Combinações

NO

METODOLOGIA DA MATEMÁTICA

Material fornecido pela Professôra Da. Odila Barros Xavier.

---,---

COMBINAÇÕES

Simples - Algacyr Munhoz Maeder em "Curso de Matemática - 2º Livro Colegial"; 4a. edição, pag. 81.

"Combinação simples - Combinação de m elementos, tomados n a n, são os diversos agrupamentos que se podem formar com os elementos dados, tomando n de cada vez, e de modo que um se destinga de outro por conter um ou mais elementos diferentes.

Os objetos a serem combinados podem agrupar-se um a um, dois a dois, três a três, ... n a n.

Consideremos alguns exemplos.

Com as três primeiras letras do alfabeto podem ser formadas as combinações binárias

ab, ac, bc.

Combinando, duas a duas, as letras a, b, c, e d, obtemos as combinações

ab, bc, cd,
ac, bd,
ad. "

Combinações com repetição - Thales Mello Carvalho em "Matemática - Para os Cursos Clássico e Científico" - 2a. série; 4a. Edição; pags. 73-74.

"Combinações com repetição. Dados m elementos distintos, chamam-se combinações com repetição ou combinações completas de classe p dêsses m elementos a todos os grupamentos de p elementos distintos ou não, tirados dentre os m elementos dados, de modo que cada agrupamento se diferencie de outro pela natureza de seus elementos.

Consideremos m elementos distintos numa certa ordem a_1, a_2, a_3 ......a_m. Suponhamos formadas tôdas as combinações com repetição de classe p-1 dêsse m elementos e que, em cada uma, os elementos estejam ordenados. Demonstra-se, por um raciocínio análogo ao de nº 7, que se formam tôdas as combinações com repetição de classe p dêsses elementos, acrescentando-se a cada combinação de classe p-1 seu último elemento e os elementos seguintes a êle se a combinação não terminar pelo último elemento a_m.

Consideremos, por ex., três elementos a, b, c. De acôrdo com a regra anterior, formam-se suas combinações binárias com repetição, acrecentando-se ao elemento a sucessivamente os elementos a, b e c, ao elemento b sucessivamente b e c, e a do elemento c êle próprio. Obtem-se então

aa bb cc
ab bc
ac

Formam-se anàlogamente as combinações ternárias.............
....

Prosseguindo analògicamente, formam-se as combinações com repetição dos 3 elementos 4 a 4, 5 a 5. Não há, como se vê, limitação para a classe das combinações, o que significa dizer que se podem formar as combinações, com repetição, de classe p de m elementos, sendo $p > m$.

x
x x

"Do mesmo modo, há 55 combinações em subtração e 100 fatos". Há conveniência em serem ensinados em conjunto com os da adição, como <u>unidades de ensino</u> - ex.: 5 7 e os fatos da subtração 12 e 12

5	7	12	12
7	5	-7	-5

Eliminando as combinações com zero, há 45 combinações e 81 fatos tanto em adição, como em subtração. Muitas dessas 45 combinações são mais fáceis do que as outras.

Eliminando-as com 1 e 2, ficam reduzidas a 28 combinações e 49 fatos.

Testes de revisão para graus superiores - Teste 1

<u>Os Fatos mais Difíceis em Adição</u> (pag. 59)

4	5	7	3	4	6	4	8	3			
3	6	7	6	5	8	7	4	9			
8	9	3	5	6	3	9	4	5	8	5	6
8	4	5	9	4	8	5	6	3	9	8	7
3	5	8	4	5	9	6	6	9	3	4	9
3	4	7	4	7	9	3	9	3	7	9	7
8	6	7	6	9	7	4	7	9	5	7	8
3	5	3	6	8	4	3	5	6	5	8	6
7	7	4	8								
9	6	8	6								

Fatos básicos e fatos com dezenas (pag. 62)

Adição - Teste 2 Para os Graus Superbores:

<u>Colunas de Adição</u>

9	2	7	9	6	5	7	8	6	7	8	5
2	8	8	4	6	5	4	4	8	3	2	6
5	5	1	3	1	2	6	5	1	1	7	2
8	9	4	6	9	8	5	7	5	9	4	7
7	6	3	6	5	9	7	4	4	3	6	4
9	7	7	5	7	8	7	6	9	9	9	7
1	6	9	7	7	2	3	8	1	6	3	1
8	7	4	6	1	9	6	7	8	2	4	9
8	9	9	8	8	7	2	5	7			
3	7	1	7	9	6	9	9	5			
3	2	6	4	1	5	4	5	3			
9	9	5	3	8	5	6	5	8			

Subtração - Teste 3 - Fatos difíceis em subtração (pág.71)

14	14	9	15	10	8	16	10	12	8
8	6	4	9	4	3	8	7	6	5

397	384	479	486	374	502	843	846
8	4	9	3	8	8	8	7

105	368	501	679	487	709	397	510
3	9	5	4	9	2	3	6

Multiplicação com 2 algarismos no multiplicador (pág.81)

Teste 7

624	906	153	807	375	137	247
37	58	49	62	17	38	54

462	214	135	809	908	608	395	376
96	21	56	47	39	18	27	94

254	897	768	849
38	16	52	84

Divisão: 81 fatos de 1÷ 1 a 81 ÷ 9.

Eliminando os zeros, 1, 2 e 5 ficam 36 fatos - (pág.85)

Teste 8 - Fatos Difíceis

48 ⌊6	63 ⌊9	54 ⌊6	28 ⌊4	24 ⌊8	9 ⌊3
56 ⌊7	81 ⌊9	36 ⌊9	21 ⌊7	48 ⌊8	24 ⌊4
32 ⌊8	56 ⌊8	63 ⌊7	24 ⌊6	64 ⌊8	24 ⌊3
42 ⌊6	32 ⌊4	12 ⌊3	49 ⌊7	27 ⌊9	18 ⌊6
72 ⌊8	27 ⌊3	42 ⌊7	18 ⌊3	16 ⌊4	36 ⌊4
21 ⌊3	54 ⌊9	28 ⌊7	36 ⌊6	72 ⌊9	12 ⌊4

Teste 9 - Divisão com transporte (pág. 87 - Morton)

2810 ⌊3	3087 ⌊8	933 ⌊5	972 ⌊2		
5591 ⌊6	1077 ⌊4	2550 ⌊9	719 ⌊2	741 ⌊3	
1395 ⌊8	2740 ⌊6	2299 ⌊4	357 ⌊2	1986 ⌊7	
2862 ⌊5	6705 ⌊7	5776 ⌊9	592 ⌊2	1974 ⌊5	2156 ⌊8

3121 |64   2580 |27   2796 |44   2124 |74

6922 |93   822 |16   5518 |57   987 |25   6573 |96

4096 |55   6877 |76   1892 |33   3991 |46   5921 |85

1150 |14   3766 |65

Teste 13 - Divisão: Quociente contendo zeros - pág. 92

13472 |33   43252 |61   12922 |27

5517 |12   13804 |48   57281 |83   28914 |59

20965 |98   28591 |76   17622 |29   8838 |45

9197 |84   20415 |34   15044 |18   26561 |96

42802 |56   39020 |71   47121 |64   47386 |85

6552 |16   40348 |67   25507 |35   61563 |78

85246 |92   5427 |21   15068 |49   53024 |57

37443 |54   20809 |41   62832 |95   6127 |13

31503 |32   32254 |79   14733 |87   19483 |22   25678 |63

Teste 14 - Divisor com 3 Algarismos - pág. 94

588260 |788   20666 |226   361621 |599   97164 |347

526954 |613   69364 |874   288480 |935   129045 |151

319540 |462   532845 |146   463826 |554   172361 |882

188255 |677   321691 |498   325825 |913   150753 |235

32526 |761   166061 |329   240731 |517   231472 |831

23465 |243   408670 |488   406923 |799   222831 |123 são objetos dominantes no ensino do número. Velocidade e precisão são ambos essenciais, mas velocidade de resposta só será acentuada depois que o aluno tenha compreendido o fato numérico e seja capaz de usá-lo em várias condições."

Um alûno dominou um fato básico em adição quando êle tem os seguintes conhecimentos e habilidades:

1. Pode representar o fato com materiais concretos.
2. Sabe que adição significa pôr números juntos.
3. Pode reproduzir o fato prontamente e com segurança pela dramatização, pelo uso do marcador, ou por um ábaco.
4. Descobre que mudando a posição dos números (parcelas) não muda a soma.
5. Sabe como escrever o fato tanto na forma vertical como na horizontal.
6. Pode verificar o resultado pelo uso de outros fatos conhecidos.
7. Pode usar o fato num problema.
8. Pode dar a soma fàcilmente e com segurança.
9. Pode expressar a soma de um fato totalizando 10 ou mais e seus diversos agrupamentos ou nos seus valôres.

Nota - Do mesmo modo se pode verificar em referência à subtração resguardadas suas características peculiares.

Os Fatos Básicos de Subtração.

Adição e subtração são processos intimamente relacionados. Para cada fato de adição, há um fato correspondente de adição; ex.: 3 + 5 e 5 + 3, os fatos correspondentes são 8 - 3 e 8 - 5.

Ensino dos Fatos de Adição e Subtração juntos.

Há poucas pesquisas para determinar se os dois processos devem ser ensinados simultaneamente ou separadamente. Sem desconhecer que o aluno enriquece a significação de 6 + 5 e 5 + 6 quando êle conhece os correspondentes fatos de adição, 11 - 6 e 11 - 5, o autor recomenda que na aprendizagem inicial dos fatos básicos, os dois processos sejam ensinados separadamente. A coisa que é nova para o aluno é a notação ou a representação simbólica do fato. Os dois processos são muito semelhantes em notação, assim sendo parece que o aluno iniciante deva dominar alguns fatos de adição para trabalhar com os correspondentes fatos de subtração.

É importante que o aluno dê significação a cada processo particularmente para não os confundir. O professor deve resolver quando o aluno conhece os fatos cuja soma não excede 6,8 ou 10, e então os dois processos poderão ser apresentados simultaneamente.

o
o o o
o

OS FATOS NUMÉRICOS EM ADIÇÃO

Extr. de "Elementary Arithmetic" de B. Buckingham) -págs.94-99.

Material da Prof. Odila Barros Xavier
Tradução de Júlia Petry

A digressão concernente aos primeiros 100 números visava, precisamente, lançar o fundamento para o "domínio fácil". Domínio implica

Depois de ter passado o quadro uma ou duas vêzes, comece a dizer as respostas, visando a firmeza -não a velocidade, tanto quanto regularidade. Sugere-se que será útil tapar com um lápis, cada resposta à medida que vai sendo dita. Note os fatos em que hesita. Há alguns que lhe são mais difíceis do que os outros. Anote os fatos em que hesita e dê-lhes tratamento especial. Sugere-se depois que pratique êsses 81 fatos diàriamente, até que possa correr sôbre êles a um tempo regular razoàvelmente rápido. Não começe sempre pela ponta esquerda da linha acima. Pode achar interessante marcar seu próprio tempo; mas como foi dito antes, exatidão com um ritmo firme é o desejo principal.

O exercício especial pode ajudar nos fatos de maiores dificuldades. Seis ou oito investigações foram feitas quanto à dificuldade relativa dos fatos de adição e enquanto os investigadores não concordem muito uns com os outros, seus achados são suficientemente merecedores de confiança para justificar a seguinte lista de 18 fatos especialmente difíceis.

7	4	8	8	9	5	9	8	7
5	7	6	9	8	9	6	5	4
7	5	6	6	9	5	8	7	9
8	7	9	8	7	8	7	9	5

Paremos um pouco e apliquemos a essas adições menores e mais curtas, algumas das cousas que conhecemos sôbre êsse processo. Estamos tratando aqui com afirmações generalizadas. 5 + 7 = 12 e todos os outros fatos básicos de adição são afirmações altamente generalizadas. O abstrato número 5 é êle mesmo uma generalização. Significa 5 de alguma coisa. Afirmações semelhantes podem ser feitas sôbre 7 e sôbre 12. Ainda mais evidentemente abstrata e generalizada é a afirmação como um todo. Significa que uma coleção 5 de qualquer coisa, quando combinada com uma coleção de 7 coisas da mesma espécie produz uma coleção de 12 coisas da mesma natureza.

