Dienes

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Z. DIENES

AS SEIS ETAPAS DO PROCESSO DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Trad. A. B. Krebs

A APRENDIZAGEM DE ALGUMAS NOÇÕES LÓGICAS (Pág. 13)

Primeira etapa

Vamos mostrar nesta primeira ilustração como podemos levar a criança, a partir do jôgo livre, a passar pelas etapas que vimos de descrever até a sexta etapa onde ela será capaz de jogar o jôgo de demonstração, isto é, de manipular um sistema formal. Eis, por exemplo, uma situação de jôgo na qual as crianças de uma classe estão em vias de se familiarizarem com as variáveis: forma, côr, espessura e tamanho, para que mais tarde elas possam utilizá-las para a aprendizagem mais firme (poussé) relativa à segunda etapa.

Segunda etapa

Não se pode tomar tôda a lógica como ilustração; vamos escolher a aprendizagem de certos elementos, por exemplo, os conetivos (connecteurs) lógicos. Tomaremos os seguintes: conjução - disjunção - negação - implicação. Para introduzir os jogos de negação, de conjunção, de disjunção, de implicação, pode-se fazer classificações em entrada dupla com o conjunto de blocos lógicos. Por exemplo, podemos fazer um diagrama de Carroll no qual se colocam à direita todas as vermelhas, à esquerda todas as não-vermelhas. Em cima colocam-se todos os círculos e embaixo todos os não-círculos. Haverá, então: os círculos não-vermelhos, os círculos vermelhos, os não-círculos não-vermelhos e os não-círculos vermelhos, em conjuntos disjuntos disjuntos repartidos sôbre um retângulo.

Podemos, então, perguntar às crianças onde estão os blocos que são vermelhos e círculos ao mesmo tempo, onde estão os blocos que são não-vermelhos e círculos ao mesmo tempo e, assim por diante. Pode-se, evidentemente, levar a aprendizagem um pouco mais longe e perguntar às crianças onde estão os blocos que não são vermelhos e círculos. Isto quer dizer que se nega a propriedade conjunta vermelho-e-círculo.

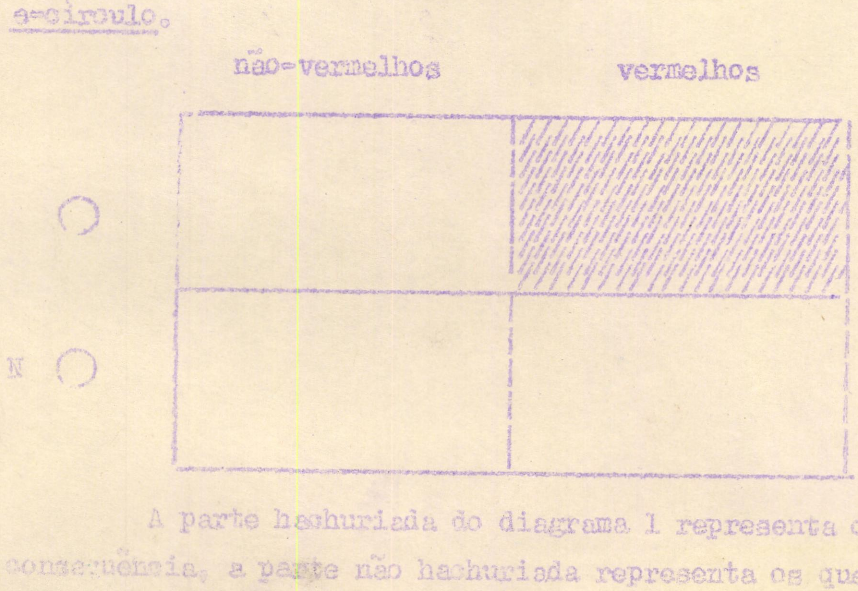


Figura 1

A parte hachuriada do diagrama 1 representa os círculos vermelhos, por consequência, a parte não hachuriada representa os que não são vermelhos-e-círcu-

Arquivado em 07/07/80
[illegible]

los. A criança aprende, aqui, a fazer corresponder um conjunto a um atributo, eo o conjunto complementar ao atributo negado. Pode-se, igualmente, tomar dois arcos, colocá-los no chão, (com uma parte sobreposta) e pedir às crianças para colocarem todos os vermelhos e só vermelhos no interior de um dos arcos, e todos os círculos, e só os círculos, no interior do outro arco. Finalmente, as crianças se dão conta de que os círculos vermelhos se colocam na parte do arco destinada aos vermelhos, que fazem parte, igualmente, do arco destinado aos círculos. Esta parte do espaço representa de uma maneira espacial a intersecção, isto é, a conjunção dos atributos "vermelho e círculo" e a interseção do conjunto dos vermelhos com o conjunto dos círculos.

