Tradução

K. Lovell

Didactica de las Matematicas

(sus bases psicologicas) Madri

Ediciones Morata

Pag 54-56

Opinião de Piaget

Em 1952, Piaget realizou algumas experiências. Em uma delas, colocavam-se 20 bolas de madeira em uma caixa, umas de côr vermelha e as demais brancas. Perguntava-se à criança se havia maior nº de bolas vermelhas ou maior nº de bolas de madeira. Para responder isto, a criança ao proceder a comparação tem que considerar as bolas em seu duplo aspecto, pois as bolas vermelhas são também de madeira.

Piaget afirma que, até os 7 anos de idade, a criança quase sempre diz que há mais bolas vermelhas que de madeira, porque na caixa tem uma ou 2 bolas brancas e tôdas as outras são vermelhas.

Para as crianças o problema parece ser êste: ao mesmo tempo que concentram sua atenção no grupo de bolas vermelhas, perdem de vista que a totalidade das bolas são de madeira. Assim só podem comparar o grupo das vermelhas com o grupo complementar das bolas brancas. O pensamento da criança, na opinião de Piaget, é demasiadamente influído pelas suas percepções, que podem ser enganadoras.

No início não dá a criança uma noção das relações entre a parte e o todo tão completa como a que o facilitam sôbre as relações das partes entre si. Efetivamente, no começo, suas percepções o conduzem a misturar a extensão e o conteúdo (entendendo este critério como a conexão entre a parte e o todo, sem levar em conta a relação entre as partes) de tal maneira que não pode diferençar aquêle dêste e não compreende a idéia de totalidade (aqui o conjunto total de bolas de madeira) Para Piaget, nem as percepções nem a associação de imagens proporcionam a noção de conjunto, porque, como já vimos, são rígidas, irreversíveis e não podem ser coordenadas de diferentes maneiras.

Mais tarde, o pensamento infantil se fará mais rápido e operativo; será capaz de pensar por ex.: "Tôdas as bolas vermelhas mais tôdas as brancas, igual a todas as bolas de madeira" "Tôdas as bolas de madeira menos tôdas as brancas, igual a tôdas as bolas vermelhas"

Hyde (1959) num estudo realizado em Aden com 144 crianças de 5 a 9 anos repetiu esta experiência e confirmou os resultados de Piaget. No entanto, acrescentou uma observação: - nota de atenção - ainda que a ordem das respostas foi o indicado por Piaget, Hyde duvida ~~que o problema~~ que as crianças vejam o problema como Piaget o explica. Opina que a expectativa, tendência ou inercia mental influi nos resultados. Desde o momento em que a criança vê as bolas, nota que há m.tas poucas de 1 côr e 1 grande quantidade de outra. As crianças menos inteligentes (não sabemos q.tas dessas haviam) tenderiam a considerar como 1 questão sem interêsse que as bolas sejam ou não de madeira. Este seria 1 ex. de tendência expectativa ou atitude adversa que afetaria o pensamento.

O autor dêste livro pode confirmar a maior parte das descobertas em experiências realizadas de Piaget com alunos de escolas primárias e da escola especial E. S. N. sobre a capacidade dos alunos para considerar o todo em relação as partes, ainda q.do os alunos da dita escola não alcançaram a capacidade suficiente até a idade da secundaria. No entanto, as crianças em conjunto captaram melhor as relações entre o todo e as partes, segundo se empregam uns materiais ou outros. Com nosso trabalho se evidenciou que estas relações eram percebidas mais ligeiro q.do se empregavam bolas de côres ou flores fortemente coloridas que com outros materiais.

Piaget indica que as crianças, antes dos 6 anos, podem ter 1 certa intuição dos 1.os n.os até o 6, de maneira semelhante a como parecem ter certos animais. Além disso, as crianças são capazes de contar, mas isso não indica que tenham 1 noção ~~extata~~ exata dos n.os. O tipo seguinte de experiência é bastante elucidativo a este respeito. Situa-se se 1 criança ante 1 fila de 5 fichas, por ex., colocadas sôbre 1 mesa, para que pora dispor outra fila paralela a anterior, de forma que se correspondam as fichas uma a uma. A criança admitirá que em ambas as filas têm o mesmo nº de fichas. Mas, q^do as de 1 fila se separam de forma que a correspondência fique quebrada, a criança, até os 6 ou 7 anos de idade, não poderá afirmar que as 2 filas tenham agora o mesmo nº de fichas.

Novamente parece que sua percepção o induziu ao engano; mas pode dar-se conta de que se 1 fila é agora mais comprida é porque suas fichas estão mais separadas. Q^do pode dar-se conta disto é capaz de representar as ações "~~im~~ in mente" sem necessidade de vê-las concretizadas com o material didático; isto é, o seu pensamento tornou-se operativo e já não tem necessidade de que as fichas de 1 fila estejam frente a outra para compreender que em ambas há o mesmo nº de fichas.

Seu pensamento alcançou o estágio operativo
porém limitando-o a pensar
em relação às situações reais.

Se agora forme filas com objetos diferentes, continua dando-se conta de que o nº de objetos de cada fila permanece constante. Por isto, segundo Piaget para que a criança seja capaz de estabelecer 1 correspondência absoluta, ainda q^do variam as situações é preciso que tenham capacidade suficiente para atingir as a noção de categoria (no sentido lógico) Disto se conclui que, esta última aptidão é a base para atingir o conceito de nº.

Opiniões de Piaget sôbre a idéia da criança sôbre a conservação da matéria (pag 68 a 73)

Nestes últimos anos não se ~~observava~~ sabia até que a maioria das cr. não parecem compreender que a quantidade da matéria permanece invariável, independente da mudança de forma e de posição, até a idade de 7 a 8 anos. Esta ~~descobrimento~~ descoberta nos devemos a Piaget. O conceito de conservação da matéria (ou a invariabilidade da substância) é m^to importante, porque o entendimento só pode ocupar-se, efetivamente, de 1 monte de plastilina, um vaso de água ou 1 coleção de conchas se permanecem invariáveis em sua matéria com independência das diferentes ordenações que podemos fazer de suas partes.

Como já se disse, ao tratar do nº, as investigações de Piaget puseram em evidência que o pensamento da criança entre os 4 e 7 anos está m^to influenciado por suas percepções

Durante este período parece estar tão determinado porque ~~contratiza~~ centraliza sua atenção em 1 aspecto, dimensão ou elemento da situação ignorando os demais. Mas, desde os 7-8 anos em diante é cada vez mais capaz de independizar-se das influências de sua percepção e, na opinião de Piaget, ganha na capacidade de aplicar o pensamento lógico em problemas práticos e em situações concretas. Também, chega a apreciar o significado de seus próprios atos, sua mente vai tornando-se capaz de compreender a reversibilidade de certas operações e deste modo se ~~volta~~ torna cada vez menos dependente da percepção.

De suas numerosas experiências sôbre a conservação de matérias contínuas (por ex: plastilina e água) e descontínuas (ex bolas, conchas) Piaget tira a conclusão que as crianças passam por 3 etapas:

1- não conservação

2- transição

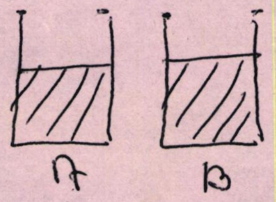
3- conservação.

Em 1 experiência típica se davam às crianças 2 bolas iguais de plastilina, que a criança reconhecia como sendo do mesmo tamanho. Se modificava então a forma de 1 das bolas de modo que se parecesse com 1 salchicha. Na 1ª etapa as crianças negam que a quantidade de plastilina da bola e da salchicha são iguais. Costumavam dar respostas deste tipo: Tem mais, porque a "salchicha" é mais ~~longa~~ comprida. Na etapa de transição chegam ao conceito de conservação da matéria debaixo de certas condições ou num momento determinado, mas, perdendo está idéia q^do^ se mudam as condições ligeiramente. Mas, a partir dos 7 ou 8 anos a criança, segundo Piaget, experimenta a necessidade lógica de manter a conservação da matéria e a sustenta empregando alguns argumentos.

Por ex:, Piaget (1950. p 140 e em 1953 b, p.16) assinala que 1 criança pode ~~decidir~~ dizer, que a salchicha pode voltar a ter a forma de bola, ou o que se perdeu numa direção ganhou em outra, ou que não se ~~ganhou~~ acrescentou ou ~~perdeu~~ tirou nada.

Em outra experiência muito significativa se ~~tomavam~~ enchiam 2 ~~vasias~~ vasilhas idênticas A e B,

até a mesma altura com o líquido ~~vermelho~~ colorido.
As cr. de 4 ~~anos~~ a 6 anos admitiam que a quantidade de líquido era a mesma em ambos.



Na vasilha A se deixava o líquido ~~sem~~ modificação alguma; mas ~~na~~ a B se despejava em outras 2 vazilhas C e D, iguais na forma e no tamanho

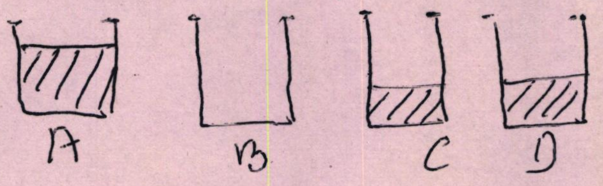


figura 6

a A e B de tal maneira que as quantidades de líquido em C e em D fossem iguais. (figura 6) Então se perguntava a cr., numa linguagem adequada, se a quantidade de líquido que tinham C e D juntas era igual a que tinha A. As cr. de 4 a 6 anos negavam que a quantidade fosse igual q^do viam a água de 1 das vasilhas repartida em 2. Notavam que os níveis de C e D eram + baixos e para eles portanto havia menos líquido, ou se fixavam em que havia 2 vasilhas e consideravam então que havia mais líquido.

~~Tão pouco~~ Todas as crianças de 6 e 7 anos ~~desligavam~~ garantiam que as quantidades de líquido são as mesmas. Q^do o líquido de B ~~se~~ era despejado nas 2 vasilhas C e D, acostumavam a admitir que havia a mesma quantidade. Mas, se se despejava numa vasilha larga (E), de modo que a espessura do líquido fôsse ~~menor~~ mto pequena, ou numa vasilha estreita (F)

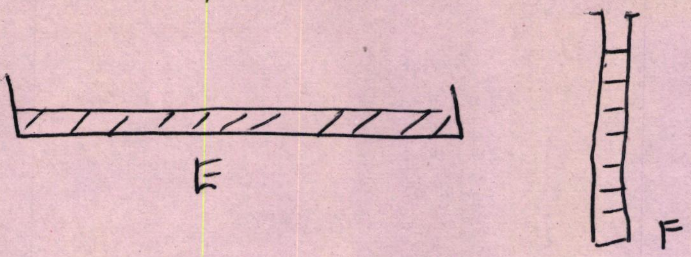


Figura 7

de modo que a coluna de ~~f~~ líquido fôsse m^{to} fina (figura 7) negavam a conservação.

Não parece que ~~isto~~ se deve a falta de compensação ~~da cr.~~ verbal ~~da criança~~ a confusão das crianças, ~~pois~~ visto que admitem a conservação q^{do} as diferenças percebidas são pequenas e negam q^{do} são grandes.

Aos 7 e 8 anos, a cri^{ança} admite a conservação e se mantem firme em sua convicção. Piaget afirma que somente pode alcançar-se este conceito de conservação da matéria q^{do} se dispõe anteriormente de conceitos lógicos. Assegura que a criança é ai capaz inverter mentalmente o processo, ~~bem~~ utilizando bem o conceito lógico da operação inversa, ou pode compreender ~~bem~~ que o perdido numa dimensão se ganhou em outra, ou empregar o conceito lógico de ~~conservação~~ compensação deslocamento de partes (Tirar de 1 lado para pôr em outro)

<u>Novas experiências sobre o conceito de conservação da matéria nas crianças</u> - Lovell ~~y~~ e Ogilvie (1960) informam sôbre o trabalho em que 322 crianças da Inglaterra foram examinados individualmente com objetivo de estudar o desenvolvimento do conceito de conservação da matéria. Se usaram bolas de plastilina de 2 polegadas de diametro (uns 5 cm) Q^{do} a criança

ao começar, era capaz de dar-se conta que a quantidade de plastilina das bolas eram iguais, se considerava apto para a experiência.

Se modelava 1 bola em forma de salchicha e, finalmente se perguntava ~~os~~ a criança sôbre as quantidades de materia da "salchicha" e da bola. A tabela abaixo (tabela 1) mostra a percentagem de crianças que se encontravam em cada 1 das 3 etapas antes mencionadas, segundo o ~~curso~~ ano a que pertenciam da escola primaria (crianças de 7 a 12 anos)

Tabela 1

Nº de crianças	Etapa 3ª conservação %	Etapa 2 Transição %	Etapa 1 Não conservação %
Ano 1º, 83	36	33	31
ano 2º: 65	68	12	20
Ano 3º: 99	74	15	11
Ano 4º: 75	86	9	5

Hyde (1959) também repetiu estas experiências utilizando bolas de plastilina e obteve resultado parecido. Portanto, as etapas descobertas por Piaget foram confirmadas e as ~~contestações~~ respostas dadas pelas crianças ~~estão~~ costumam estar completamente de acordo com as escolhidas por êle. Por outro lado, o trabalho pôs em evidência que o ~~desenvolv~~ desenvolvimento do conceito é mto mais completo do que supôs Piaget. ~~Sem embaraço~~ No entanto, não há duvida que até os 7 ou 8 anos mtas crianças crêem que qdo a substância muda de forma se altera também sua quantidade.