Os 81 fatos da soma								
4	2	6	1	7	2	4	3	9
5	7	2	4	3	2	8	1	5
5	1	4	8	5	6	3	9	6
2	1	7	3	8	9	5	4	7
1	4	9	6	1	5	8	7	3
8	2	7	4	2	4	6	7	8
1	2	7	8	7	8	3	5	4
9	4	5	8	9	1	3	1	6
8	6	5	2	8	1	3	5	1
5	6	9	9	7	3	6	5	7
8	7	1	9	6	7	2	7	6
2	6	5	9	3	1	6	4	8
2	9	3	2	4	8	3	2	1
3	1	7	5	1	9	2	1	6

1. Falamos sôbre fatos diretos e inversos. Ponham-se tais fatos juntos no pensamento: 7 + 3 com 3 + 7, 9 + 4 com 4 + 9, etc.

2. Agrupar de acôrdo com a soma ajudará. Por exemplo, os fatos seguintes fazem 11: 6 + 5   5 + 6   7 + 4   4 + 7; 8 + 3   3 + 8; 9 + 2   2 + 9. Semelhantemente, tôdos os fatos que fazem 10 podem ser pensados e revisados juntos. O mesmo com os que fazem 12, 13, 14, 15 ou 16. Sòmente dois fazem 17; 9 + 8   8 + 9 e sòmente um faz 18, é 9 + 9.

3. Uma vez que os duplos são sempre fáceis, os 14 fatos formados de números adjacentes podem ser tornados igualmente fáceis baseando-se nêles. 3 + 2 e 2 + 3 = 5 porque 2 + 2 = 4; 4 + 3 e 3 + 4 são 7 porque 3 + 3 são 6. 5 + 4 e seu inverso são similarmente, derivados de 4 + 4, 5 + 6 de 5 + 5, e assim com 6 + 7, 7 + 8 e 8 + 9.

4. Uma vez que os fatos que somam 10 são geralmente bem conhecidos (e se não o forem deve-se fazer um esfôrço geral para aprendê-los), todos os fatos que fizerem 11 ou 12 são fàcilmente deduzidos. Há 15 dêles.

5. Reagrupamento em 10 foi mencionado. É especialmente útil. Aplica-se sòmente quando a soma excede 10, mas isso inclue tôdas os fatos mais difíceis. Assim 9 + 4 = 9 + (1 + 3) = (9 + 1) + 3 = 10 + 3. Similarmente, 8 + 4 = (8 + 2) + 2 = 12; 6 + 7 = (6 + 4) + 3 = 13; 9 + 8 = 10 + 7 = 17; etc.

FATOS DE ZERO EM MULTIPLICAÇÃO

Brueckner e Grossnickle - Ed. 1947 - págs. 250-51.

2)

Fatos de zero em multiplicação são usados primeiramente quando se multiplicam números de dois ou mais algarismos. É possivel fazer dois "ensáios" em um jôgo e não obter nenhum ponto. O fato, 2X0 = 0, é o registo escrito dessa experiência.

De modo geral, entretanto, os fatos de zero em multiplicação raramente são usadas isoladas, mas isto não significa que êsses fatos não devam ser aprendidos. Há tanta justificativa para escrever os fatos de zero em multiplicação na forma $\begin{array}{r} 0 \\ \underline{X\ 2} \end{array}$, como para escrever os fatos de 1 na forma $\begin{array}{r} 3 \\ \underline{X\ 1} \end{array}$. Não é necessário multiplicar por 1, exceto em conexão com um número de dois ou mais algarismos, como 12 X 36; mas o aluno aprende os fatos que envolvem a unidade. Êle também generaliza sôbre a resposta quando um número é multiplicado por 1. Neste caso, o produto de 1 x 36 é o próprio número. Êste ponto pode ser desenvolvido como uma generalização que é sempre verdadeira.

Os fatos de zero podem ser apresentados ou como um agrupamento, ou em conexão com cada tabuada. De acôrdo com o 1º plano, umas poucas ilustrações mostram que zero multiplicado por um número, é zero.

Esta é a generalização importante que a classe deverá fazer com relação aos fatos de zero. O professor deverá lembrar-se de que o zero pode ser multiplicado por um número, mas que o inverso não é verdade. Assim, $\begin{array}{r} 0 \\ \underline{X\ 3} \\ 0 \end{array}$, é um fato de multiplicação, mas $\begin{array}{r} 3 \\ \underline{X\ 0} \\ 0 \end{array}$ não o é. Em exemplos como 20 X 48 e 306 X 421, o zero meramente serve como um "ocupante de lugar" (placeholder) e não como um multiplicador ou um operador.