5 blocos de 3, mas a tabuada de 3 é um corte rápido pelo qual, após estudo apropriado, ela pode representar total diretamente.

Chegamos às chamadas tábuas de multiplicação, não estudando o fato separado 5×3 ou 6×7 , mas examinando os múltiplos de 3, antes de estudar os de 7. Voltamos atrás à equação que define multiplicação: $n \times a = b$. Se conservarmos n constante e deixarmos a variar de 1 a 10, conservaremos o mesmo número de partes e deixaremos o tamanho de cada parte crescer. Se $n = 4$, chegamos à tábuas seguinte:

$$\begin{aligned}4 \times 1 &= 4 \\4 \times 2 &= 8 \\4 \times 3 &= 12, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Podemos representar estas relações por uma configuração de 4 no qual nos pegamos a coleção 4, mas mudamos o tamanho de cada 4 partes iguais



Estas gravuras ajudarão mais tarde a mostrar a relação estrutural entre, por exemplo, 2×3 e 4×3 . Contudo, este tipo de tábuas é raramente usado: embora seja interessante porque é a contra-parte da partilha, a espécie de divisão na qual o tamanho de cada parte (a) terá de ser achada, se um número estiver dividido em número estabelecido de partes. Na figura acima não vemos somente de modo fácil que $4 \times 3 = 12$; podemos também, concluir que qualquer uma das quatro partes de 12 é 3.

Se agora variarmos o número de partes n e conservarmos o tamanho a constante chegamos à forma mais usual da tábuas da multiplicação. Quando fazemos $a = 4$ e deixamos n variar de 1 a 10, achamos:

$$\begin{aligned}1 \times 4 &= 4 \\2 \times 4 &= 8 \\3 \times 4 &= 12, \text{ etc. até } 10 \times 4 = 40.\end{aligned}$$

Em muitas experiências da criança achará por si mesma qual é o resultado, quando ela lida com dois ou mais blocos de 4 em lugar de um só. Em Aritmética Estrutural ela descobre estas tábuas e estuda-as, assim de modo que ela possa usar um fato para encontrar um outro relacionado. Ela aprende não somente a interrelação dos fatos simples de uma tábuas, mas também as relações das tabuadas mesmo, como por exemplo, quando ela descobre a interdependência aproximada dos fatos de 9 e de 10.

Em dias que já vão longe as crianças tinham de aprender estas tabuadas de cor. Os livros-textos modernos insistem em que os fatos simples da multiplicação de todas as tabuadas devem ser praticados e aprendidos separadamente.

No ensino de Aritmética Estrutural evitamos o exercício tão ferverosamente como rejeitamos o separar a parte das tabuadas como peças sem relação.

Mostraremos como a criança será capaz de reconstruir qualquer fato da multiplicação tão facilmente como os fatos da adição e subtração - neste tempo já dominado.

EXPERIMENTOS QUE ENSINAM MULTIPLICAÇÃO

Em Aritmética Estrutural não desenvolvemos respostas de papa

gais para as questões de multiplicações. Nós visamos que a criança entenda o significado básico da multiplicação, de modo que ela possa derivar qualquer fato dos princípios entendidos. Para despertar a curiosidade e interesse, nós lhe apresentamos alguns experimentos preliminares em multiplicação.



PRIMEIROS EXPERIMENTOS EM MULTIPLICAÇÃO

Há dez conjuntos de multiplicação de blocos unidos. Cada um contém dez blocos da mesma qualidade; há 10 um; 10 dois; 10 três; até 10 dez.

Um dos conjuntos de multiplicação - por exemplo - o bloco de 10 blocos dois é colocado numa mesa próxima. Pode-se a criança que traga ao professor um dos blocos dois. Feito isso, a criança executa três mais desses recados. A criança geralmente soma os blocos e anuncia com o último bloco que eles importam em 6 todos juntos. Isto pode ser apontado como correto, mas não importa no jogo. A seguir, pede-se a criança que traga 5 vezes um dois. A criança raramente faz isso. Quase todas as vezes ela diz: "Por que hei de ir 5 vezes? Não posso trazer cinco blocos de dois numa vez?" Isto é exatamente o que se esperava que elas descobrissem: um simples bloco de 2 tomado 5 vezes é o mesmo que 5 blocos de 2 tomados de uma vez.

Se a criança parece interessada em descobrir o total, ela está pronta para o passo seguinte. Ela pode inserir os blocos na "pista dos números" e encontrar que 5 dois alcançam o marco 10. Dizemos-lhe que tal fato se expressa como "cinco vezes dois é igual a dez" e que usando o novo sinal X para vezes ela pode registrar sua descoberta: $5 \times 2 = 10$.

Para crianças que entendam este passo, o professor usa cartões com ordens neles: 3×3 , 1×6 , 6×1 , e assim por diante. Todos os tipos de blocos são espalhados nas mesas próximas, entre eles cubos simples. As crianças se revezam apanhando os cartões e fazendo o que eles dizem: 3×3 significa pegar três blocos de três. 1×6 pede por um bloco de seis; 6×1 significa seis blocos de um.

Há uma graça neste jogo que o torna ainda mais divertido e introduz a noção importante do que significa zero vezes um número. Entre os cartões a criança pode encontrar 9×0 . Ela lê: "nove vezes nenhuma coisa". Grande consternação! Ocasionalmente, bons atores correm para a mesa nove vezes, não agarram nada, bloco nenhum, e finalmente sentam-se sem nada nas mãos. Em outro cartão pode-se encontrar 0×7 . A criança lê: "zero vezes 7". É claro que isto representa nenhuma vez sete ou nada e o jogador orgulhosamente permanece sentado, enquanto as outras crianças movimentam-se a procura de seus blocos.

Este jogo familiariza a criança com a significação dos exemplos escritos de multiplicação. Sua compreensão de 6×1 ou 1×6 é muito importante para o desenvolvimento dos conceitos claros que são mais vitais em trabalho futuro. Não importa se a criança acha ou não o total para cada exemplo; isto é fácil de fazer por meio da PISTA DE NÚMEROS, se elas estiverem interessadas.

Este jogo com os blocos pode ser começado tão cedo quanto a professora deseje, mas nunca depois do estudo das taboadas. Então é geralmente muito tarde. Fatos tais com $1 \times 6 = 6$ e $1 \times 9 = 9$ tornam-se tão completamente aceitos que a criança simplesmente buscará o bloco 6 como resposta a 1×6 sem dar sentido à ação envolvida. Se, contudo, o jogo é começado com principiantes, as crianças recebem as mais dramáticas impressões sobre o que multiplicar por 1 ou multiplicar por 0 implica.

As taboadas de 10 e 5 no "Dual Board"

O objeto do experimento seguinte é promover a compreensão da tabuada de multiplicar e o domínio da tabuada de 10 e da tabuada de 5. Na primeira experiência a criança usa o DUAL BOARD e os conjuntos de multiplicação de 10. O professor diz: "põe uma vez um 10 no quadro". A criança faz e escreve $1 \times 10 = 10$. A seguir, pode-se pedir que ponha "3 vezes um 10" no quadro. Ela insere 3 blocos de 10 no compartimento das dezenas e registra o 30 na forma nova: $3 \times 10 = 30$. Depois de algum tempo as crianças, com suas próprias palavras, "tomam o jeito da coisa" e escrevem toda a tabuada.



$$\begin{aligned}
 1 \times 10 &= 10 \\
 2 \times 10 &= 20 \\
 3 \times 10 &= 30 \dots \\
 10 \times 10 &= 100
 \end{aligned}$$

Então elas descobrem que sabem as respostas das tabuadas de 10 de experiências anteriores de adição com os blocos 10. Elas precisavam apenas aprender a maneira nova de expressar os resultados e tomá-los numa aproximação diferente e estarão prontos para continuarem na tarefa seguinte. Mas há um conceito novo que é importante: os 10 picos na "Pista dos Números" serão achados como constituindo os últimos múltiplos nas escalas individuais (20 é o fim da escala de 2; 40 é o fim da de 4, e assim por diante. Assim todos os fatos de 10 ocorrem em forma inversa aos dos últimos fatos de cada tabuada.

Uma simples experiência leva à descoberta desta relação básica. O professor insere 3 blocos de 10 no compartimento 10 do Dual Board. A criança sabe que o resultado é 30. Então, os três blocos de 10 são voltados de modo a caber horizontalmente ao em vez de verticalmente, e pergunta-se à criança quantos três igualam três dezenas. Colocando agora os tres no topo dos blocos 10 a criança descobre o fato: $3 \times 10 = 10 \times 3$. Ao mesmo tempo vemos que, estruturalmente: 3 vezes 10 não é 10 vezes 3. O resultado do número é o mesmo 30 unidades, mas no primeiro caso nós temos blocos 10 eo número 3 indica quantos há. No segundo caso temos bloco 3 eo número 10 indica quantos. Há uma identidade numérica, produzindo dois retângulos congruentes; mas suas estruturas diferem porque os dois fatores desempenham papéis diferentes; um é o multiplicador, (o ativo) e o outro é o multiplicando, que nos dá o tamanho da fileira que é produzida tantas vezes quanto o multiplicador indica. O multiplicador no primeiro caso é 3, no segundo é 10. Deve-se à estrutura decimal de nosso sistema de número a particularidade especial do trabalho com 10 que nós sabemos quantas unidades há em cada múltiplo. Três blocos de 10 mostram as 30 unidades; nos a notação expressa por um três no lugar das dezenas, mas as 30 unidades, assim 30. Quando avançamos para outras tabuadas isto não é assim: 5×5 , por exemplo, também significa que podemos selecionar 5 ao vez de 5 vezes um 5, mas quando é " cinco cinco " ? O total precisa ser expresso em dezenas e unidades.