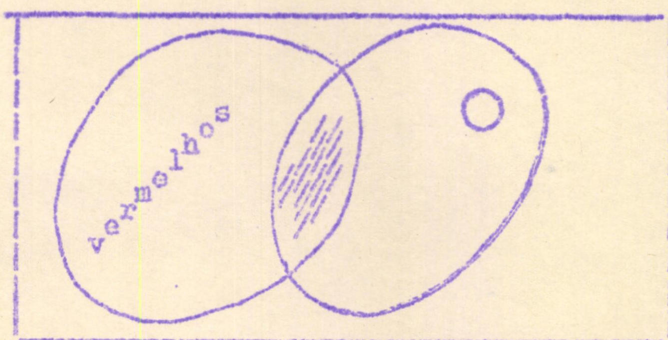


Figura 2

Os não-círculos vermelhos estarão à esquerda, os círculos não-vermelhos estarão à direita, os não-círculos não-vermelhos estarão no exterior dos dois arcos. Se perguntarmos, agora, onde estão os blocos que não são, ao mesmo tempo, redondos e vermelhos, as crianças mostrarão o resto da figura, isto é, a parte da figura que não é a parte comum aos dois arcos. Pode-se, igualmente, tomar uma arborescência, o que indica a figura 3.

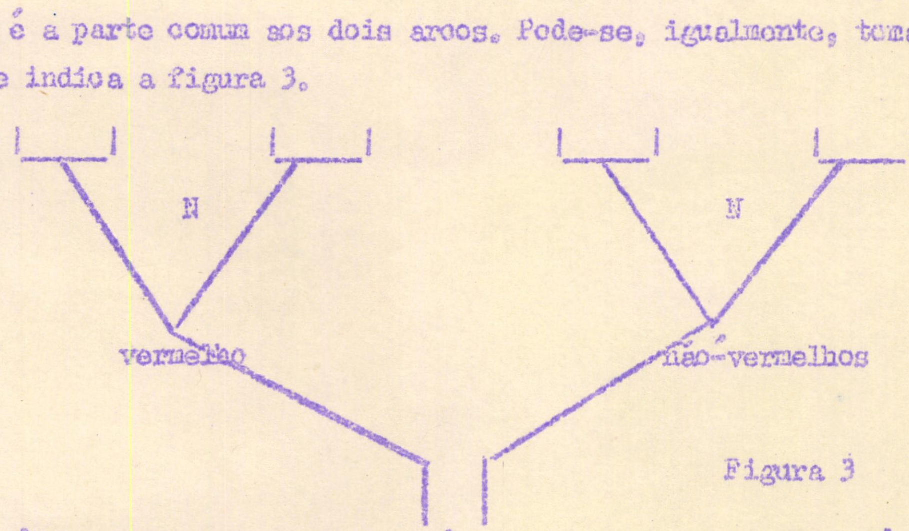


Figura 3

À esquerda, por exemplo, nós colocamos os vermelhos e à direita os / não-vermelhos; mais alto, na arborescência, é preciso fazer uma outra divisão entre os círculos e os não-círculos. Colocamos os círculos à esquerda e os não-círculos à direita, os vermelhos e também, os não-vermelhos. Em cada extremidade de nossa árvore haverá um conjunto tal como já vimos nos outros métodos de repartição espacial: haverá da esquerda à direita, os círculos vermelhos, os não círculos vermelhos, os círculos não-vermelhos e os não-círculos não-vermelhos.

É evidente que a representação espacial não é pertinente para uma / classificação lógica. Uma distribuição espacial é tão válida quanto uma outra. Por esta razão, a criança deverá se libertar (débarrasser) de uma ligação, um elo muito estreito entre seu pensamento lógico e a repartição espacial utilizada para encorajar êste pensamento lógico. Aqui, entramos já na terceira etapa.