Em 1 experiência mais ampla Lovell e Ogilvie, empregaram 1 tira de ~~borracha~~ elástica. Se perguntava às crianças se havia a mesma quantidade de ~~borracha~~ elástico na tira q^do^ se esticava que no princípio q^do^ estava ~~com~~ sem ~~ta~~ esticada.

Se ~~constatou~~ encontrou-se que 1/3 aproximadamente das crianças que ~~se~~ ~~respondiam~~ afirmavam que não havia a mesma quantidade na experiência com a plastilina, manifestavam que havia a mesma quantidade neste experiência com a tira de borracha.

Hyde descobriu também que algumas crianças que haviam manifestado contra a conservação da matéria na experiência com as bolas de plastilina estavam a favor na experiência realizada com os líquidos que se despejam de 1 vasilha em outras de diferente forma. Ademais, Hyde encontrou que, quando os líquidos das ~~for~~ vasilhas A e B que tinham a mesma quantidade se vertiam nos vasos C e D respectivamente, as crianças que haviam reconhecido a igualdade das quantidades de líquido A e B seguiam reconhecendo-la-a em C e D, apesar da grande diferença da forma perceptíveis dessas ~~vasos~~ recipientes. Figura 8.

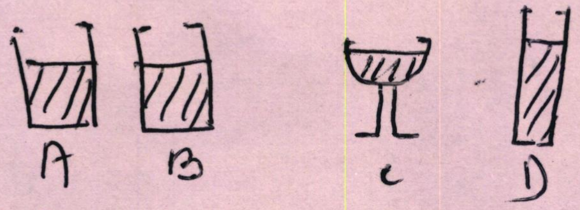
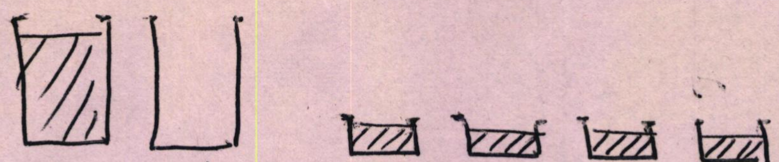


Figura 8.

~~Emquê~~ Contudo, partindo da mesma situação, ~~ao dizer~~ isto é, com a mesma quantidade de líquido A e B e repartindo o líquido de B entre várias vasilhas pequenas (Figura 9)



A B W X Y Z

semelhantes umas a outras, algumas crianças que antes se haviam manifestado conformes com a conservação da matéria, agora negavam que a quantidade total de líquido contido entre tôdas as vasilhas W, X, Y, Z, fôsse igual ao contido em A.

Também Beard (1957) descobriu entre 60 crianças de 6 e 7 anos que alguns que não haviam alcançado a conservação q^{do} se empregavam bolas de plasticine, se deram conta dela q^{do} se ~~vertia~~ deixavam a água de 1 vasilha ~~para~~ em outras menores.

Estas experiências põem claramente em evidência que, q^{do} se trata de quantidades contínuas, as crianças se mostram convencidas da conservação da matéria em 1 situação determinada, não mostram o mesmo convencimento em outra.

Sôbre este ponto, a mais recente descoberta parecem conduzir a conclusões que diferem das de Piaget.

A interpretação que comumente se dá a opinião ~~que esta~~ deste é que, 1 vez alcançado o conceito de conservação da matéria, se mantém em tôdas as situações, ~~bem~~ ainda q^{do} que se empregam quantidades contínuas ou descontínuas. Se esta é a interpretação correta da idéia de Piaget, os resultados de Lovell e Ogilvie, assim como os de Hyde e de Beard, não confirmam seu ponto de vista, que em nossa opinião não ~~aclara~~ esclarece que os ~~rasgos~~ impulsos distintos do pensamento infantil.

Mas ~~para~~ parece ~~bem~~ que o conceito de conservação da matéria só é aplicável ao princípio em determinadas situações e vai ganhando em ~~crescimento~~ profundidade e complexidade a medida que a criança adquire experiência e maturidade. A opinião de Piaget, segundo a qual a criança chega ao conceito ~~de nº~~ qdo é capaz de raciocinar logicamente pode ser aceitada ou não; mas, parece que subestima o papel ~~empregado~~ desempenhado pela experiência adquirida pela criança com o manejo de certos materiais como água, areia, plasticina etc... em diferentes situações. A experiência pura do mundo físico parece afetar a idéia de conservação de matéria mais do que supõe Piaget. Este tema será estudado mais amplamente em outro lugar deste livro. É provável que o conceito de conservação da matéria — e de ~~direito~~ fato todo o conceito — resulte da integração de diversos complexos de impressões passadas (Schemata) que normalmente permanecem fora do campo da consciência e se reforçam e se fazem conscientes a base de multiplas e variadas experiências. A criança usaria o argumento lógico para justificar a aquisição de 1 conceito que, ~~de direito~~ de fato, deveria ser alcançado em 1 campo diferente do lógico. Igualmente, é provável que a experiência e o desenvolvimento do pensamento lógico se ~~excitam~~ excitem um a outro e juntos chegam a engendrar a certeza.

Não é possível dizer até que ponto pode afetar as atividades da criança ou a sua inteligência a ~~sua~~ incapacidade para alcançar o conceito de conservação da matéria q^do seja adolescente ou adulto.

Tôdas as pessoas, exceto as afetadas por 1 deficiência mental mais ou menos acentuada, chegam a dar-se conta de que a quantidade de água de 1 cubo e a quantidade de cimento de 1 saco permanecem invariáveis se não se tira nem ~~altmenta~~ acrescenta nada e não são alterados de algum modo. Mas, outras, pouco dotadas, podem continuar inseguras a respeito do conceito de conservação da matéria em situações diferentes e esta insegurança pode afetar suas atividades de 1 modo que ainda nos é desconhecido. (Por exemplo Lovell e Ogilvie afirmam que algumas crianças pagariam mais por 1 ~~doce~~ bala se tem certa forma que se tem outra. Essas pessoas podem ser induzidas a erros por suas percepções com mais frequência que a maioria das pessoas e provavelmente sejam fáceis de enganar por pessoas pouco escrupulosas.

Arquivado em 9/10/80 [illegible]

XI 1

Materiais multivalentes

por - Caleb Cattegno

Livro: El Material para la enseñanza de las Matematicas
Editora Aguilar
Capitulo XII pag - 210

1 - Os inventores dos materiais para o ensino de mat tem a tendência de ~~construir~~ criar objetos que ~~sirvo~~ sirvam para 1, ou vários fins; por ex, 1 cone de gêsso, ~~também~~ é cortado para apresentar as diversas secções conicas, só foi ~~construido~~ criado para mostrar a forma das conicas. Mas, 1 tira de papel pode transformar-se, segundo o que se faça, em 1 cilindro ou numa cinta de Moebius; as peças de meccano, segundo sua disposição, proporcionam ~~diversas~~ diferentes transformações (ver-se cap IX)

Chamamos materiais multivalentes aqueles que deliberadamente ~~servem~~ servem para diversos usos, e monovalentes, aos que, tambem deliberadamente se destinam a 1 só uso.

Os prof. se dividem entre os partidários de 1 e de outro tipo de material, ~~tambem~~ e ainda que temos que confessar que, pessoalmente, nos inclinamos pelos multivalentes, reconhecemos que há lugar para os outros e que, em algumas ocasiões, é melhor valer-se de 1 material monovalente para conseguir 1 resultado com mais facilidade.

Existe 1 problema de valores que pensamos deixar de lado num capítulo que se dirige eminentemente prático.

2 – Em nosso capítulo sobre o principal (cap I) ~~subli~~ sublinhamos ~~apontamos~~ a importância do dinamismo no pensamento e para a aprendizagem adequada do pensamento matemático. Em nosso cap. sobre filmes (cap. VII) desenvolvemos a idéia do esquema dinâmico. Nossos leitores já sabem, pois, porque favorecemos todo o material no ~~que~~ que se inclui o ~~mov~~ movimento e que permite 1 tomada de consciência de relações. Mas nos ~~deixe~~ fica a demonstrar como, em nossa busca de materiais, fazemos uso da polarização ~~para~~ à multivalência e cremos que se esta estivesse mais extendida, ~~cedo~~ breve estaríamos ~~dotados~~ providos de 1 arsenal que facilitaria a tarefa dos prof. de matemática.

3 – O 1º exemplo que vamos apresentar são os geoplanos, assim chamados porque são laminas que servem para a tomada de consciência das relações geométricas.

Podemos descrever deste modo: se traça 1 rêde sobre 1 lamina e se cravam pregos nos ~~nós~~ nós da rêde. Assim se obtem suportes ~~so~~ sôbre os quais podem extender-se elásticos de côres variadas. As redes que utilizamos são o dodecágono, o decágono e o octógono regulares; rêdes retangulares de 9, 16, 25, 49, 81 e 121 pontas; o hexágono duplo e algumas outras figuras.

Cremos que com a ajuda dos geoplanos é possível ensinar a maioria dos teoremas de geometria plana euclidiana.

mas sua utilização exige algumas explicações preliminares. Assim como nada se opõem inconvenientes ao uso do quadro, suponhamos que tão pouco haveria quem se oponha ao emprego dos geoplanos, donde se reproduz 1 figura mediante 1 goma elástica (atilho) ~~distendida~~ estendida sobre 1 conjunto de pontas. Mas aqui encontramos certas vantagens do geoplano sôbre o quadro; as figuras poligonais são claras e não dependem da habilidade do prof; e ao ser relativamente pequeno o geoplano pode fazer-se girar para que a figura tome qualquer posição desejada, demonstrando com ele que as propriedades destacadas são ~~invariantes~~ invariáveis a respeito do grupo de deslocamento. Os que utilizam o geoplano adquirem o costume de , a lamina para contemplar a figura debaixo diversos angulos.

Outra maneira de descobrir esta mudança resulta ao considerar que 1 determinada eleição de 1 nº dado de pontas (3 por ex) pode fazer-se de varias formas.

Se tomamos até gomas de diversas côres para as diversas eleições se obtem figuras (no caso que nos ocupe, triangulos) que, por definição, são iguais, no sentido que não há motivo preferir 1 grupo destes pontos a outros.

Se todos os alunos dispõem de geoplanos, podem dedicar-se a formar e descobrir tôda a serie de figuras que é possível desenhar mediante gomas dispostas sobre os pregos. depois, aquelas que são iguais, enumerá-las, provando que se obtem o nº exato descobrindo 1 princípio racional que permita deduzi-lo (rotação, simetria, translação e suas combinações); por último, as figuras semelhantes. Cabe propor-se achar todos os quadriláteros possíveis na rede e distinguir os convexos e os concavos, os regulares e os irregulares, ~~formar~~ classificar do geral ao particular e ao mais particular, ou do + especial ao + geral, descobrindo que ~~os~~ um paralelogramo é 1 trapezio duplo ou que 1 quadrado é 1 retangulo-rombo ou 1 rombo retangulo. ~~Só~~ Se se estudam as diagonais dos quadriláteros, se verá que as do trapezio (exceto se é isósceles) não tem mais propriedades imediatas que as do quadrilátero geral, que as ditas propriedades aumentam a medida que se especialize o o quadrilátero (1 notável experiência mat)

O quadrado, é o mais familiar dos quadriláteros, é também o mais especial, e suas diagonais gozam de propriedades que reúnem — as propriedades dos outros quadriláteros.

Com os geoplanos não se desenha: se cruzam as cintas elasticas, se acrescentam outras novas, e é facil captar imediatamente tudo o que vê. A facilidade com que se transformam as figuras e se utilizam construções, faz eminentemente flexivel o geoplano

Com a ajuda destes e a representação dos polígonos regulares é possivel demonstrar 1 agrupamento de teoremas. Vejamos o que ~~se~~ cabe fazer, por exemplo com o decágono ou o dodecágono Situando 1 goma pelo exterior das pontas se obtem o polígono regular convexo (de 10 ou 12 lados respectivamente) se começarmos por 1 ponto, unindo de 2 em 2, obteremos 2 polígonos convexos regulares de 5 ou 6 lados, metade do decágono ou do dodecágono; ao unir os pontos de 3 em 3, se obtém o decágono estrelado em 1 caso e 1 triângulo equilátero no outro; de 5 em 5, se obterá em 1 caso, 1 diâmetro e do outro, o dodecágono estrelado. Se os pontos são 12, se obtém os diâmetros unindo de 6 em 6. Este estudo, já é interessante por si, e se completa com o exame do octógono, cabe perceber certas propriedades dos polígonos regulares de nº par de lados. Em particular comparando o polígono convexo e os estrelados (por ex: no geoplano decágono) falamos que $c_3^2 + 4a_5^2 = 4a_{10}^2 + c_{10}^2$ (c é o lado do polígono convexo e a sua apótema) e se a apótema de 1, pentágono ou decágono, é a metade do lado de outro (decágono ou pentágono):

$$a'_5 = \frac{1}{2} c_{10};\ a'_{10} = \frac{1}{2} c_5;\ a_5 = \frac{1}{2} c'_{10};\ a_{10} = \frac{1}{2} c'_5$$ (a 1ª se refere ao polígono estrelado)

Partindo destes mesmos geoplanos, mas, despojados dos elementos anteriores, podem estudar-se os ângulos inscritos e os ângulos no centro. Os alunos se comprazem com este uso do geoplano e os recomendamos a todos aqueles que desejam medir o valor deste exercício.

Se partirmos de 1 diametro, esticando o elastico se pode formar 1 angulo reto sobre uma das pontas pelas que passe a circunferência. Com efeito, esticando o elastico desde esta ponta à do centro se formam 2 triangulos isósceles e se conclue de imediato que o angulo inscrito em 1 semicircunferência é reto. Deixando o elastico sobre 1 das pontas do diametro e sobre a da circunferência escolhida anteriormente, pode cruzar-se de modo que estendido sobre os outros pontos da circunferência, com o que o diametro precedente se transformará agora em 2 raios ~~radios~~. Examinando a figura se observa que o angulo inscrito pode tomar valores inferiores ou superiores a 1 angulo reto, e que o angulo no centro, que varia no mesmo movimento, pode comparar-se com o anterior prolongando o raio, que se haverá inscritado de antemão, até a ponte oposta do mesmo diametro. De forma analoga a deste caso particular precedente (ou dizer, mediante a consideração de 2 triangulos isósceles) proporciona a relação que liga o angulo no centro com o ~~inscr~~ inscrito. Vemos, em particular que o angulo reto é a metade do angulo no centro, o que havia passado inadvertido no exame anterior.

A facilidade com que muda a figura, e permite demonstrar que todos os casos de figuras são tão só aspectos de 1 mesma relação, nos faz supor que será possível enunciar os feitos dentro em evidência de diversas maneiras

X 4

a) o angulo no centro é ~~duplo~~ o dobro do angulo inscrito correspondente;

b) os angulos inscritos cujos lados passam pelos mesmos pontos sobre a circunferência ~~são~~ são iguais, já que valem a metade do mesmo angulo no centro;

c) todos os angulos inscritos cujos lados passam pelos extremos de 1 diametro são rectos;

c') todos os angulos inscritos cujos lados passem pelos extremos de cordas iguais ou suplementares.

d) a propriedade a) não depende do valor do angulo no centro ou do angulo inscrito, sempre que o 1º esteja compreendido entre --- e 2 rectos --- e 4 rectos e o 2º, entre

e) a propriedade c') equivale a dizer que os angulos opostos de 1 quadrilatero inscrito são suplementares, se é convexo e iguais se não o é;

f) 1 quadrado, 1 rectangulo e 1 trapézio isósceles são quadrilateros ; todos os paralelogramos não o são, e 1 trapézio qualquer, tão pouco.

Com a ajuda de geoplanos rectangulares pode resolver-se problemas de areas, longitudes e valor de angulos, que se resolvem facilmente, correspondendo a 1 experiência matematica considerável. Alguns deles apresentam dificuldades suficientes como para exigir varias horas de trabalho de 1 bom aluno de 17 ou 18 anos.

Chamamos materiais multivalentes aos geoplanos porque o mesmo utensílio e diferentes apoios permitem resolver problemas diversos e de qualquer nível. As lições dadas com sua ajuda alcançam grande êxito e são dificilmente esquecidas.

Existem 3 tipos de lições com a ajuda dos geoplanos:

1- o prof. pode utilizá-lo em lugar do quadro
2- os alunos podem tê-lo individualmente para fazer investigações sobre 1 situação que se lhe propõe.
3- se empregam sistematicamente até esgotar suas possibilidades

Até hoje foram utilizados os 1ºs, e os resultados mto prometedores, comprovam em favor de seu ~~caso~~ uso em todos os níveis do ensino. Sem embaraço, a nosso parecer, o 3º é o que corresponde a nossa mais profunda intenção pedagógica. Os geoplanos são susceptíveis de oferecer abstrações diferentes, demasiado esquematizadas para ser sencíveis, mas profundas, ou facilmente extensíveis e com possibilidades de renovar os pontos de vista. Mas, ele serve para a educação do matemático que se acha dentro de todo o aluno.

4- O 2º exemplo que vamos mencionar está integrado pelo Met. de Cuisenaire ou nºs em côres. Estudamos este material com mto cuidado. Aqui vamos servirmos deste exemplo para demonstrar o que denominamos: multivalência dos materiais

O material de Cuisenaire ~~está~~ é formado

X5

essencialmente por 1 conjunto de barras rectangulares de secção recta de 1 cm^2, de longitudes respectivas 1, 2 --- 10 cm e pintadas em vermelho (2 cm) maravilha (4) marrom (8) amarelo (5) laranja (10) verde claro (3) verde escuro (6), azul (9), preto (7) e branco (1). ~~também~~ além destas barras, Cuisenaire deu a conhecer cartões diversos (tabuleiro mural, lotaria e baralho de cartas), que servem de complemento a aquelas em certos estudos (multiplicações, fracções, factores).

É evidente que estas ~~ref~~ barras podem servir para jogos de construção, mas, no aspecto da aprendizagem mat., exporemos brevemente as diferentes formas de utilização.

a) Estudo dos inteiros e das operações com inteiros

Se se forma 1 longitude qualquer dispondo algumas barras ponta a ponta, o nº de barras barras brancas contidas nesta longitude será o nº cardinal que se ha ~~diremos~~ associar a ela. Se se situam junto a esta longitude barras distintas de modo que se logre 1 longitude igual, se obtem 1 nova decomposição deste nº. Se ~~se~~ fazer todas decomposições possível desta longitude se examine nos fará ver que ali se encontram as 4 operações. A adição resulte de dispôr ponta a ponta várias barras. A subtracção, da tomada de consciência do que falte à longitude formada para alcançar

a longitude dada, e também de que as partes que compõe o todo são complementares.
A multiplicação aparece como adição ...)
e a divisão como 1 tomada de consciência de que a ... de certa longitude pode completar-se sempre mediante 1 longitude inferior a utilizada na ... , para formar a longitude dada; esta divisão apresenta simultaneamente os aspectos de dos arranjos (dar o mesmo nº de objetos a 1 nº de crianças) e de conteúdo (q^{tas} vêzes estão contidos uns objetos em outro nº de objetos) (Observemos que a multiplicação e a divisão não são nºs diferentes no nosso conjunto de decomposições, pois a ~~última~~ seria 1 leitura de 1 . falada, que a 1ª seria a conseguida.
A inversa da multiplicação é, para nós, a fração e não a divisão. Observando as decomposições, podem ler-se como se ofereciam fatores do nº em questão: em efeito, as barras empregadas na conseguida representa 1 deles, enq^{to} que o nº de vêzes que se utiliza de o outro.
O fato de que tôdas as operações podem ler-se no conjunto das decomposições bastaria para fazer do material Cuisenaire 1 material multivalente

b) <u>Estudo das frações</u> e <u>de operações com frações</u>.

Medir 1 barra com a ajuda de outra nos dirige a dizer que formamos pares ordenados para expressar a dita medida. Em qual, o resultado não é 1 nº inteiro. Expressamos com (a, b) e ~~(a^5, b^5)~~ os pares de barras e a b medir a a. Observamos que (a, b) e (a^5, b^5) são pares equivalentes se $a^5 = ka$ e $b^5 = kb$, sendo k inteiro e positivo. Assim pois, podemos --- cada par (a, b) pelo conjunto de suas equivalentes (ka, kb)

A notação da adição, subtração e multiplicação se utilize com as frações, ainda que tenha significado diferente é a mesma dos inteiros. O manejo das barras e o trabalho mental que se associa ao que parecem conter os esquemas colocados desde este ponto de vista, nos permite compreender a forma em que se extendem as operações em matemática. Nenhum outro material construído ad hoc possui as qualidades do material de Cuisenaire neste campo.

Temos visto que a definição da adição de inteiros vinha dada ao dispor ponta a ponta certo nº de barras.

Se partimos de 2 ~~drp~~ barras (a, b) e substituimos $c + d$, teremos evidentemente que $(a, b) = (c + d, b)$, donde c e d estão medidas por b, de igual forma que c. Por convenção, diremos que $(c + d, b) = (c, b) + (d, b)$, significando com isto que a duplicação da barra b só se faz para recordar a unidade de medida, mas que a operação se produz sobre os termos medidos, os quais se dispõem ponta a ponta

e representam a adição. Inversamente (a, b+(c, d) só têm sentido se se reduzem, passando ~~pelo~~ por intermédio dos equivalentes, estas 2 frações a entrar que tenham a mesma unidade de medida, ou seja (a, b) + ~~(c)~~ (c, d) = (Ka, Kb) + (hc, hd), e se Kb = hd também será igual a (Ka + hc, Kb).
A subtração segue o mesmo esquema.
Para a multiplicação o problema se resolve assim.
Havendo observado que se dois pares de frações (a, b) e (b, c) têm iguais termos medios (a, b) d (b, c) é relação direta (a, c) e também que esta serie de ~~d~~ intermedios pode ser tão extensa ~~como se que~~ qto se queira, ou, que (a, b) e (b, c) de (c, d) de (d, e) de (e, f) é igual a (a, f)
Que quer dizer (a, b) de (c, d)?
É evidente que se [(a, b) de (c, d)] = [(Ka, ~~k~~ b) de (hc, hd)] e se se elegem K e h de tal forma que Kd = hc se ~~en~~ terá:

(a, b) de $(c, d) = (Ka, Kb)$ de $(Kb, hd) = (Ka, hd)$ com $h \frac{Kb}{c}$

ou (a, b) de $(c, d) = \left(Ka, K\frac{c}{d}\, d\right) = \left(\frac{K}{d}\, ac, \frac{K}{c}\, bd\right) =$

(ac, bd)

A partir deste resultado se observa que entre as frações iguais a (a, b) de (c, d) se encontra aquele cujo numerador é o produto dos numeradores b e d. Partindo daí podemos afirmar que o de operatorio mediante o simbolo X entre as 2 frações sem esquecer que se trata de 1 operação complicada que não é 1 adição ———

Como a divisão de frações é a inversa da multiplicação, teremos por definição: X 7
$(a,b) : (c,d) = (A, B)$ equivalente a $(a,b) = (A, B \times (c,d))$
de onde $Ka = Ac$, e $Kb = Bd = Bd$, ou $A = K\frac{c}{a}$ e $B = K\frac{d}{b}$
portanto $(a,b) : (c,d) = \left(K\frac{c}{c}, K\frac{b}{d}\right) = \left(K\frac{ad}{cd}, K\frac{bc}{cd}\right) =$
(ad, be), que dão as formas de divisão:
divisão respectivas dos numeradores e denominadores
ou o produto da 1ª fração pela 2ª invertida.
Esta forma de apresentar o problema é acessível a cr. de 8 anos, os quais os dominam com perfeição se se segue a ordem dada no meu volume V.

c) Soluções de ~~sistemas~~ de equações

Tomemos outro exemplo entre os mtos de utilização das barras Cuisenaire.
Partamos, por ex., de 1 barra laranja; equivale a 1 preta e 1 verde claro. Mas a preta equivale a 1 verde claro e a 1 maravilha. Por conseguinte a laranja equivale a 1 rosa e 2 verde claro, mas também a ~~rosa~~ maravilha é igual, é a diferença entre a preta e a verde claro, - que a laranja na sua soma. Com isto, podemos enunciar o problema seguinte:
"Se dispomos de barras laranja, maravilha e se sabe que a laranja é a soma de 2 barras e a maravilha sua diferença. Quais são estas 2 barras? De outro modo: conhecendo a soma e a diferença de 2 longitudes, achar esta.
~~Ainda~~ Mesmo que as equações propostas sejam do mesmo tipo $X + Y = a$ y $X - Y = b$, as barras oferecem excelente meio de descobrir a solução, 1º embaixo da formula $2Y = a-b$, $X = a-Y$ e depois

debaixo da formula $2X = a+b$, e $Y = a-X$,

de compreender a equivalência das soluções
(o que 1 domínio de algebra contido numa
aplicação) e, de ver como podem esquematizar, os
problemas propostos nos livros de aritmética, cujos
dados são a soma e a ~~od~~ diferença de 2 grandezas.

d) Vários

Com a ajuda das bases se ~~encontram~~ resolvem facilmente
os pontos seguintes

1 – Se 1 fração é maior que a unidade, aumenta
ou diminui 1 mesma grandeza nos seus termos;
Se é maior que a unidade, diminui.

2 – Se se distribui 1 soma a respeito de outra
se formam tantos produtos como o produto
do nº de termos da soma.
Em particular, se obtem facilmente o quadrado
de 1 soma ou de 1 diferença, o cubo de 1 soma etc..

3 – As progressões aritméticas e suas propriedades se
explicam com grande facilidade

4 – A teoria dos expoentes inteiros e por conseguinte
as progressões geométricas. Os logaritmos, como
isomorfismo das estruturas da adição e da
multiplicação.

5 – O calculo combinatório. Alguns elementos
da teoria dos jogos de permutações.

6 – O calculo de superfícies e volumes de 2 corpos
prismaticos. Em particular o calculo de
superfícies e volumes de corpos semelhantes.

Na bibliografia que ~~se indicam~~ sei oferecemos ao fim deste
capítulo se encontram alguns complementos para
estas notas, assim como mts outros usos do

uso do material de Cuisenaire para diferentes níveis de ensino. Mencionamos de passagem o seu emprego no ensino de idiomas.

5 - Conclusões -

É evidente que existem outros materiais multivalentes (os filmes por ex., ainda que restrito ao campo de 1 problema), mas quisemos nos limitar a materiais de larga experimentação; os 2 exemplos escolhidos foram objeto de centenas de experiências com alunos de numerosos países e de tôdas as idades. Em particular, pudemos observar que os pseudo-mudos, cujas desvantagens são evidentes, podiam alcançar 1 nível comparável ao dos alunos normais com a ajuda destes materiais.

É evidente que, do ponto de vista econômico, deveriam investigar os materiais multivalentes. Sem ~~tanto~~ embaraço, parece que a investida humana nos conduz a soluções univalentes. Se o problema se focaliza face à organização de 1 situação, ~~mas~~ se terá indubitavelmente de produzir 1 modelo que possua as qualidades requeridas, ou 1 filme que evidencie a propriedade buscada, ou 1 aparato que realce a transformação desejada. ~~Mas~~ se o problema se focaliza desde o ângulo da pedagogia mat, a posição do investigador há de ser diferente. No seu intento de fazer acessível a aritmética aos alunos de 6 anos de idade, de quem sabia que seu campo de expressão é o concreto, Cuisenaire quiz apresentar 1 material que contivesse já na sua estrutura as estruturas fundamentais da aritmética; por

por isso mesmo é a relação de equivalência (côr e comprimento) O gesto de pôr ponta a ponta bastão, tão primitivo, é também o que permite transcender o conjunto de barras dadas, já que faz passar a comprimentos não compreendidos no jogo. Mas, é assim mesmo a base operatória de tôda a álgebra dos nºs racionais. Havendo fundido em si a estrutura dos corpos dos nºs racionais, não é estranho que o conjunto de barras forme o material para o ensino da aritmética. Não existe problema que não se possa ~~responder~~ resolver com sua ajuda. Sua multivalência constitui o melhor valor pedagógico e econômico.

Ainda de menor extensão aplicatória, os geoplanos também são recomendáveis porque simplicidade e multiplos usos. Se se trata de educar o sentido geométrico como aptidão distinta da aquisição de conhecimentos, oferece a excelente experiência da fabricação das figuras e ~~resolver~~ enunciar problemas de ampla diversidade. A facilidade com que se transformam 1 campo perceptivo e sua estrutura para pôr em evidência 1 ou várias relações é, sem dúvida, o que mais contribui ao desenvolvimento do sentido geométrico, e é até deixado de lado no ensino tradicional.

Reconhecemos que na pedagogia dinâmica que ~~serve~~ serve de base a análise deste capítulo não nos preocupou em absoluto a teoria geral. Nos preocupamos com os prof que hão de manter diálogo com mentalidades + jovens e que desejam propor-lhes situações mat férteis.) ~~Seja~~ (Qualquer que seja o ideal de nosso leitor, esperamos que nossas sugestões técnicas e nossa atitude, que permite aos alunos falar do que contém 1 situação dada, se considerarem baseadas na realidade das classes de mat, formadas por mentes que contemplam situações apresentadas pelo prof e ~~por~~ pelas circunstâncias

Fim.

d

O papel ~~del~~ do material didatico no ensino da Matematica

pag 238-239
La Mat. y su ensenanza
atual   Puig Adam.

Nossa XI Reunião tem como finalidade o estudo do material moderno no ensino da Mat. Este material: modelos, filmes, filminas visto pelo Mat. situado na elevada perspectiva abstrata, são meras concretizações ~~concrecismos~~ ilustradoras, simples roupagem conveniente para facilitar, momentaneamente, compreensões difíceis; mas, para o educador mat, que não perde a perspectiva dos processos iniciais de abstração, este material é mto mais; representa algo substancial em sua função educativa. Este material estruturado em forma de modelos tem não só a função de traduzir ocasionalmente idéias mat, senão ~~mas~~ também a de origina-las e sugeri-las.

Temos de estudar a maneira mais acertada, pedagogicamente, de conseguir isto e também os materiais mais adequados para sua realização. Mas, posto que a percepção e a ação são fundamentais em tôda educação mat, temos de conseguir também que os ~~materiais~~ ~~modelos~~ modelos sejam capazes de provocar uma e outra, de modo que traduzam ou sugiram, criando situações ativas de aprendizagem. Para isto haverá de ~~deverá~~ se substituindo os clássicos ~~mod~~ materiais de vitrine, de contemplação passiva, por modelos multivalentes de novas concepções, manipulados e

pelo próprio aluno e determinantes de uma atv. sugeridora do conhecimento que se trata de ensinar. A vida mesma, um simples ~~jogo~~ brinquedo, nos oferece às vezes insuspeitadamente. E tanto melhor se esta atv. se manifesta na criação de novos ~~materiais~~ modelos idealizados pelo próprio aluno, já que assim não só, excitará a concretização da idéia mat. a ilustrar ~~ou~~ traduzir, ~~sem~~ a mais que ~~mas~~ também, ao apresentar seu ~~material~~ modelo aos seus companheiros, terá que pensar se será capaz de sugerir a eles a abstração da qual ele partiu.

Vê-se que a confecção de materiais pode ser veículo natural e eficiente para a prática feliz das duas atv. de abstração e concretização que, como tem se dito m^tas vezes, formam parte integrante da atv. mat. educativa.

pag 241-242

Características do material moderno – dinamismo e multivalência

A atv. do aluno diante dos materiais confeccionados estáticos, se desenvolve principalmente no sentido de abstrair de vários deles o conteúdo mat. subjacente comum, o que exige uma infinidade de modelos. Ao contrário, o material dinâmico leva em si mesmo na multiplicidade de suas configurações e na gênesis dos conceitos mat. derivados dos caracteres que permanecem invariáveis durante sua transformação, experif

alimente se este pode efetuar-se de modo contínuo. Esta é a grande vantagem dos materiais dinâmicos sôbre os estáticos para sugerir conceitos mat e para exercitar a atv. de abstração.

Mas, se propormos ao aluno a tradução de tais conceitos em novos ~~materiais~~ modelos, a criação e a realização dos mesmos, será em jôgo a atv. inversa da "concretização", tão interessante q.to aquela. Esta atv. criadora do aluno favorecerá grandemente se ~~como~~ lhe dermos material multivalente e adequado, ~~como~~ isto é elementos constitutivos capazes de servir para ~~mtas~~ multiplas realizações. (varas, articulações, fichas, mosaicos, blocos, barras, reguas, elasticos, plastilina etc...) Este material tem também a vantagem de prestar-se ao jôgo livre como puro e simples desejo de expansão ativa, com o qual mtas vêzes termina fazendo-se desta atv. um fim intelectual que pode ir do estético ao matemático.

A lição experimental que sobre progressões aritméticas de ordem superior que discutimos no capítulo seguinte tem sua origem em 1 atv. desta índole: formação de piramides com reguas ~~coloridas~~ de cores variadas: atv. que, conduzida inicialmente por valores puramente plasticos, terminou sugerindo uma quantidade de relações mat. contidas na teoria de tais progressões aritméticas de ordem superior.

pag. 242, 243

Vantagens da criação e da realização de ~~materiais~~ modelos sôbre sua simples utilização

Os ~~materiais~~ modelos assim realizados não só cultivam a atividade "concretização" ou tradução de idéias mat. no aluno que os cria para tal fim, como também a atividade de abstração ou a sugestão de tais idéias nos que o contemplam e o manejam depois.
Se o aluno criador do ~~material~~ modêlo se situa, desde o 1º momento, neste duplo ponto de vista, pensando que o ~~material~~ modêlo terá que sugerir logo sua própria idéia aos demais, praticará ao mesmo tempo as duas faculdades de abstração e de concretização que tantas vêzes temos apontado como essenciais em 1 formação matemática completa.

- concretização

Assim, por ex., o simples e vulgar feito de desenhar 1 triangulo num papel para ilustrar um ~~raciocínio~~ razão, conceito geral para todos os triangulos, obriga a apresentar 1 modelo de triangulo que não tenha propriedades especiais que sugiram generalizações falsas. Outros erros de ~~razonament~~ raciocínio se devem ao feito de haver criado na figura desenhada 1 modelo inconveniente para sua ilustração, por levar implicitamente caracteres não especificados nas hipóteses! Não ~~faríamos~~ incorreríamos em tais erros, ~~se concluíssemos que os~~ se nem faríamos que os demais incorressem ~~assim~~ ~~nesses~~ nos mesmos ~~métodos~~, se ao criar 1 modelo traduzindo ou concretizando 1 idéia abstrata, pensássemos que devemos utilizá-lo imediatamente como "sugeridor" de propriedades não particulares do dito modelo, senão genéricas de todos os análogos, ~~como~~ isto é propriedades assim mesmo abstratas.

h

Só esta consideração realça a vantagem da criação de modelos sobre o simples uso, vantagem que não obtemos sem a contrapartida de algum inconveniente, como é o tempo consumido nos detalhes de sua confecção e acabamento. ~~Desde~~ Do ponto ~~vem~~ Focalizando ~~enfoque~~. de vista, estritamente matemático, é preferível, neste aspecto, realçar ~~cuidar~~ as idéias sôbre os detalhes, sem que isto signifique que sejam desprezíveis, nem ~~m~~ muito ~~menos~~, os fatores educativos que em outra ordem de idéias (educ. do gôsto, destreza manual etc.) podem obter-se pela perfeição no acabamento. Este segundo aspecto da questão resulta particularmente interessante no ensino ~~do~~ de caráter misto formativo-profissional. A ponderação entre um e outro aspecto dependerá, em definitivo do caráter que preponderar no ensino.

Seja como fôr, não há dúvida que a realização de modelos com elementos do material multivalente favorecerá notavelmente uma e outra finalidade, permitindo ao aluno ~~em~~ uma considerável ~~ganho~~ economia de tempo e a possibilidade de favorecer a faculdade criadora, sem prejuízo da realizadora que resulta assim muito mais rápida.

Modelos criados ~~através~~ por de condições

pag 243-244 - Aprendizagem de projetos

A realização de modelos permitirá também ao aluno exercitar-se mais cêdo na criação técnica. Todo projeto técnico supõe a criação e realização de 1 estrutura (máquina, construção, instalação) destinada a cumprir determinadas funções. Estas impõem certas condições que as leis físicas ~~podem~~ costumam

1

traduzi em equações matemáticas, dando lugar a cálculos que determinam os elementos característicos da estrutura projetada.

Nesta modesta esfera que lhe corresponde, o aluno do ensino médio pode também realizar modelos sujeitos a determinadas condições que bastem para determinar indiretamente suas dimensões. Assim, a Geometria do espaço, em lugar de propor ao aluno que realize em cartão um modelo cilíndrico ou cônico de dimensões dadas, será preferível propor-lhe a construção, em escala conveniente, da maquete de um depósito cilíndrico ou cônico de capacidade dada e do qual se conheça assim uma dimensão (por ex., a altura) imposta por condições de substituição.

Mais tarde, quando o aluno, iniciado nos métodos do cálculo diferencial, já saiba resolver problemas de máximos e mínimos, pode-se propor-lhe a construção de modelos de projetos que obedeçam a determinadas condições econômicas: gasto mínimo do material para uma capacidade dada, volume máximo para uma área dada, ou bem para um desenvolvimento recortável de uma placa prefixada etc...

Ao calcular e realizar assim seus projetos e maquetes, os alunos se julgariam engenheiros antecipadamente. Seu interesse pelos problemas que realizam aumentaria consideravelmente, beneficiando-se com isso a qualidade de seu trabalho, já que os cálculos que para isso desenvolvem não tem por meta a obtenção de resultados numéricos que lhes ~~sejam~~ deixam indiferentes, ~~mas~~ senão as dimensões que necessitam para chegar ao fim de uma realização efetiva.

Arquive-se em 9/10/82
[signature]