Estudamos a tabuada de 5 a seguir por causa da relação últimos 5 e dos 10. A criança usa o Dual Board os 10 e uma pilha de 10 blocos de 5. O professor pode primeiro inserir 4 dos blocos 10. A criança verifica que eles importam em 40. Agora 4 blocos de de 5 são colocados no cima das 4 dezenas. A criança vê que eles ocupam apenas a metade do espaço e, de acordo com isso podem apenas ser 20. Ela então remove os blocos 10 e trabalha só com os 5. Quatro blocos de 5 são colocados e o professor forma fileiras de dezenas com eles. A criança reconhece o parentesco com os 10, com os quatro cinco, somente duas fileiras de 10 podem ser construídas. Isto significa $4 \times 5 = 20$.

O professor deveria agora escrever os exemplos pares no quadro negro.

$$\begin{array}{ll}
 2 \times 5 = 10 & 8 \times 5 = \\
 4 \times 5 = & 10 \times 5 = \\
 6 \times 5 = &
 \end{array}$$

A criança verificará que um número par de 5 posto no Dual Board sempre iguala a metade deste número de dezenas completas.

Agora há alguns fatos mais a serem descobertos. Suponhamos que a criança insere 3 cinco no Dual Board. Dois cincos formam 10 e pertencem ao compartimento das dezenas. O terceiro 5 precisa ser colocado no compartimento das unidades. Assim descobre-se que 3 cincos são quinze. Os outros fatos ímpares do 5 são obtidos de modo semelhante. Mas embora as crianças compreendam os fatos pares de 5 de uma vez torna-se necessário mais de um experimento para que esses fatos ímpares. Alguns são muito auxiliados quando se lhes mostra como medir a "cobra" de 5 com uma fileira paralela de 10 como foi feita na adição de colunas. Para variar a professora pode apresentar exemplos de múltiplos em forma de colunas:

$$\begin{array}{cccc}
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 7 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 9 \\ \hline \end{array} &
 \begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

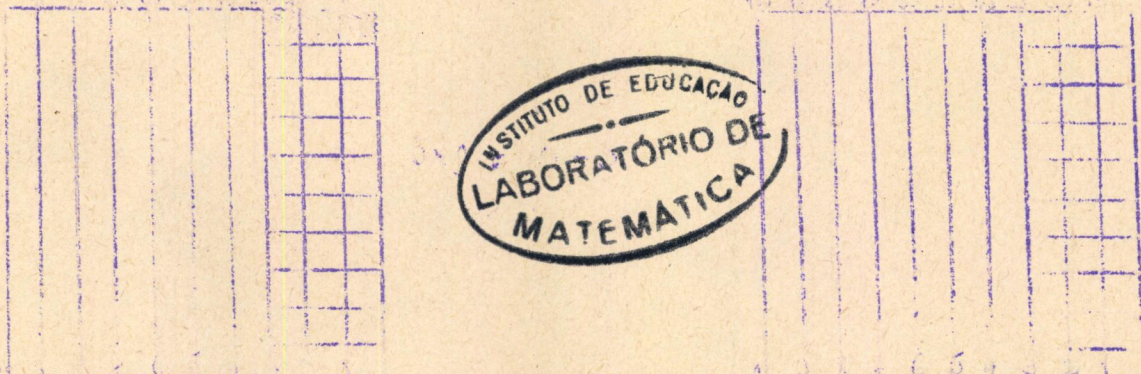
Se, ao chegar ao fato a criança não está segura da resposta, o professor mostra-lhe como pôr os 7 blocos de um extremo a outro para medir que número eles alcançam por meio de dezenas. A criança verá que 6 dos meios alcançam 30 e o sétimo leva-os a 35. As três dezenas - que igualam 6 dos 5 produzem uma impressão muito clara nas crianças.

Assim toda a tabela do 5 é facilmente dominada com absoluta segurança.

A TABUADA DE 9 NO TABOLEIRO DUPLO

A tabuada seguinte com a qual experimentamos é, usualmente, a tabuada de 9. Esta é um desafio à mente e é uma satisfação para o professor, tanto como para o aluno ver quão rapidamente é dominada. A mente capaz de um padrão elevado de raciocínio revela sua perspicácia numa compreensão quasi instantânea do princípio estrutural que relaciona a tabuada de 9 aos fatos do 10.

O Dual Board é usado no experimento seguinte: junto com 10 blocos de 9, 10 cubos simples e as dez dezenas. O professor põe três dezenas no Taboleiro Duplo. A criança reconhece 30. As dezenas são retiradas e substituídas por 3 blocos de 9.



Queremos saber quanto é 3 vezes 9. Nós sabemos quanto é 3 vezes 10, assim simplesmente, pedimos emprestados alguns cubos e completamos os nove até fazer dezenas. A criança dirá novamente "30". O professor remove os cubos emprestados: obviamente temos 30 menos 3 que sabemos ser 27. "Isto é claro", foi o comentário satisfeito de um menino. Ele rapidamente inseriu 5 blocos de 9 e começou a raciocinar: 5 dezenas são 50. Cinco noves são 50 - 5; deve ser 45! "Continua o experimento e a criança acha fato após fato da tabuada de 9 sem ninguém lhe dizer as respostas ou auxiliar na continuação. Uma criança põe cuidadosamente os cubos, um de cada vez e representa cinco noves tirando agora 5 cubos dos 50 emprestados pelas fileiras cheias de 10. Outra simplesmente insere os 5 noves, olha para a lacuna e exclama: "50 - menos 5, 45."

3 X 9 = 30 - 3 = 27
5 X 9 = 50 - 5 = 45
7 X 9 = 70 - 7 = 63
4 X 9 = 40 - 4 = 36
6 X 9 = 60 - 6 = 54
8 X 9 = 80 - 8 = 72
9 X 9 = 90 - 9 = 81
1 X 9 = 9
2 X 9 = 18
10 X 9 = 90

Para o professor que duvida que este processo levará a uma resposta imediata, contaremos como a linguagem da criança muda gradualmente. A princípio as crianças dizem "3 dezenas são 30, 3 noves devem ser 30 menos 3 ou 27. Em breve elas dizem "3 dezenas 30, 3 noves 27". Mais tarde 27 é escrito instantaneamente, de modo que se a criança faz algum raciocínio, ela deve fazê-lo num relâmpago. Quando interrogadas como conseguiram a resposta, nossas crianças simplesmente afirmam: "Nós o sabemos agora".

Naturalmente tal figuração só é possível se os fatos da subtração tiverem sido dominados. Por isso a introdução da tabuada de nove é um teste sobre se o professor faz um bom trabalho ao ensinar o cál-

culo dos números de dois algarismos e se o funcionamento mental da criança está próprio para o nível.

Há um outro experimento com os nove no Tabuleiro Duplo que foi plenamente, digo, planejado para mostrar sem um caminho mais rápido, como o total de unidades representadas por diversos noves pode ser convertido em dezenas e unidades.

A criança insere qualquer número de noves no compartimento das dezenas no Tabuleiro Duplo, digamos 4. Então o último bloco nove deve ser trocado por nove cubos simples. Para completar as 3 naves para dezenas, a criança deve usar três dos cubos de última fileira de 9. O resto vai para o compartimento das unidades. Assim a criança descobre que 4 noves formam 3 dezenas e um resto de 6 unidades, ou, $4 \times 9 = 36$. O experimento pode ser continuado enquanto ele interessa a criança e ela obtém fatos como os seguintes:

$$4 \times 9 = 36 \quad 3 \times 9 = 27 \quad 8 \times 9 = 72 \quad e \quad 6 \times 9 = 54$$

Agora olhem para os dígitos da resposta. Sua soma é sempre 9: "Que interessante" disse um menino que foi rápido em compreender a vantagem dessa relação. O fato 9 nos 40 deve ser 45, nos 70 deve ser 72 e assim por diante. Através desse truque a tabuada de 9 se torna uma amiga íntima.



A TABUADA DE 2 BASEADA NA DUPLICAÇÃO

O objetivo desse passo é apontar à criança o aspecto característico da tabuada de 2: que um dado número de dois dá o mesmo resultado que é obtido duplicando-se o número em questão. De uma vez que a criança está segura dos duplos de 1 a 10, ela dominará a tabuada de dois sem dificuldade alguma.

Nos experimentos seguintes os blocos unidos e o conjunto de multiplicação dos blocos 2 são usados. Qualquer número de dois é colocado a lado. Suponhamos que há seis fileiras de blocos 2; o professor então coloca dois dos blocos seis em cima dos dois. Assim a criança verifica a relação entre os dois conjuntos de blocos e, desde que ela sabe que dois seis igualam 12, ela escreve $6 \times 2 = 12$. A criança pode então trabalhar sozinha, descobrindo que oito dos blocos dois igualam dois blocos oito, quatro de dois igualam dois de quatro e assim por diante.