Terceira etapa

Pode-se fazer as crianças jogarem os três jogos descritos na segunda etapa e pedir-lhes para transferirem os blocos de uma repartição espacial para outra. Em seguida as crianças se dão conta de que se pode transferir os blocos, conjunto por conjunto, isto é, que se todos os círculos não-vermelhos são agrupados em uma determinada parte de uma repartição, o serão igualmente em uma outra repartição. Elas poderão, por consequência, retirar todos os círculos não-vermelhos que estão colocados em um diagrama e os transportar a um lugar apropriado em um outro diagrama. Quando elas virem que não há diferença entre uma repartição e outra, é que elas se libertam de uma propriedade não pertinente ao jôgo. Mas, evidentemente, há ainda outras propriedades não pertinentes. Por exemplo, o fato de se utilizar côres, formas, ou outras propriedades particulares. Para que a criança se liberte dessas últimas, é preciso inventar um sistema de conjuntos. Em lugar de tomar os blocos lógicos, pode-se tomar um conjunto de conjuntos. Tomemos, por exemplo, seixos, lápis, fósforos e rôlhas (bouchons). Convencionamos um método, uma norma para construir os conjuntos. Decidimos, por exemplo, que podemos colocar três seixos, dois seixos, um seixo ou zero seixos em um conjunto. Podemos, também, colocar ou dois lápis, ou um lápis, ou nenhum lápis em um conjunto. Em seguida, poderemos colocar um fósforo ou nenhum fósforo num conjunto. Veremos que se pode, assim, fazer 48 conjuntos, compostos diferentemente de seixos, de lápis, de fósforos e de rôlhas, compreendendo o conjunto vazio onde não há nada. Vimos que a variável "seixo" corresponde à variável forma, porque há quatro formas no jôgo e há quatro meios permitidos de ter diferentes nomes de seixos. A variável lápis corresponde à côr. Os fósforos e as rôlhas têm o tamanho e a espessura. Para inventar um exercício que corresponda exatamente ao exercício precedente, poderemos tomar por vermelho os conjuntos que compreendem dois lápis. Para círculo, por exemplo, os conjuntos nos quais não há seixos. Haverá dois lápis no conjunto que corresponde a um vermelho. Nenhum seixo no conjunto que corresponde a um redondo. Poderemos, então, fazer os exercícios correspondentes. Alertamos que a correspondência não é dada antecipadamente para as crianças. Constrói-se, primeiro, o conjunto universal dos conjuntos de seixos, de lápis, de fósforos e de rôlhas. Em seguida, jogam-se jogos de classificação com êste conjunto de conjuntos. É preciso, evidentemente, que as crianças possam manipular conjunto de conjuntos definidos a partir de propriedades pertinentes a êsses conjuntos. Por exemplo, um conjunto de conjuntos seria o conjunto dos conjuntos nos quais não há lápis, ou nos quais há sempre um lápis, ou nos quais há tantos lápis quantos fósforos e, assim por diante. Pode-se, sempre,/ introduzir um novo universo desta maneira e, fazer, em seguida, as é crianças fazerem os exercícios que foram descritoe e representados nas figuras 1, 2, 3, mas com um conjunto universal diferente. Digamos que as crianças já tenham feito abstração da partição particular no espaço; elas deverão agora fazer abstração do universo particular utilizado na ordem. Isto é, elas deverão, por exemplo, associar um conjunto, e somente um, a cada um dos blocos, e um bloco, e somente um, a cada um dos conjuntos. Depois disso elas poderão definitivamente fazer uma correspondência mais sistemática, fazendo a correspondência entre a propriedade dos conjuntos, de um lado, e as propriedades dos blocos, de outro.

É preciso, também, introduzir a implicação em um dado momento; uma maneira de fazê-lo seria retirar um ou outro dos quatro / conjuntos que se construiu no jôgo das conjunções. Se retirarmos, por exemplo, os círculos não-vermelhos, pode-se, facilmente, ver que se / se escolhe um círculo no que resta, êle deve ser vermelho. Do mesmo modo, se escolhemos um não-vermelho, êle deve ser não-círculo. É uma das propriedades concicionais do conjunto que nos resta depois de ter retirado os círculos não-vermelhos. Pode-se, igualmente, ver que o / conjunto que nos resta possui uma propriedade disjuntiva. Após ter / retirado os círculos não-vermelhos, todos os blocos que restam são / vermelhos não-círculos. Evidentemente, quando se diz "ou" em lógica, se entende que a propriedade conjuntiva também pode ser verificada. Depois que se jogam os jogos de conjunção, de disjunção, de implicação e de negação, depois que se repartiram os conjuntos correspondentes de várias maneiras diferentes utilizando conjuntos universais diferentes, foi atingido um certo nível da abstração. Estamos prontos a abordar o problema da representação, isto é, chegamos à quarta etapa.

0200 v	0100 a	0000 am	0210 v	0110 a	0010 am
1200 v	1100 a	1000 am	1210 v	1110 a	1010 am
2200 v	2100 a	2000 am	2210 v	2110 a	2010 am
3200 v	3100 a	3000 am	3210 v	3110 a	3010 am
0201 v	0101 a	0004 am	0211 v	0111 a	0011 am
1201 v	1101 a	1001 am	1211 v	1111 a	1011 am
2201	2101 a	2001 am	2211 v	2111 a	2011 am
3201 v	3101 a	3001 am	3211 v	3111 a	3011 am

Figura 4

O primeiro algarismo representa o número de seixos, o segundo o número de lápis, o terveiro o dos fósforos, o quarto o de rôlhas. Assim, 1210 quer dizer: um seixo, dois lápis, um fósforo, zero rôlhas.

Quarta etapa

Como se pode chegar a representar a idéia da conjunção, isto é, a idéia da simultaneidade à qual se chega jogando os jogos descritos? É necessário uma representaçao precisa que deverá compreender as concretizações diferentes já mencionadas. As rêdes lógicas nos oferecem uma tal representação.

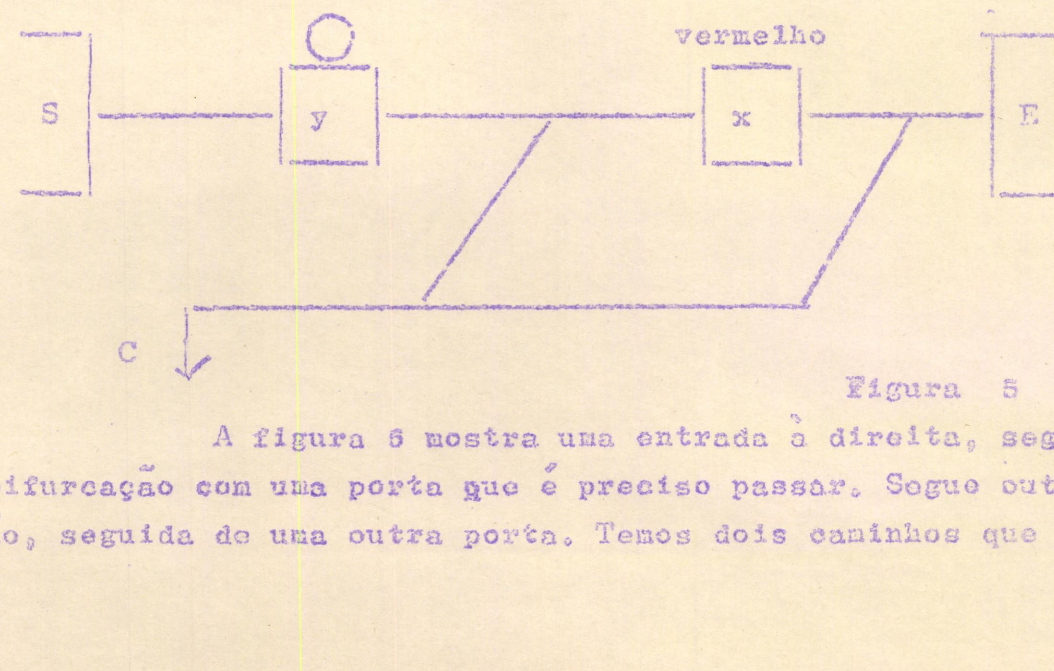


Figura 5

A figura 6 mostra uma entrada à direita, seguida de uma bifurcação com uma porta que é preciso passar. Segue outra bifurcação, seguida de uma outra porta. Temos dois caminhos que chegam à esquerda: o caminho ao alto nos dá a saída e o caminho de baixo, o complemento do conjunto de saída. Pode-se chamá-lo "rebut". Os elementos do conjunto universal que chegam à saída representam de uma maneira concreta a conjunção das duas propriedades x e y. Eis a lei que é preciso seguir na bifurcação que precede uma porta: para que um elemento passe por uma porta êle precisa e basta que êle possua a propriedade que está marcada sôbre a porta. Por exemplo, no caso dos blocos lógicos, podemos colocar a etiqueta <u>vermelho</u> sôbre uma porta e a etiqueta <u>redondo</u> sôbre a outra. Todos os blocos passam pela entrada, mas os vermelhos passarão pela porta x, os não-vermelhos tomarão outro caminho. Os vermelhos que não são redondos tomarão o caminho para baixo, enquanto que os redondos vermelhos passarão pela porta y, a porta dos redondos. Tomamos o atributo <u>vermelho</u> para valor da variável x. Tomamos o atributo <u>redondo</u> para valor da variável y. Temos aqui uma representação conveniente para a conjunção. Para a disjunção faz-se uma representação semelhante.

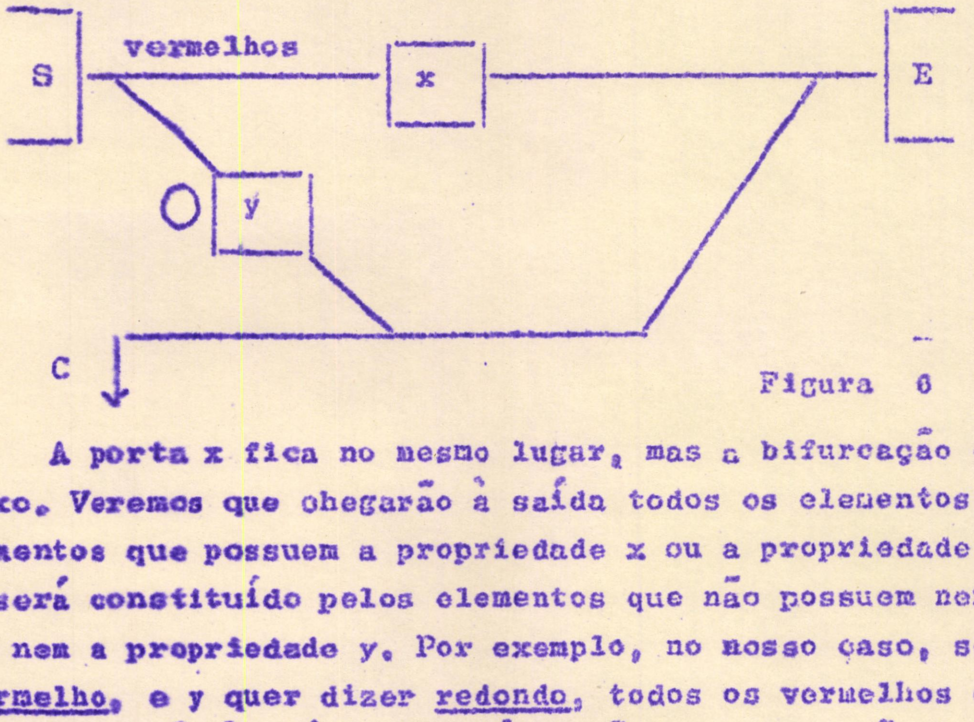


Figura 6

A porta x fica no mesmo lugar, mas a bifurcação chega, agora em baixo. Veremos que chegarão à saída todos os elementos e somente os elementos que possuem a propriedade x ou a propriedade y. O complemento será constituído pelos elementos que não possuem nem a propriedade x nem a propriedade y. Por exemplo, no nosso caso, se x quer dizer <u>vermelho</u>, e y quer dizer <u>redondo</u>, todos os vermelhos e todos os redondos chegarão à saída, mas só os não-vermelhos não-redondos formarão o complemento. Esta rêde representará a noção de disjunção.

Há duas maneiras de representar a negação. Por exemplo, se quisermos que os não-vermelhos ou os círculos cheguem à saída, colocaremos a porta dos x em baixo em lugar de colocá-la ao alto, como por exemplo, na figura 7.

Na figura 7 é evidente que todos os não-x chegam à saída, em seguida, também, todos os y. Um y é ou um x, ou um não-x. Os y que são os não-x já estão lá, mas os y que são x passaram pela porta x e em seguida tomaram o caminho para a porta dos y.

Se quiséssemos negar a propriedade y, teríamos y em baixo em lugar de tê-lo ao alto ...

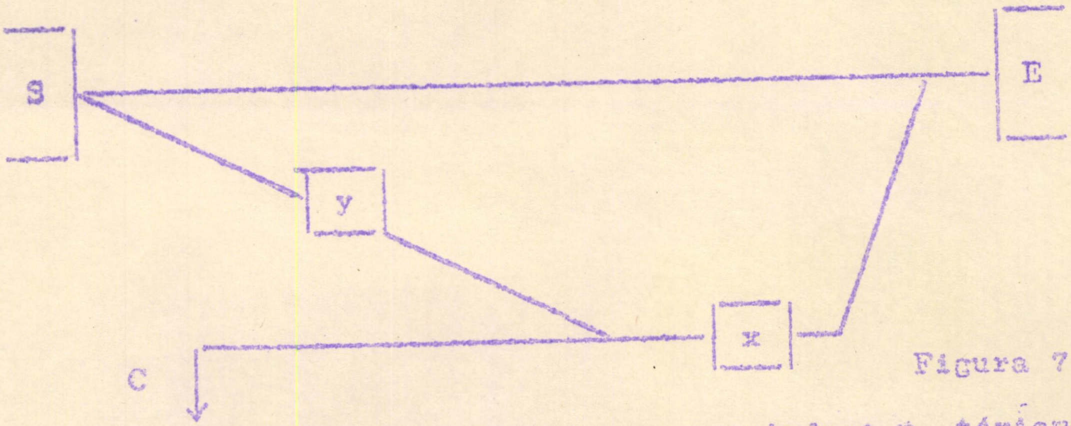


Figura 7

Se quisessemos negar a propriedade y, teríamos y em baixo em lugar de tê-lo no meio como mostra a figura 8.

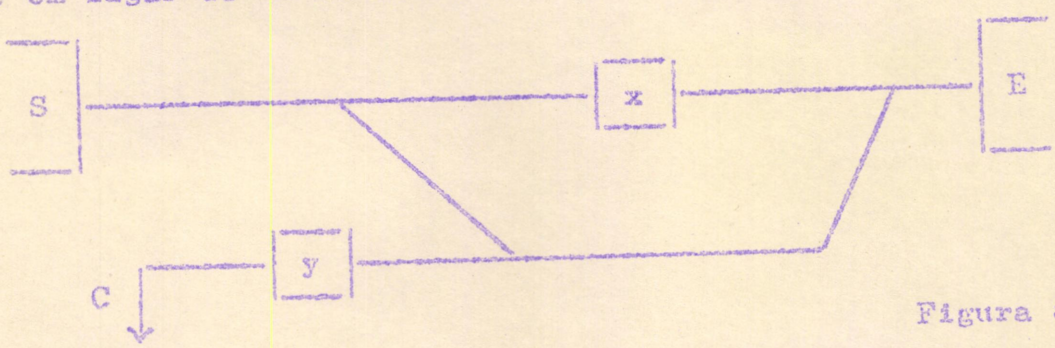


Figura 8

Aqui os blocos que constituem o conjunto de partida são dos x ou dos não-y. Pode-se, facilmente, ver como se constrói o conjunto reunião dos não-x ou dos não-y, etc... Vê-se, igualmente, na figura 8 que temos em S um conjunto que concretiza, de certo modo, uma implicação. No conjunto de partida da figura 8 se procuramos um y êste deve ser um x, porque os y que não são dos x chegam, evidentemente, ao conjunto complementar (rebut refugo). Então,"não-y ou x" que é verdade para o conjunto de partida da figura 8, pode ser caracterizado igualmente por "se y, então x" ou talvez, ainda melhor: " a condição y acarreta x".

Para representar uma negação que nega tudo o que precede, poderemos utilizar uma espécie de cruzamento,tal como indica a figura 9.

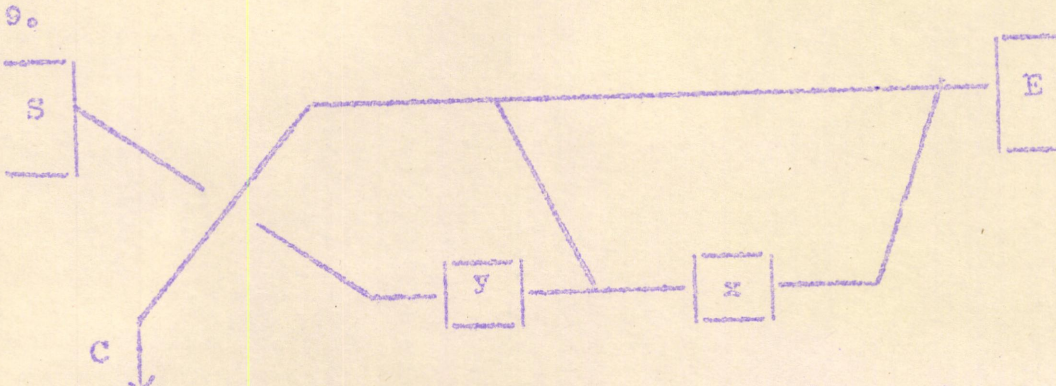


Figura 9

Se o cruzamento não foi introduzido no fim da rêde itinerário 9, a saída será o conjunto no qual todos os elementos são ne não-y ou não-x. Após a negação de tudo isso temos um conjunto no qual é verdade para todos os elementos que êles não são "não-y ou não-x".

Vê-se logo, olhando a figura 5 que os mesmos elementos chegam à saída na figura 5 e na figura 9, sendo isso também verdade para os dois complementos. Isto quer dizer que a rêde (reseau) da figura 9 partiu o conjunto universal entre conjunto de saída e conjunto refugo (rebut), da mesma maneira que a rêde itinerário representada na figura 5. Aqui já fomos levados à consideração de certas relações de equivalência entre redes. Por exemplo, pode-se dizer que a rede 5 é equivalente à rede 9. Diz-se que as duas redes são equivalentes se todas as duas fazem a mesma partição (repartition) do conjunto universal em conjunto de partida e conjunto rebut, respectivamente. Aqui já estamos muito perto da quinta etapa porque já se começou uma espécie de descrição. Introduzimos uma relação de equivalência no interior do sistema de representação e, assim, já abordamos o problema esboçado para a quinta etapa.

Quinta etapa

Para descrever as equivalências entre as redes (réseaux) é preciso inventar nomes para pedaços das rêdes que representam de uma maneira gráfica as noções lógicas já aprendidas durante as etapas anteriores. Tomemos os diagramas 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - por exemplo. Experimentemos descrever de uma maneira concisa as propriedades conjuntivas, disjuntivas dos conjuntos que se encontram à saída dessas figuras.

- Na saída de 5, todos os elementos são, ao mesmo tempo y e x. É preciso um s-ímbolo para "ao mesmo tempo". Evidentemente pode-se tomar qualquer símbolo. Por exemplo, K utilizado pelos polonêses. Então, Kyx significará a propriedade "ao mesmo tempo y e x".

- Na saída da figura 6, todos os blocos são y ou x. É preciso um símbolo para "... ou ...", isto é, o fato de que há uma alternativa no conjunto de saída, que podemos ter os x ou os y neste conjunto. Pode-se utilizar A para esta alternativa. Escreve-se Ayx.

- Na saída da figura 7 estão todos os blocos, seja os y, seja os não-x. A alternativa é, então, entre os y e os não-x. A saída da figura 7 se caracterizará, então, escrevendo: AyNx. A saída da figura 8 será igualmente, caracterizada por ANyx.

- Na figura 9 temos um não. O não, isto é, a negação se refere à disjunção dos nãp-y não-x, isto é, que se não há cruzamento no fim da rêde, teremos ANyNx. Mas, sendo dado que há cruzamento, é preciso, ainda, escrever um N à esquerda o que nega toda a propriedade ANyNx. A propriedade negada será NANyNx.

Vimos, por exemplo, que Kyx é equivalente à NANyNx. É preciso introduzir um símbolo para a equivalência. Podemos escolher, por exemplo, = ou uma flecha, ou duas flechas. Escreve-se Kyx = NANyNx. Chegamos à uma descrição parcial do sistema de representação introduzido. Vê-se, por exemplo, na figura 5, que se trocamos x e y, da mesma maneira os mesmos elementos à saída. Poderíamos, então, escrever / Kyx = Kxy. Na figura 6 pode-se igualmente substituir x por y e y por x. Isto significa que se pode escrever Axy = Ayx.

Observemos a figura 7. Se substituímos y por x e x por y teremos AxNy. Vê-se imediatamente que o conjunto de saída não se compõe dos mesmos elementos de ainda há pouco. Então, na figura 7, se / substituímos x por y e y por x trocamos o conjunto de saída, enquanto que nas figuras 5 e 6, era impossível trocar x por y e y por x sem trocar o conjunto de saída. Isto quer dizer que conduzimos à propriedade comutativa da conjunção na figura 5 e à propriedade comutativa da disjunção na figura 6.

Observemos um pouco a figura 8. Vimos que no interior / do conjunto de saída, a condição y ocasiona a propriedade x. Pode-se simbolizar êste enunciado condicional escrevendo Cyx. De outro lado, vemos muito bem que na figura 8, na saída, todo elemento é ou um não-y, ou um x. Isto quer dizer que o conjunto de saída pode, igualmente, ser caracterizado escrevendo ANyx.

Vimos que Cyx = ANyx.

Do ponto de vista formal, vimos que C pode ser substituído por AN e inversamente. Com efeito, pode-se abster-se do símbolo C e sempre utilizar o símbolo composto AN. Sendo dado que os enunciados condicionais desempenham (jouent) um papel capital na lógica, introduzimos apesar de tudo, um símbolo separado para a condição. "Condição y acarreta x"(entraîne), é chamada uma <u>implicação</u>. Dizemos que y implica x, porque a condição y acarreta o resultado x no conjunto de saída considerado.

No momento, somos capazes de fornecer alguns métodos, válidos, de raciocínio. Consideramos só rodes equivalentes; isto quer dizer que podemos agora introduzir raciocínios, uns raciocínios cuja ordem possa ser sempre invertida (renversé). Por exemplo, se eu sei que Kyx, eu posso deduzir NANyNx. Mas, igualmente, se eu sei que NANyNx, eu posso deduzir Kyx. Em linguagem mais comum isto poderá ser expresso dizendo que se eu sei que ao mesmo tempo uma coisa e uma outra coisa são verdadeiras, eu também sei que não é verdade que ou a primeira coisa não é verdadeira, ou a segunda coisa não é verdadeira, e inversamente. Há também casos de raciocínio cuja ordem não pode ser invertida (renversé). Pode-se encontrar êsses métodos de raciocínio comparando os os conjuntos de partida que se encontram no fim das representações correspondentes. Por exemplo, tomemos a saída de 6 e a saída de 5. Digamos que me dão a informação de que um certo elemento procurado está na saída de 5. Eu não tenho outras informações sôbre êste elemento. Será que eu posso deduzir que êste elemento está igualmente na saída do 6 ou não? Isto traz (revient) a pergunta se todo elemento que chega à saída 5, chega igualmente à saída 6. Na saída 5 chegam todos os y que são igualmente x. Quem chega com os x que são ao mesmo tempo y? Todos os x chegam à saída na figura 6 e vê-se claramente que os x que são ao mesmo tempo y são, evidentemente, também x. Isto quer dizer que se encontramos um elemento na saída do 5, o encontraremos igualmente na saída do 6. Pode-se, então, propor um método de raciocínio: Kxy sendo dado, eu posso deduzir Ayx. Veremos, fàcilmente, que o raciocínio no sentido inverso não será válido, porque se encontramos um elemento na saída da figura 6, é bem possível que não o encontremos na saída da figura 5. Por exemplo, pode-se ter y que não são x na saída 6 enquanto que tais elementos não estarão jamais na saída 5. É preciso distinguir, claramente, os raciocínios que são reversíveis dos raciocínios que não o são. Sendo dado Kyx pode-se deduzir Ayx mas não inversamente. Mas, por exemplo, Kyx sendo verdadeiro, pode-se deduzir Kxy e inversamente. Pode-se, então, acumular um certo número dessas propriedades de equivalência e de deduções irreversíveis que farão parte da quinta etapa, isto é, da etapa descritiva durante a qual nós experimentamos descrever as propriedades da representação por rêdes (réseaux) lógicas das noções lógicas aprendidas anteriormente.. É claro que não é possível descrever todas as propriedades das rêdes lógicas, porque há um número infinito delas. E, assim, somos levados à consideração da da sexta etapa durante a qual / deveremos procurar métodos de derivação que nos permitam ir de um certo conjunto de propriedades a qualquer outra propriedade possuída pela rêde lógica. Isto nos fornecerá um sistema formal para a lógica (pour la logique même). Do ponto de vista pedagógico, não é necessário compreender a lógica inteira num estudo do gênero dêste que pertence à / sexta etapa. Pode-se muito bem estabelecer pequenas partes, isto é, sistemas formais parciais, no interior dos quais pode-se operar de uma maneira formal.

Sexta etapa

Vamos dar um pequeno sistema formal para ilustrar o gênero de de atividade ao qual se pode chegar durante esta etapa. Para executar uma demonstração particular, vamos admitir as seguintes deduções ou racínios reversíveis:

(1) - