

Glenn

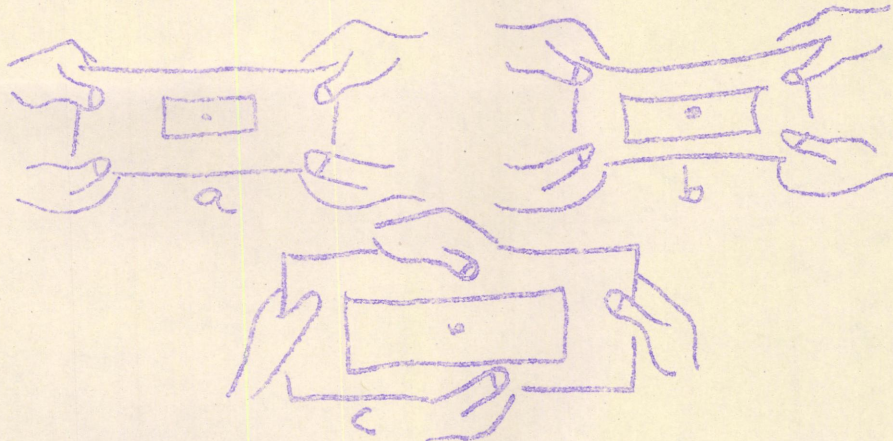
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"
DEPARTAMENTO DE ESTUDOS ESPECIALIZADOS
CURSO DE MESTRADO DA MATEMÁTICA - 1972

JOHNSON, Donovan A. e GLENN, William

Topology - The Rubber - Sheet Geometry - Ed. John Murray, London, 1964

TOPOLOGIA E GEOMETRIA

A Topologia, algumas vezes, como a Geometria, trata com linhas, pontos e figuras. Mas as figuras são diferentes das de Geometria, porque lhes é permitido variar em tamanho e forma. Alguns chamam, por isso, à Topologia "tira de borracha geométrica". Está a Topologia mais interessada na posição que no tamanho e forma. Trata com as propriedades de posição que não são afetadas pelas variações de tamanho e forma. Suponhamos, por exemplo, que você desenhe um quadrado com um ponto interior sobre uma tira de borracha, não importa como você estire a fita de borracha. O ponto está sempre no interior do quadrado. É, assim, a Topologia, o estudo das propriedades geométricas que permanecem as mesmas a despeito do alongamento ou da curvatura.



A distância não tem sentido em Topologia. Dois pontos, a distância de uma polegada, podem facilmente ser separados, por um estirão, a duas polegadas de distância. Do mesmo modo, o tamanho de um ângulo é sem sentido, porque podemos esticar tanto a tira de borracha, que um ângulo de 15 graus se torne num ângulo de 35 graus. Mesmo linhas retas não têm sentido em Topologia, porque a reta A B pode se tornar uma linha curva pela distensão da fita.

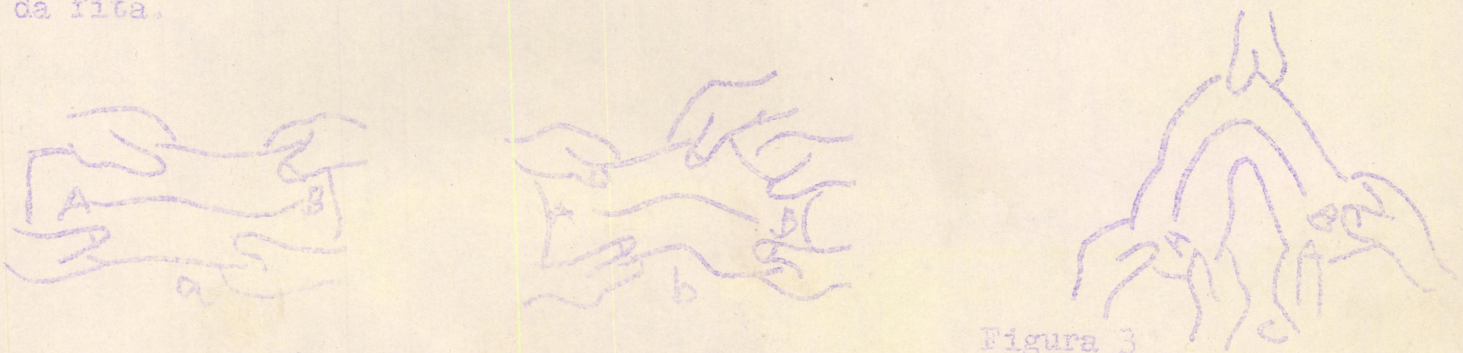


Figura 3

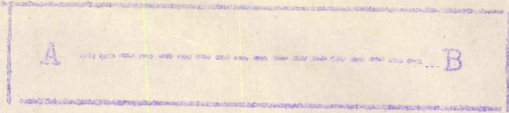
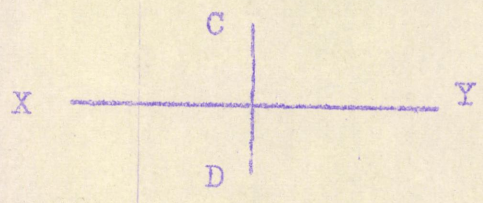


Figura 2

A linha reta não somente se torna uma linha curva, mas varia também em comprimento. Pensamos, geralmente, numa chave, como um objeto duro e rígido. Conserva sua forma ajustada a fechadura, não importa quanto nela tenha sido movida. Quando um aeroplano decola e voa longe, parece tornar-se menor. Sabemos, entretanto, que ele permanece com o mesmo tamanho, não importa onde esteja. A Geometria Euclidiana faz o estudo dos objetos que têm sempre o mesmo tamanho. A Topologia é o estudo dos objetos das coisas que variam em tamanho e forma, quando movidas.

Podemos imaginar uma linha como sendo um pedaço de barbante. Se há um ponto sobre a linha, como um nó sobre o barbante, deve permanecer na linha, mesmo que imaginemos esta linha dobrada, alongada ou curvada, por muitos meios. Dizemos também que a linha é contínua, nela não há furos. Se uma linha atravessa outra, passa através de um ponto dessa linha. Isto significa, por exemplo, que se desenhamos uma linha C D através de uma linha X Y como mostra a figura, a linha C D passa através de um ponto na linha X Y.



Variam tantas das propriedades das linhas e figuras nesta tira de borracha geométrica que podemos pensar nenhuma permanecer a mesma. Isto não é verdade. Veja a linha A B na figura 2, novamente. Não importa como estíremos ou curvemos a tira, a trajetória de A para B permanece uma trajetória de A para B, a qual não atravessa a si própria. A linha ou trajetória pode ser curvada ou alongada mesmo mais do que na figura 3. Permanece, entretanto, uma linha a trajetória de A para B. Em Topologia, uma trajetória ou linha como A B é chamada arco A B.

COMO FIGURAS GEOMÉTRICAS VARIAM EM TOPOLOGIA

O que dissemos a cerca de simples linhas, como A B, também se aplica para linhas que formam figuras geométricas, tais como círculos ou triângulos. Vejamos o que acontece a um círculo sobre uma tira de borracha. Pela distensão da borracha, o círculo pode variar, como as figuras seguintes.

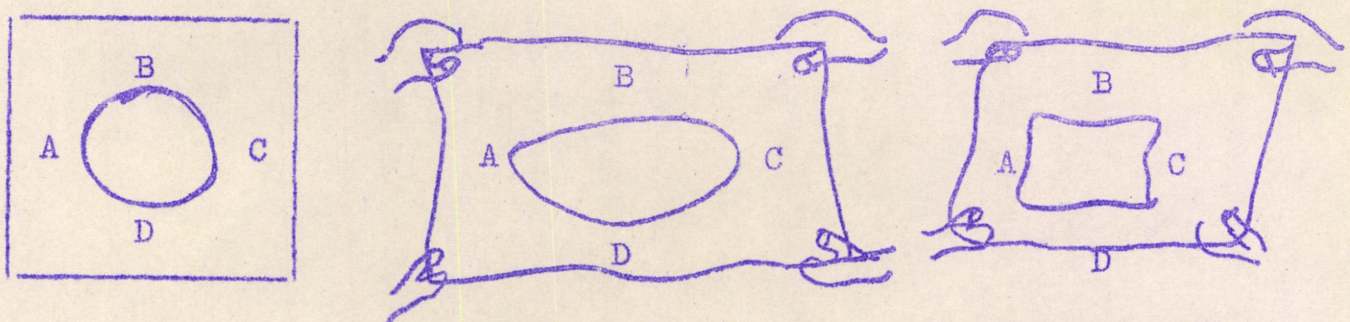


Figura 5

Podemos ver que um círculo varia em grandes proporções em forma e tamanho. Mas, não importa como distendemos a tira, a figura permanece uma trajetória ABCDA. Podemos também ver que, não importa onde comece essa trajetória, retornamos ao ponto de partida, sem atravessá-la. Se iniciarmos em C, passamos por BAD e retornamos a C. Em Topologia, todas estas figuras têm o mesmo nome. Cada uma é chamada uma curva simplesmente fechada ou circuito fechado e é construída sobre dois arcos ABC e ADC os quais têm somente os pontos A e C em comum.