As crianças que sabem como duplicar os números de 1 a 10, geralmente precisam somente uma demonstração para dominar a tabuada de 2.

A TABUADA DE 3 NA PISTA DE NÚMEROS

O objetivo desse passo é levar a criança a dominar a tabuada de 3, mostrando-lhe ao mesmo tempo um aspecto novo da multiplicação. As primeiras 3 seções da Pista dos Números (1 a 30) são usadas nestes experimentos com os blocos 3, 8 cubos de qualquer cor, e 2 cubos vermelhos. O professor pede às crianças para achar a escala 3. A criança insere um bloco 3 que alcança um marco 3 da pista. O professor diz-lhe para colocar um cubo no 3 como um "marco".

Um segundo 5 é inserido e alcança o seis. Enquanto isso a criança pode registrar os passos à medida que vai prosseguindo: $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$ e assim por diante. O experimento continua até que os dez marcos estão colocados e a escala está claramente visível. O professor pede à criança para apontar o último marco. É 30 e a criança sabe que ela necessita todos os 10 três para chegar lá. O professor pode a seguir perguntar pelo quanto marco na escala. Ela o encontra no meio da escala, como 15, 5 dos três são necessários para chegar a ele.

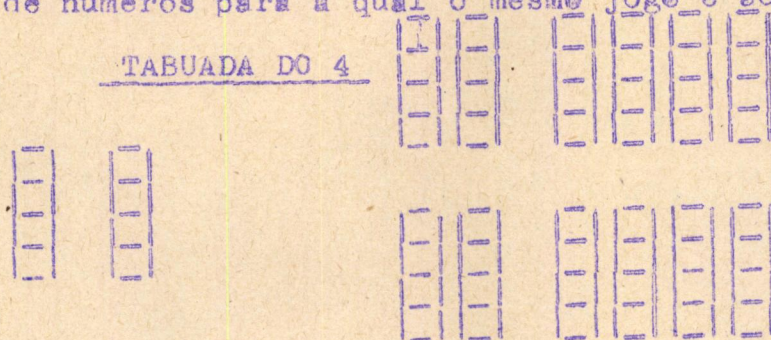
Agora o segundo ato do jogo começa. Os marcos são removidos e o professor pede à criança que os ponha de volta de acordo com as suas ordens. Ele põe um cubo vermelho no fim da escala do 3, como o décimo marco. Isto é naturalmente, 30, e ele escreve $10 \times 3 = 30$.

Agora o outro cubo vermelho é posto como quinto marco = 15; ele escreve $5 \times 3 = 15$. O marco seguinte subindo a escala é o sexto = 12 que ele registra. A medida que isto continua para cada pico da escala de 3, a criança se torna cada vez melhor orientada, especialmente com respeito aos picos salientes 5 e 10.

A fim de imprimir esta escala mais claramente em suas mentes diversas crianças podem competir num jogo sempre excitante com a pista dos números, na qual cada criança usa cubos de cores diferentes.

Cada uma se revêsa com um "spinner" que mostra os números de 1 a 10. Se o spinner aponta 9 a criança coloca o marco no espaço próprio (27), em cima de qualquer outro que já esteja lá. A cor do cubo mais de cima no fim do jogo decide a qual pico pertence.

Alguns de nossos visitantes sorriem compreensivamente quando se lhes diz que o entusiasmo das do 3º ano é devido a um jogo de competição. Mas eles ouvem o que as crianças dizem quando colocam seus cubos, eles quasi não podem acreditar em seus ouvidos. "Hi, recebi um 8 e 8×3 é 24, assim estou no cume agora!" " 3×3 é 9, e aqui vai o meu cubo!" " 7×3 é 21, estou certo que o Branco ganhará!" Toda a escala é apontada, enquanto a figura da escala de 3 se torna inesquecível. Depois de pouco tempo as crianças estão prontas para outra escala de números para a qual o mesmo jogo é adotado.

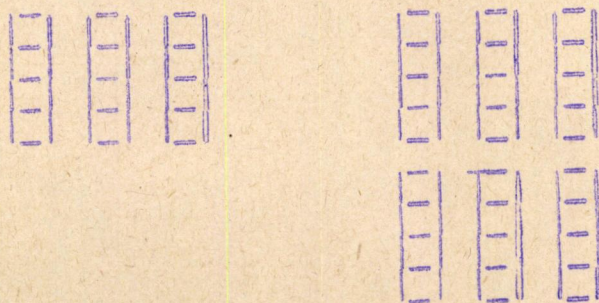


A Tabuada do quatro é muitas vezes ensinada exatamente com o mesmo processo da do três. Achamos no entanto variar, conveniente variar para que se forme através de outros processos uma representação mais nítida na mente da criança. Ensinando a tabuada de 4, nós usamos os dez blocos 4 agrupados em configurações de famílias de números. O professor pode colocar os blocos 4, 2 a 2 próximos um do outro como na figura acima. A criança registra $2 \times 4 = 8$.

Então mais dois blocos 4 são arrumados com os primeiros dois para formar quatro. A criança pensa $8 + 8$ e registra $4 \times 4 = 16$. A seguir, mais 4 blocos são agrupados na configuração 8.

A criança pensa $16 + 16$ e reproduz $8 \times 4 = 32$. Alguns professores podem protestar que é mais difícil para a criança abstrair $16 + 16$ de repente. Não o será porém se ela tiver habilidade no cálculo oral. Se uma criança erra (Tem dificuldades) pedimos-lhe para representar $15 + 15 + 2 =$

O experimento continua com 3 blocos 4. Veja-se a figura abaixo:



A criança encontra e registra $3 \times 4 = 12$. Três blocos 4 mais são acrescentados para formar a configuração 6. A criança pensa $12 + 12$ e registra $6 \times 4 = 24$.


Agora a criança precisa raciocinar o fato 7. $7 \times 4 = 28$. Depois do fato 6 ter sido bem dominado, o fato 7 pode ser derivado dele, pelo acréscimo de outro 4 ao 24.

O professor porém não repetirá este experimento. Ao contrário deixaria a criança praticar com o jogo dos picos na Pista dos números.

ros, com os 4. Ela já sabe 5×4 e 9×4 , 1×4 e 10×4 ; alguns fatos serão conhecidos das configurações, e reste seria encontrado estudando os picos da escala de 4.

A TABUADA DO 6 NA PISTA DOS NÚMEROS

O passo seguinte é mostrar como a tabuada de 6 pode ser acrescentada a estas que a criança já domina. O jogo de marco descrito previamente pode, naturalmente, ser usado para o estudo da tabuada de 6. Mas para variar o professor pode propor um jogo de dados de "Vai e para" com a pista de Números de 1 a 100 e os 10 blocos de 6. Quando o dado marca: Vai! o jogador põe um bloco 6 diretamente na Pista de Números até o marco 6. Com o seguinte "Vai!" ele põe outro bloco até 12. Assim ele encontra uma baliza após outra: 18, 24, 30 e assim por diante, até 60, e pode se revezar com um parceiro que segura 10 cubos simples para serem colocados ao lado da Pista de Números também como picos de 6. O jogador que primeiro alcançar 60 ganha. Ambas crianças elham para as balizas que encontraram e marcaram durante o jogo e escrevem os fatos dos 6. (Este é outro jogo que pode igualmente ser jogado por times). Antes dos blocos serem removidos, o professor pode traçar uma tabuada desses fatos dos 6 no quadro negro e decidir com as crianças que fatos são conhecidos e quais deveriam ser estudados.

Fatos conhecidos	Processo de pensamento através de processo	Fatos derivados	
$1 \times 6 = 6$ $2 \times 6 = 12$ $3 \times 6 = 18$ $4 \times 6 = 24$ $5 \times 6 = 30$			
$6 \times 6 = 36$	$5 \times 6 = 30$ $6 \times 6 = 30 + 6$		
$7 \times 6 =$	$7 \times 3 = 21$ $7 \times 6 = 42$		$7 \times 6 = 42$
$8 \times 6 =$	$4 \times 6 = 24$ $8 \times 6 = 48$		$8 \times 6 = 48$
$9 \times 6 = 54$ $10 \times 6 = 60$			

O professor descobrirá, geralmente, que, conforme se vê no quadro acima, há somente 3 fatos novos de multiplicação para serem estudados cuidadosamente: 6×6 , 7×6 e 8×6 . Descobri que o método acima de raciocínio apela para a maioria das crianças e se encarrega dos fatos a serem aprendidos.

DOMÍNIO DA TABUADA DO 7 E DO 8

O domínio da tabuada de 7 é facilmente adquirido (com exceção de 2 fatos) já que esses fatos são prontamente conhecidos na forma reversa pelo estudo das outras tabuadas. Os 2 fatos que são atualmente desconhecidos são: 7×7 e 8×7 ; 6×7 e 4×7 por exemplo, podem ser derivados dos fatos 7×6 e 7×4 . Na tabuada de 8 o único fato desconhecido é 8×8 . Todos os restantes são facilmente derivados dos fatos reversos. O professor dá à criança 10 cubos e pede-lhe que coleque os marcos do 7. Se ela protesta que não conhece os picos de 7, deixa-a descobrir que todos os fatos do 7 das outras tabuadas aparecem como picos na escala de 7. Ele pode colocar os blocos/através dos picos das escalas de 4 e os blocos 7 através da pista como picos dos 7. Deste modo ela vê claramente que as duas escalas se encontram no 28 que é o quarto marcação escala de 7 e o 72 na escala 4. Da mesma forma a escala de 6 e a de 7 se encontram no 42 que é tanto 7×6 como 6×7 . Então a criança compreende a estrutura das escalas interceptantes que têm múltiplos comuns. Isto é uma descoberta significativa para ela que estará ansiosa para experimentar com a escala de 8.

Ela põe os marcos como "post" das outras escalas. Esta está certa de 8 X 1, 8X2, 8 X 3, etc., e muito elegantemente coloca os cubos de 8, 16, 24, 32, etc., como se ela tivesse muitas vezes experimentado com a escala de 8. O único fato que ela não conhece é $8 \times 8 = 64$, é o único pico que não apareceu nos outros experimentos.

A MÁQUINA DA MULTIPLICAÇÃO

A máquina da multiplicação é um meio para testar a multiplicação e a divisão. Tem a forma de um retângulo que tem a largura de 11 blocos unidos e a altura de 10 blocos unidos. Na extremidade, (geralmente escondida) por faixas que formam uma segunda camada) há uma folha de papel na qual é impressa a Tábua de Pitágoras. Se a criança deseja verificar seu conhecimento da tabuada de 5, por ex., um guia vertical é colocado na quinta coluna. À esquerda da coluna há jogar para 1 a 10 blocos de 5, um abaixo de outro. Quando a faixa cobrindo essa quinta coluna é movida para baixo de lugar a lugar, ela descobre os múltiplos de 5. Se um bloco de 5 é inserido e a faixa que cobre é abaixada uma unidade, o 5 aparece e assim por diante, até 50. Antes de movimentar a faixa para baixo para deixar a descoberta a criança deveria experimentar seu conhecimento, usando a máquina somente para verificar suas respostas. Ao testar a criança com exemplos de todas as tabuadas, o professor poderia habilitar a forma de equação e preparar para a multiplicação pelo uso da forma em coluna. Os exemplos deveriam incluir os fatos de zero e os fatos da tabuada de 1 com os quais iniciamos a multiplicação.

6	4	8	0	1	3	5
X 7	X 8	X 1	X 9	X 6	X 0	X 9

Se esses forem resolvidos sem erro algum e com compreensão a criança pode ser conduzida ao estudo ao estudo da divisão.



REALIZAÇÕES (ACHIEVEMENTS)

Num simples diagrama podemos resumir as realizações da criança nesta etapa:

R	Técnica estrutural
10	Estudada no tabuleiro duplo. O sinal e termos da multiplicação são introduzidos.
5	Estudada no Tabuleiro Duplo em relação às dezenas; dois cincos igual 1 dezena, três cincos = 1 dezena + 5.
9	Estudada no tabuleiro Duplo em relação aos dezes ($5 \times 9 = 3 \times 10 - 3 = 27$).
2	Resultados encontrados por duplicação: $4 \times 2 = 2 \times 4$, $6 \times 2 = 2 \times 6$.
3	Estudos da escala três na Pista dos Números.
4	Encontrada por raciocínio aritmético, baseada na estrutura de figuras de números.
6	3 fatos novos: 6×6 , 7×6 , 8×6 derivados de suas relações com os fatos conhecidos.
7	2 fatos novos $- 7 \times 7$, 8×7 - derivados de fatos conhecidos.
8	Um fato novo: 8×8 - derivado de fatos conhecidos.

Não é nenhuma motivação especial ou o interesse pelo jogo que são responsáveis pelo domínio dessa tabuada pelas nossas crianças. Quanto a isso, os jogos só se tornarão a aprendizagem mais divertida. Contudo, o domínio é obtido porque o aspecto característico de cada jogo mostra a estrutura da tabuada que ela está estudando.

Ela pode esquecer fatos isolados, mas pode reconstruí-los em sua mente, porque leva consigo a figura mental da escala como um todo e pode assim representar-se os picos especiais. É importante acatar que ensinamos a multiplicação só depois de ter sido edificado um conhecimento fundamental de adição e subtração. Nossas crianças trabalharam com os duplos, e para elas a duplicação de 12 ou 24 é um prazer. Quando uma criança vem para auxílio terapêutico em multiplicação nós, geralmente, temos de conduzi-la de volta um a um a todos os fundamentos em adição e subtração.

As crianças usarão suas habilidades recentemente adquiridas em multiplicação no estudo da divisão. Nenhuma criança que tenha jogado o jogo de Marco na Pista dos Números se sentirá perplexa.

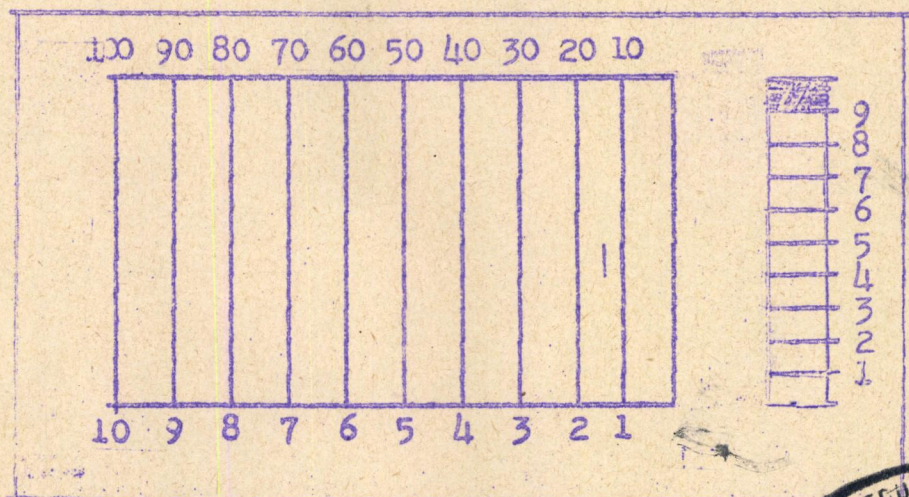
quando confrontadas com qualquer dos picos nas várias escalas e solicitada a encontrar quantos três, setes ou oitos (ou qualquer outro) estão contidos nele.

A criança aprende todas as tabuadas, de modo a ter uma resposta rápida a questões tais como 3×4 . Mas o que é que representa uma resposta pronta? Representa transformar instantaneamente os três e quatro em doze (12) em nossa denominação de dezenas e unidades. Se um homem nos contar que em seu passeio ele viu três vezes quatro passaros, voando sobre os campos, ele realmente, não nos contou quantos passaros ele viu. Os passaros precisam ser medidos em dez, nossa medida padrão (standardt).

O homem faria melhor contando que viu doze passaros.

Nossas crianças viram, no tabuleiro duplo como qualquer quantidade pode assim ser agrupada em dezenas e unidades. Esta compreensão prepara o caminho para o estudo posterior de números denominados (computação com pesos e medidas).

TABULEIRO DUPLO



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
LABORATÓRIO DE
MATEMÁTICA

Aprovada em 1989
Westphalia



CHILDREN DISCOVER ARITHMETIC - Catherine Stern

MULTIPLICAÇÃO

Natureza da Tarefa

Para muitos professores multiplicação e divisão significa exercitar tabuadas. Fatos tais como 7×6 e $72 \div 8$ precisam ser memorizados; o aluno repete sempre essas combinações até sabê-las, finalmente. Presentemente, contudo, multiplicação e divisão são temas fascinantes. Juntos eles envolvem uma nova aproximação (approach) para a descoberta das relações entre os números e não lidam com fatos desligados que devem ser apreendidos peça por peça. Cada tabuada de multiplicação não mostra somente uma estrutura clara que é facilmente entendida e dominada; as várias tabuadas mesmas mostram tal interrelação que não há dificuldade para re-presentar todos os fatos de que se necessita.

A relação entre multiplicação e divisão pode ser claramente demonstrada com o nosso material bem como adição e subtração. É uma interrelação semelhante de "fazer e desfazer", uma aproximação para o mesmo fato de número, partindo de direção opostas.

Multiplicação (e também divisão) é definida pela equação $n \times a = b$ (n vezes a é igual a b). Nessa equação n define o número de vezes que a é produzido, é chamado o multiplicador. Chama-se a o multiplicando: é o número a ser multiplicado. O resultado da multiplicação é marcado por b , o produto.

Se na equação acima n e a são dados e o total b é procurado, estamos lidando com multiplicação. Se a questão é dada de forma que se parte do total b e se pergunta quantas vezes a está contido nela, chama-se o processo divisão. Nesse caso n é o desconhecido emude-se a equação por $n = b \div a$, ou $n = \frac{b}{a}$. Esta equação define a divisão. Chama-se n o quociente (do latim "quotiens", significando "quantas vezes"); ele estabelece o número de vezes que o divisor a está contido no dividendo b .

Há contudo, ainda, outra possibilidade. Podemos perguntar pelo tamanho de a a parte que se obtém quando o total b é dividido em n partes. Podemos achar o seu valor pela equação $a = \frac{b}{n}$ ou $a = \frac{1}{n}$ de b ou a é igual a $\frac{1}{n}$ de b .

Neste tipo de divisão pode ser tratado como tópico separado; é chamado "partitiva" e leva diretamente ao conceito das partes fracionárias.

Até agora a comparação de duas quantidades têm sido sempre expressa ou apontando sua diferença ou declarando o que deve ser somado ao número menor ou subtraindo da maior para torná-los iguais.

Agora a comparação dos dois números se baseará em outro tipo de relação. Se compararmos, por exemplo: 3 e 15, podemos expressar sua relação pelas duas equações: $3 \times 5 = 15$ e $1/5$ de $15 = 3$.

A criança mesma estudará essas relações em vários experimentos. Ela achará que 15 é 5 vezes maior que três e que três é somente um quinto do tamanho de 15. Por isso ela descobrirá a multiplicação e a divisão como novos meios de comparar quantidades.

Uma vez compreendida a interconexão entre a multiplicação e a divisão, podemos facilmente ver a função oposta das duas operações também.

Multiplicação significa crescimento, não somente por somar alguma coisa, mas por multiplicar qualquer coisa que havia no começo. Contrariamente, a divisão significa: dividir alguma coisa em parte, isto é, diminuir.

Se reproduzimos 5 cinco vezes, isso importa $3+3+3+3+3$, isto é, podemos referir o processo de multiplicação de volta para adição com o uso de parcelas iguais. Semelhantemente se subtrairmos um 3 depois de outro de 15, achamos que há 5 de tais partes em 15. Assim, a divisão se torna uma subtração com subtraídos iguais. Nos experimentos atuais, contudo investigaremos a multiplicação e divisão como conceitos de multiplicar e dividir e não como adição e subtração.

Cada professor pode decidir se deseja ensinar multiplicação primeiro e então divisão ou se ele quer que a criança trabalhe nas duas operações com um número, antes de ir para o número seguinte.

O SIGNIFICADO DAS TÁBUAS DE MULTIPLICAÇÃO

A relação de número expressa pela multiplicação é nova para nós.

Por $5+3$ queremos dizer que há um 5 e um 3 para serem somados; ambas parcelas desempenham o mesmo papel e são representadas pelo bloco 5 mais o bloco 3. Mas 5×3 significa que o 3 deve ser reproduzido 5 vezes para se obter o produto. É um erro dizer que nós multiplicamos dois números - somente um número é multiplicado 5 vezes, e o 3.

A essência da multiplicação é que alguma coisa será tomada - não uma mas diversas vezes. Assim se a criança quer representar a resposta para 5×3 , ela pode agora pegar o seu bloco 3, cinco vezes. O 5 como tal não deve ser visto; o cinco é um operador com uma função diferente do 3 sobre o qual ele opera. A criança poderia achar o mesmo resultado adicionando 5 blocos de 3, mas a tabuada de 3 é um corte rápido pelo qual, após estudo apropriado, ela pode representar total diretamente.

Chegamos às chamadas tábuas de multiplicação, não estudando o fato separado 5×3 ou 6×7 , mas examinando os múltiplos de 3, antes de estudar os de 7. Voltamos atrás à equação que define multiplicação: $\underline{n} \times \underline{a} = \underline{b}$. Se conservarmos \underline{n} constante e deixarmos \underline{a} variar de 1 a 10, conservaremos o mesmo número de partes e deixaremos o tamanho de cada parte crescer. Se $\underline{n} = 4$, chegamos à tábuas seguintes:

$$\begin{aligned} 4 \times 1 &= 4 \\ 4 \times 2 &= 8 \\ 4 \times 3 &= 12, \text{ etc.} \end{aligned}$$



Podemos representar estas relações por uma configuração de 4 no qual nos pegamos a coleção 4, mas mudamos o tamanho de cada 4 partes iguais



Estas gravuras ajudarão mais tarde a mostrar a relação estrutural entre, por exemplo, 2×3 e 4×3 . Contudo, este tipo de tábuas é raramente usado: embora seja interessante porque é a contra-parte da partilha, a espécie de divisão na qual o tamanho de cada parte(a) terá de ser achado, se um número estiver dividido em número estabelecido de partes. A figura acima não vemos somente de modo fácil que $4 \times 3 = 12$; podemos também, concluir que qualquer uma das quatro partes de 12 é 3.

Se agora variarmos o número de partes \underline{n} e conservarmos o tamanho \underline{a} constante chegamos à forma mais usual da tábuas da multiplicação. Quando fazemos $\underline{a} = 4$ e deixamos \underline{n} variar de 1 a 10, achamos:

$$\begin{aligned} 1 \times 4 &= 4 \\ 2 \times 4 &= 8 \\ 3 \times 4 &= 12, \text{ etc. até } 10 \times 4 = 40. \end{aligned}$$

Em muitas experiências da criança achará por si mesma qual é o resultado, quando ela lida com dois ou mais blocos de 4 em lugar de um só. Em Aritmética Estrutural ela descobre estas tábuas e estuda-as, assim de modo que ela possa usar um fato para encontrar um outro relacionado. Ela aprende não somente a interrelação dos fatos simples de uma tábuas, mas também as relações das tabuadas mesmo, como por exemplo, quando ela descobre a interdependência aproximada dos fatos de 9 e do 10.

Em dias que já vão longe as crianças tinham de aprender estas tabuadas de cor. Os livros-textos modernos insistem em que os fatos simples da multiplicação de todas as tabuadas devem ser praticados e aprendidos separadamente.

No ensino de Aritmética Estrutural evitamos o exercício tão ferverosamente como rejeitamos o separar a parte das tabuadas como peças sem relação.

Mostraremos como a criança será capaz de reconstruir qualquer fato da multiplicação tão facilmente como os fatos da adição e subtração - neste tempo já dominado.

EXPERIMENTOS QUE ENSINAM MULTIPLICAÇÃO

Em Aritmética Estrutural não desenvolvemos respostas de papa

gais para as questões de multiplicações. Nós visamos que a criança entenda o significado básico da multiplicação, deduzindo que ela possa derivar qualquer fato dos princípios entendidos. Para verificar a aprendizagem e interesse, nós lhe apresentamos alguns experimentos realizados em multiplicação.



PRIMEIROS EXPERIMENTOS EM MULTIPLICAÇÃO

Há dez conjuntos de multiplicação dos blocos unidos. Cada um contém dez blocos da mesma qualidade; há 10 um; 10 dois; 10 três; até 10 dez.

Um dos conjuntos de multiplicação - por exemplo - o bloco de 10 blocos dois é colocado numa mesa próxima. Pede-se à criança que traga ao professor um dos blocos dois. Feito isso, a criança executa três mais dêses recadas. A criança geralmente soma os blocos e anuncia com o último bloco que eles imperbam em 6 todos juntos. Isto pode ser apenas de como correte, mas não importa no jôgo. A seguir, pede-se à criança que traga 5 vezes um dois. A criança raramente faz isso. Quase tôdas as vezes ela diz: "Por que hei de ir 5 vezes?" Não possa trazer cinco blocos de dois numa vez? Isto é exatamente o que se esperava que elas descobrissem: um simples bloco de 2 tomado 5 vezes é o mesmo que 5 blocos de 2 tomados de uma vez.

Se a criança parece interessada em descobrir o total, ela está pronta para o passo seguinte. Ela pode inserir os blocos na "pista dos números" e encontrar que 5 dois alcançam o marco 10. Dizemos-lhe que tal fato se expressa como "cinco vezes dois é igual a dez" e que usando o novo sinal X para vezes ela pode registrar sua descoberta: $5 \times 2 = 10$.

Para crianças que entendam este passo, o professor usa cartões com ordens neles: 3×3 , 1×6 , 6×1 , e assim por diante. Todos os tipos de blocos são espalhados nas mesas próximas, entre eles cubos simples. As crianças se revezam apanhando os cartões e fazendo o que eles dizem: 3×3 significa pegar três blocos de três. 1×6 pede por um bloco de seis; 6×1 significa seis blocos de um.

Há uma graça neste jôgo que o torna ainda mais divertido e introduz a noção importante de que significa zero vezes um número. Entre os cartões a criança pode encontrar 9×0 . Ela lê: "nove vezes nenhuma coisa". Grande consternação! Ocasionalmente, bons atores correm para a mesa nove vezes, não agarram nada, bloco nenhum, e finalmente sentam-se sem nada nas mãos. Em outro cartão pode-se encontrar 0×7 . A criança lê: "zero vezes 7". É claro que isto representa nenhuma vez sete ou nada e o jogador orgulhosamente permanece sentado, enquanto as outras crianças movimentam-se a procura de seus blocos.

Este jôgo familiariza a criança com a significação dos exemplos escritos de multiplicação. Sua compreensão de 6×1 ou 1×6 é muito importante para o desenvolvimento dos conceitos claros que são mais vitais em trabalho futuro. Não importa se a criança acha ou não o total para cada exemplo; isto é fácil de fazer por meio da PISTA DE NÚMEROS, se ela estiver interessada.

Este jôgo com os blocos pode ser começado tão cedo quanto a professora deseje, mas nunca depois do estudo das taboadas. Então é geralmente muito tarde. Fatos tais com $1 \times 6 = 6$ e $1 \times 9 = 9$ tornam-se tão completamente aceitos que a criança simplesmente buscará o bloco 6 como resposta a 1×6 sem dar sentido à ação envolvida. Se, contudo, o jôgo é começado com principiantes, as crianças recebem as mais dramáticas impressões sobre o que multiplicar por 1 ou multiplicar por 0 implica.