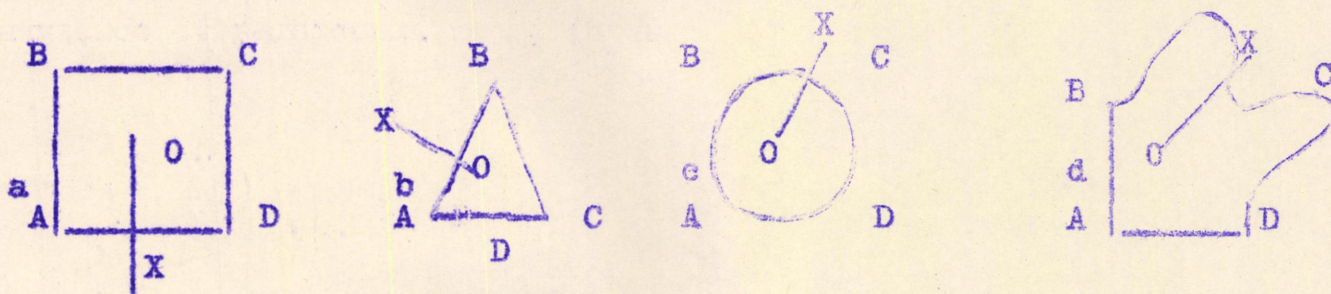


Figura 6

A Topologia diz que estas figuras são todas simples curvas fechadas. Cada uma é feita sobre dois arcos ABC e ADC, não faz qualquer diferença se os arcos são retos ou curvos.

Em cada ilustração acima, há um ponto O no interior da curva fechada e um ponto X, fora dela. A linha OX atravessa um arco da curva fechada. Não importa como estas figuras possam ser variadas por distensão. O X passará sempre através de um arco da curva. A curva fechada ABCD não tem furos por onde passa o X.

Esta idéia de não haver furos numa linha parece simples mas é uma idéia muito importante. Vimos que a idéia de não haver furos é chamada continuidade. Atualmente ninguém sabe se uma linha tem furos ou não mas, parece razoável supor que não há furos na linha.

Dizemos que estas curvas fechadas dividem a tira em duas partes, uma interior e uma exterior. Você não pode ir do interior para o exterior, sem atravessar a curva. Esta verdade é certa, não importa como você varia a forma. Desde que você sempre atravessasse a linha, indo de fora para dentro, não importa quanto você distorça a figura. Chamamos essa travessia uma situação invariante. Em Topologia, qualquer situação que permanece a mesma, sob distorção, é chamada uma invariante. Quando distorcemos uma figura, por exemplo, uma linha reta esticada, numa linha curva ou um quadrado num círculo, fazemos uma variação chamada variação topológica. Essas transformações mudam o tamanho ou a forma da figura mas não formam uma nova figura topológica. Se cortarmos, rasgarmos ou dobrarmos uma linha ou superfície, mudamos essa linha ou superfície e, temos assim uma nova figura.

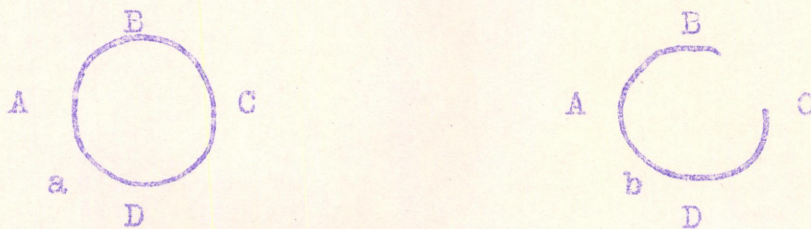
Uma transformação Topológica é feita sem cortar, rasgar, dobrar ou perfurar.

No círculo A B C D, outra propriedade que não varia, é invariante

te, é a ordem dos pontos A B C D. O que era invariante em relação à linha A B? Não importa quanto a estiremos, ela permanece numa trajetória de A para B, sem atravessar-se a si mesma. Vimos que, em Topologia, um círculo pode transformar-se numa elipse ou num quadrado e uma linha reta pode transformar-se numa linha curva. Mas quando juntamos os pontos A e B da linha AB como na figura abaixo, temos uma nova figura, a curva fechada.



De forma similar, quando cortamos o arco de um círculo, como na figura abaixo, mudamos a curva fechada numa linha.



Essas mudanças não são transformações. São formadas novas figuras topológicas.

Em Geometria Euclidiana (tradicional) estudam-se as propriedades de tamanho, forma, área e grandeza angular. (Em Geometria Euclidiana Tradicional) Dizem-se congruentes as figuras que, postas uma sobre outra da mesma forma e tamanho, revelam correspondência de todas as partes. Transformações Topológicas são figuras que se dizem equivalentes. Em Topologia o círculo e o quadrado são equivalentes, não importa o quanto dê firmam em tamanho. Ambos têm um interior e um exterior, Para ir do interior para o exterior, devemos atravessar uma linha. Sombreamento o interior da figura abaixo vemos facilmente, como sua superfície se divide em duas regiões.



*Revisado
em
15/05/88
Mestrelas*