As taboadas de 10 e 5 no "Dual Board"

O objeto do experimento seguinte é promover a compreensão da taboada de multiplicar e o domínio da taboada de 10 e da taboada de 5. Na primeira experiência a criança usa o DUAL BOARD e os conjuntos de multiplicação de 10. O professor diz: "põe uma vez um 10 no quadro". A criança faz e escreve $1 \times 10 = 10$. A seguir, pode-se pedir que ponha "3 vezes um 10" no quadro. Ela insere 3 blocos de 10 no compartimento das dezenas e registra o 30 na forma nova: $3 \times 10 = 30$. Depois de algum tempo as crianças, com suas próprias palavras, "tomam o jeito da coisa" e escrevem toda a taboada.



$$\begin{aligned}
 1 \times 10 &= 10 \\
 2 \times 10 &= 20 \\
 3 \times 10 &= 30 \dots \\
 10 \times 10 &= 100
 \end{aligned}$$

Então elas descobrem que sabem as respostas das tabuadas de 10 de experiências anteriores de adição com os blocos 10. Elas precisam apenas aprender a maneira nova de expressar os resultados e tomá-los numa aproximação diferente e estarão prontos para continuarem na tarefa seguinte. Mas há um conceito novo que é importante: os 10 picos na "Pista dos Números" serão achados como constituindo os últimos múltiplos nas escalas individuais (20 é o fim da escala de 2; 40 é o fim da de 4, e assim por diante. Assim tocos os fatos de 10 ocorrem em forma inversa aos dos últimos fatos de cada tabuada.

Uma simples experiência leva à descoberta desta relação básica. O professor insere 3 blocos de 10 no compartimento 10 do Dual Board. A criança sabe que o resultado é 30. Então, os três blocos de 10 são voltados de modo a caber horizontalmente ao em vez de verticalmente, e pergunta-se à criança quantos três igualam três dezenas. Colocando agora os três no topo dos blocos 10 a criança descobre o fato: $3 \times 10 = 10 \times 3$. Ao mesmo tempo vemos que, estruturalmente: 3 vezes 10 não é 10 vezes 3. O resultado do número é o mesmo 30 unidades, mas no primeiro caso nós temos blocos 10 eo número 3 indica quantos há. No segundo caso temos bloco 3 eo número 10 indica quantos. Há uma identidade numérica, produzindo dois retângulos congruentes, mas suas estruturas diferem porque os dois fatores desempenham papéis diferentes; um é o multiplicador, (o ativo) e o outro é o multiplicando, que nos dá o tamanho da fileira que é produzida tantas vezes quanto o multiplicador indica. O multiplicador no primeiro caso é 3, no segundo é 10. Deve-se à estrutura decimal de nosso sistema de número a particularidade especial do trabalho com 10 que nós sabemos quantas unidades há em cada múltiplo. Três blocos de 10 mostram as 30 unidades; nos a notação expressa por um três no lugar das dezenas, mas as 30 unidades, assim 30. Quando avançamos para outras tabuadas isto não é assim: 5×5 , por exemplo, também significa que podemos selecionar 5 ao vez de 5 vezes um 5, mas quando é "cinco cinco" ? O total precisa ser expresso em dezenas e unidades.

Estudamos a tabuada de 5 a seguir por causa da relação últimos 5 e dos 10. A criança usa o Dual Board os 10 e uma pilha de 10 blocos de 5. O professor pode primeiro inserir 6 dos blocos 10. A criança verifica que eles importam em 40. Agora 4 blocos de de 5 são colocados no cima das 4 dezenas. A criança vê que eles ocupam apenas a metade do espaço e, de acordo com isso podem apenas ser 20. Ela então remove os blocos 10 e trabalha só com os 5. Quatro blocos de 5 são colocados, e o professor forma fileiras de dezenas com eles. A criança reconhece o parentesco com os 10, com os quatro cinco, somente duas fileiras de 10 podem ser construídas. Isto significa $4 \times 5 = 20$.

O professor deveria agora escrever os exemplos pares no quadro negro.

$$\begin{array}{ll}
 2 \times 5 = 10 & 8 \times 5 = \\
 4 \times 5 = & 10 \times 5 = \\
 6 \times 5 = &
 \end{array}$$

A criança verificará que um número par de 5 posto no Dual Board sempre iguala a metade deste número de dezenas completas.

Agora há alguns fatos mais a serem descobertos. Suponhamos que a criança insere 3 cinco no Dual Board. Dois cincos formam 10 e pertencem ao compartimento das dezenas. O terceiro 5 precisa ser colocado no compartimento das unidades. Assim descobre-se que 3 cincos são quinze. Os outros fatos ímpares do 5 são obtidos de modo semelhante. Mas embora as crianças compreendam os fatos pares do 5 de uma vez torna-se necessário mais de um experimento para que esses fatos ímpares. Alguns são muito auxiliados quando se lhes mostra como medir a "cobra" de 5 com uma fileira paralela de 10 como foi feita na adição de colunas. Para variar a professora pode apresentar exemplos de múltiplos em forma de colunas:

$$\begin{array}{cccc}
 5 & 5 & 5 & 5 \\
 \times 4 & \times 7 & \times 9 & \times 3
 \end{array}$$

Se, ao chegar ao fato a criança não está segura da resposta, o professor mostra-lhe como pôr os 7 blocos de um extremo a outro para medir que número eles alcançam por meio de dezenas. A criança verá que o dos meios alcançam 30 e o sétimo leva-os a 35. As tres dezenas - que igualam o dos 5 produzem uma impressão muito clara nas crianças.

Assim toda a tabela do 5 é facilmente dominada com absoluta segurança.

A TABUADA DE 9 NO TABOLEIRO DUPLO

A tabuada seguinte com a qual experimentamos é, usualmente, a tabuada de 9. Esta é um desafio à mente e é uma satisfação para o professor, tanto como para o aluno ver quão rapidamente é dominada. A mente capaz de um padrão elevado de raciocínio revela sua perspicácia numa compreensão quasi instantânea do princípio estrutural que relaciona a tabuada de 9 aos fatos do 10.

O Dual Board é usado no experimento seguinte: junto com 10 blocos de 9, 10 cubos simples e as dez dezenas. O professor põe três dezenas no Taboleiro Duplo. A criança reconhece 30. As dezenas são retiradas e substituídas por 3 blocos de 9.



Queremos saber quanto é 3 vezes 9. Nós sabemos quanto é 3 vezes 10, assim simplesmente, pedimos emprestados alguns cubos e completamos os nove até fazer dezenas. A criança dirá novamente "30". O professor remove os cubos emprestados: obviamente temos 30 menos 3 que sabemos ser 27. "Isto é claro", foi o comentário satisfeito de um menino. Ele rapidamente inseriu 5 blocos de 9 e começou a raciocinar: 5 dezenas são 50. Cinco noves são 50 - 5; deve ser 45!" Continua o experimento e a criança acha fato após fato da tabuada de 9 sem ninguém lhe dizer as respostas ou auxiliar na continuação. Uma criança põe cuidadosamente os cubos, um de cada vez e representa cinco noves tirando agora 5 cubos dos 50 emprestados pelas fileiras cheias de 10. Outra simplesmente insere os 5 noves, olha para a lacuna e exclama: "50 - menos 5, 45."

3 X 9 = 30 - 3 = 27
5 X 9 = 50 - 5 = 45
7 X 9 = 70 - 7 = 63
4 X 9 = 40 - 4 = 36
6 X 9 = 60 - 6 = 54
8 X 9 = 80 - 8 = 72
9 X 9 = 90 - 9 = 81
1 X 9 = 9
2 X 9 = 18
10 X 9 = 90



Para o professor que duvida que este processo levará a uma resposta imediata, contaremos como a linguagem da criança muda gradualmente. A princípio as crianças dizem "3 dezenas são 30, 3 noves devem ser 30 menos 3 ou 27. Em breve elas dizem "3 dezenas 30, 3 noves 27". Mais tarde 27 é escrito instantaneamente, de modo que se a criança faz algum raciocínio, ela deve fazê-lo num relâmpago. Quando interrogadas como conseguiram a resposta, nossas crianças simplesmente afirmam: "Nós o sabemos agora".

Naturalmente tal figuração só é possível se os fatos da subtração tiverem sido dominados. Por isso a introdução da tabuada de nove é um teste sobre se o professor faz um bom trabalho ao ensinar o cál-

cujo dos números de dois algarismos e se o funcionamento da criança está próprio para o nível.

Há um outro experimento com os nove no tabuleiro duplo que foi plenamente, digo, planejado para mostrar um caminho mais rápido, como o total de unidades representadas por diversos noves pode ser convertido em dezenas e unidades.

A criança insere qualquer número de noves no compartimento das dezenas no Tabuleiro Duplo, digamos 4. Então o último bloco nove deve ser trocado por nove cubos simples. Para completar os 3 noves para dezenas, a criança deve usar tres dos cubos da última fileira de 9. O resto vai para o compartimento das unidades. Assim a criança descobre que 4 noves formam 3 dezenas e um resto de 6 unidades, ou, $4 \times 9 = 36$. O experimento pode ser continuado enquanto ele interessa a criança e ela obtém fatos como os seguintes:

$$4 \times 9 = 36 \quad 3 \times 9 = 27 \quad 8 \times 9 = 72 \quad e \quad 6 \times 9 = 54$$

Agora olhem para os dígitos da resposta. Sua soma é sempre 9: "Que interessante," disse um menino que foi rápido em compreender a vantagem dessa relação. O fato 9 nos 40 deve ser 45, nos 70 deve ser 72 e assim por diante. Através desse truque aritmético a tabuada de 9 se torna uma amiga íntima.

A TABUADA DE 2 BASEADA NA DUPLICAÇÃO

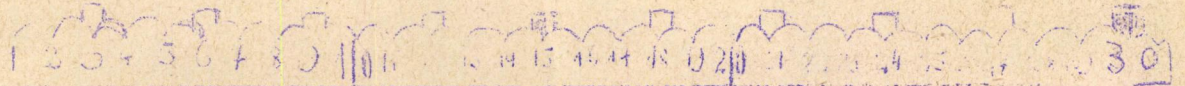
O objetivo desse passo é apontar à criança o aspecto característico da tabuada de 2: que um dado número de dois dá o mesmo resultado que é obtido duplicando-se o número em questão. De uma vez que a criança está segura dos duplos de 1 a 10, ela dominará a tabuada de dois sem dificuldade alguma.

Nos experimentos seguintes os blocos unidos e o conjunto de multiplicação dos blocos 2 são usados. Qualquer número de dois é colocado a lado. Suponhamos que há seis fileiras de blocos 2; o professor então coloca dois dos blocos seis em cima dos dois. Assim a criança verifica a relação entre os dois conjuntos de blocos e desde que ela sabe que dois seis igualam 12, ela escreve $6 \times 2 = 12$. A criança pode então trabalhar sozinha, descobrindo que oito dos blocos dois igualam dois blocos oito, quatro de dois igualam dois de quatro e assim por diante.

As crianças que sabem como duplicar os números de 1 a 10, geralmente precisam somente uma demonstração para dominar a tabuada de 2.

A TABUADA DE 3 NA PISTA DE NÚMEROS

O objetivo desse passo é levar a criança a dominar a tabuada de 3, mostrando-lhe ao mesmo tempo um aspecto novo da multiplicação. As primeiras 3 seções da Pista dos Números (1 a 30) são usadas nestes experimentos com os blocos 3, 8 cubos de qualquer cor, e 2 cubos vermelhos. O professor pede a crianças para achar a escala 3. A criança insere um bloco 3 que alcança um marco 3 da pista. O professor diz-lhe para colocar um cubo no 3 como um "marco".



Um segundo 5 é inserido e alcança o seis. Enquanto isso a criança pode registrar os passos à medida que vai prosseguindo: $1 \times 3 = 3$, $2 \times 3 = 6$ e assim por diante. O experimento continua até que os dez marcos estão colocados e a escala está claramente visível. O professor pede à criança para apontar o último marco. É 30 e a criança sabe que ela necessita todos os 10 três para chegar lá. O professor pode seguir perguntar pelo quanto marco na escala. Ela o encontra no meio da escala, como 15, 5 dos três são necessários para chegar a ele.

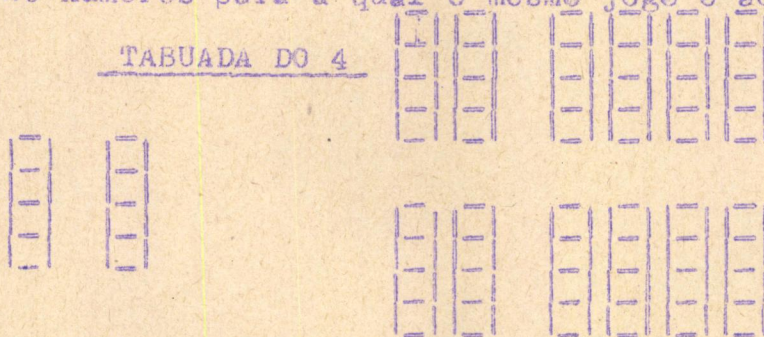
Agora o segundo ato do jogo começa. Os marcos são removidos e o professor pede à criança que os ponha de volta de acordo com as suas ordens. Ele põe um cubo vermelho no fim da escala de 3, como o décimo marco. Isto é naturalmente, 30, e ele escreve $10 \times 3 = 30$.

Agora o outro cubo vermelho é posto como quinto marce = 15; ele escreve $5 \times 3 = 15$. O marce seguinte subindo a escala é o sexto = 12 que ele registra. A medida que isto continua para cada pice da escala de 3, a criança se torna cada vez melhor orientada, especialmente com respeito aos picos salientes 5 e 10.

A fim de imprimir esta escalas mais claramente em suas mentes diversas crianças podem competir num jogo sempre excitante com a pista dos números, na qual cada criança usa cubos de cores diferentes.

Cada uma se revêsa com um "spinner" que mostra os números de 1 a 10. Se o spinner aponta 9 a criança coloca o marce no espaço próprio (27), em cima de qualquer outro que já esteja lá. A cor do cubo mais de cima no fim do jogo decide a qual pice pertence.

Alguns de nossos visitantes serriem compreensivamente quando se lhes diz que o entusiasmo das do 3º ano é devido a um jogo de competição. Mas eles ouvem o que as crianças dizem quando colocam seus cubos, eles quasi não podem acreditar em seus ouvidos. "Hi, recebi um 8 e 8×3 é 24, assim estou no cume agora!" " 3×3 é 9, e aqui vai o meu cubo!" " 7×3 é 21, estou certo que o Branco ganhará!" Toda a escala é apontada, enquanto a figura da escala de 3 se torna inesquecível. Depois de pouco tempo as crianças estão prontas para outra escala de números para a qual o mesmo jogo é adotado.

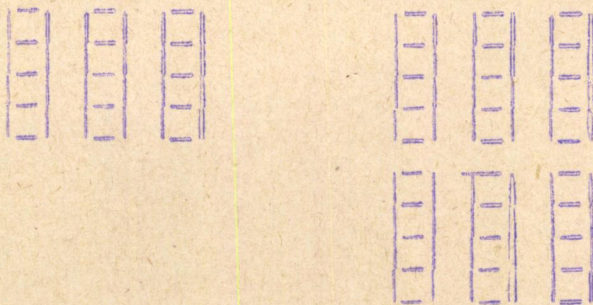


A tabuada do quatro é muitas vezes ensinada exatamente com o mesmo processo da do três. Achamos no entanto variar, conveniente variar para que se forme através de outros processos uma representação mais nítida na mente da criança. Ensinando a tabuada de 4, nós usamos os dez blocos 4 agrupados em configurações de famílias de números. O professor pode colocar os blocos 4, 2 a 2 próximos um do outro como na figura acima. A criança registra $2 \times 4 = 8$.

Então mais dois blocos 4 são arrumados com os primeiros dois para formar quatro. A criança pensa $8 + 8$ e registra $4 \times 4 = 16$. A seguir, mais 4 blocos são agrupados na configuração 8.

A criança pensa $16 + 16$ e reproduz $8 \times 4 = 32$. Alguns professores podem protestar que é mais difícil para a criança abstrair $16 + 16$ de repente. Não o será porém se ela tiver habilidade no cálculo oral. Se uma criança erra (Tem dificuldades) pedimos-lhe para representar $15 + 15 + 2 =$

O experimento continua com 3 blocos 4. Veja-se a figura abaixo:



A criança encontra e registra $3 \times 4 = 12$. Três blocos 4 mais são acrescentados para formar a configuração 6. A criança pensa $12 + 12$ e registra $6 \times 4 = 24$.

Agora a criança precisa raciocinar o fato 7. $7 \times 4 = 28$. Depois do fato 6 ter sido bem dominado, o fato 7 pode ser derivado dele, pelo acréscimo de outro 4 ao 24.

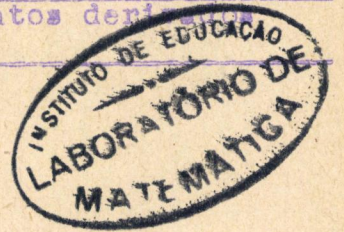
O professor porém não repetiria este experimento. Ao contrário deixaria a criança praticar com o jogo dos picos na pista dos núme -

ros, com as 4. Ela já sabe 5 X 4 e 9 X 4, 1 X 4 e 10 X 4; alguns fatos serão conhecidos das configurações, e reste seria encontrado estudando os picos da escala de 4.

A TABUADA DO 6 NA PISTA DOS NÚMEROS

O passo seguinte é mostrar como a tabuada de 6 pode ser acrescentada a estas que a criança já domina. O jogo de marco descrito previamente pode, naturalmente, ser usado para o estudo da tabuada de 6. Mas para variar o professor pode propor um jogo de dados de "Vai e para" com a pista de Números de 1 a 100 e os 10 blocos de 6. Quando o dado marca: Vai! o jogador põe um bloco 6 diretamente na Pista de Números até o marco 6. Com o seguinte "Vai!" ele põe outro bloco até 12. Assim ele encontra uma baliza após outra: 18, 24, 30 e assim por diante, até 60, e pode se revezar com um parceiro que segura 10 cubos simples para serem colocados ao lado da Pista de Números também como picos de 6. O jogador que primeiro alcançar 60 ganha. Ambas crianças olham para as balizas que encontraram e marcaram durante o jogo e escrevem os fatos dos 6. (Este é outro jogo que pode igualmente ser jogado por times). Antes dos blocos serem removidos, o professor pode traçar uma tabuada desses fatos dos 6 no quadro negro e decidir com as crianças que fatos são conhecidos e quais deveriam ser estudados.

Fatos conhecidos	Processo de pensamento através de processos	Fatos descobertos
1 X 6 = 6 2 X 6 = 12 3 X 6 = 18 4 X 6 = 24 5 X 6 = 30		
6 X 6 = 36	5 X 6 = 30 6 X 6 = 30 + 6	6 X 6 = 36
7 X 6 =	7 X 3 = 21 7 X 6 = 42	7 X 6 = 42
8 X 6 =	4 X 6 = 24 8 X 6 = 48	8 X 6 = 48
9 X 6 = 54 10 X 6 = 60		



O professor descobrirá, geralmente, que, conforme se vê no quadro acima, há somente 3 fatos novos de multiplicação para serem estudados cuidadosamente: 6 X 6, 7 X 6 e 8 X 6. Descobri que o método acima de raciocínio apela para a maioria das crianças e se encarrega dos fatos a serem aprendidos.

DOMÍNIO DA TABUADA DO 7 E DO 8

O domínio da tabuada de 7 é facilmente adquirido (com exceção de 2 fatos) já que esses fatos são prontamente conhecidos na forma reversa pelo estudo das outras tabuadas. Os 2 fatos que são atualmente desconhecidos são: 7 X 7 e 8 X 7, 6 X 7 e 4 X 7 por exemplo, podem ser derivados dos fatos 7 X 6 e 7 X 4. Na tabuada de 8 o único fato desconhecido é 8 X 8. Todos os restantes são facilmente derivados dos fatos reversos. O professor dá à criança 10 cubos e pede-lhe que coleque os marcos do 7. Se ela protesta que não conhece os picos de 7, deixa-a descobrir que todos os fatos do 7 das outras tabuadas aparecem como picos na escala de 7. Ele pode colocar os blocos/através dos picos das escalas de 4 e os blocos 7 através da Pista como picos dos 7. Deste modo ela vê claramente que as duas escalas se encontram no 28 que é o quarto marcos na escala de 7 e o 72 na escala 4. Da mesma forma a escala de 6 e a do 7 se encontram no 42 que é tanto 7 X 6 como 6 X 7. Então a criança compreende a estrutura das escalas interceptantes que têm múltiplos comuns. Isto é uma descoberta significativa para ela que estará ansiosa para experimentar com a escala do 8.

Ela põe os marcos como "post" das outras escalas. Esta está certa de 8 X 1, 8X2, 8 X 3, etc., e muito elegantemente coloca os cubos de 8, 16, 24, 32, etc., como se ela tivesse muitas vezes experimentado com a escala do 8. O único fato que ela não conhece é $8 \times 8 = 64$, é o único pico que não apareceu nos outros experimentos.

A MÁQUINA DA MULTIPLICAÇÃO

A máquina da multiplicação é um meio para testar a multiplicação e a divisão. Tem a forma de um retângulo que tem a largura de 11 blocos unidos e a altura de 10 blocos unidos. Na extremidade, (geralmente escondida por faixas que formam uma segunda camada) há uma folha de papel na qual é impressa a Tábua de Pitágoras. Se a criança deseja verificar seu conhecimento da tabuada de 5, por ex., um guia vertical é colocado na quinta coluna. A esquerda da coluna há jogar para 1 a 10 blocos de 5, um abaixo de outro. Quando a faixa cobre essa quinta coluna é movida para baixo de lugar a lugar, ela descobre os múltiplos de 5. Se um bloco de 5 é inserido e a faixa que cobre é abaixada uma unidade, o 5 aparece e assim por diante, até 50. Antes de movimentar a faixa para baixo para deixar a descoberta a criança deveria experimentar seu conhecimento, usando a máquina somente para verificar suas respostas. Ao testar a criança com exemplos de todas as tabuadas, o professor poderia abandonar a forma de equação e preparar para a multiplicação pela unidade forma em coluna. Os exemplos deveriam incluir os fatos da fatuada tabuada de 1 com os quais iniciamos a multiplicação.

6 4 8 0 1 3 5
 X 7 X 8 X 1 X 9 X 6 X 0 X 9



Se esses forem resolvidos sem erro algum e com precisão a criança pode ser conduzida ao estudo ao estudo da divisão.

REALIZAÇÕES (ACHIEVEMENTS)

Num simples diagrama podemos resumir as realizações da criança nesta etapa:

Tabuada	Técnicas estruturais
10	Estudada no tabuleiro duplo. O sinal e termos da multiplicação são introduzidos.
5	Estudada no Tabuleiro Duplo em relação às dezenas; dois cincos igual 1 dezena, três cincos = 1 dezena + 5.
9	Estudada no Tabuleiro Duplo em relação aos dezes ($3 \times 9 = 3 \times 10 - 3 = 27$).
2	Resultados encontrados por duplicação: $4 \times 2 = 2 \times 4$, $6 \times 2 = 2 \times 6$.
3	Estudos da escala três na Pista dos Números.
4	Encontrada por raciocínio aritmético, baseada na estrutura de figuras de números.
6	3 fatos novos: 6×6 , 7×6 , 8×6 derivados de suas relações com os fatos conhecidos.
7	2 fatos novos $- 7 \times 7$, 8×7 - derivados de fatos conhecidos.
8	Um fato novo: 8×8 - derivado de fatos conhecidos.

Não é nenhuma motivação especial ou o interesse pelo jogo que são responsáveis pelo domínio dessa tabuada pelas nossas crianças. Quanto a isso, os jogos só me tornarão a aprendizagem mais divertida. Contudo, o domínio é obtido porque o aspecto característico de cada jogo mostra a estrutura da tabuada que ela está estudando.

Ela pode esquecer fatos isolados, mas pode reconstruí-los em sua mente, porque leva consigo a figura mental da escala como um todo e pode assim representar-se os picos especiais. É importante acen- tuar que ensinamos a multiplicação só depois de ter sido edificado um conhecimento fundamental de adição e subtração. Nossas crianças trabalharam com os duplos, e para elas a duplicação de 12 ou 24 é um prazer. Quando uma criança vem para auxílio terapêutico em multiplicação nós, geralmente, temos de conduzi-la de volta um a um a cada um dos fundamentos em adição e subtração.

As crianças usarão suas habilidades recentemente adquiridas em multiplicação no estudo da divisão. Nenhuma criança que tenha jogado o jogo do Marco na Pista dos Números se sentirá perplexa.

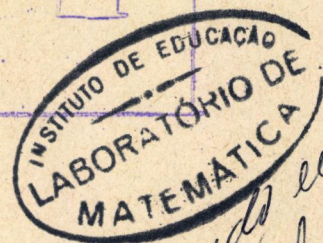
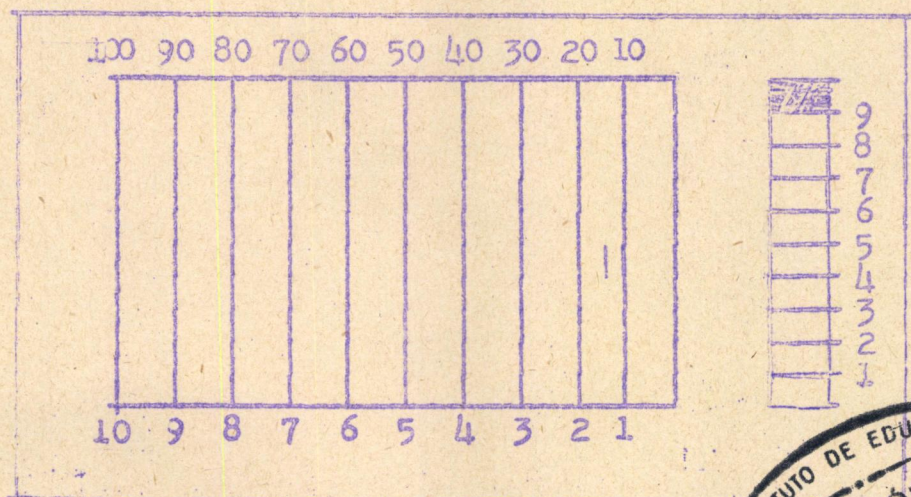
quando confrontadas com qualquer dos picos nas várias escalas e solicitada a encontrar quantos três, setes ou oitos (ou qualquer outro) estão contidos nele.

A criança aprende todas as tabuadas, de modo a ter uma resposta rápida a questões tais como 3×4 . Mas o que é que representa uma resposta pronta? Representa transformar instantaneamente os três e quatro em doze (12) em nossa denominação de dezenas e unidades. Se um homem nos contar que em seu passeio ele viu três vezes quatro passaros, voando sobre os campos, ele realmente, não nos contou quantos passaros ele viu. Os passaros precisam ser medidos em dez, nossa medida padrão (standardt).

O homem faria melhor contando que viu doze passaros.

Nossas crianças viram, no tabuleiro duplo como qualquer quantidade pode assim ser agrupada em dezenas e unidades. Esta compreensão prepara o caminho para o estudo posterior de números denominados (computação com pesos e medidas).

TABULEIRO DUPLO



Arquivado em 1988
W. V. V. V.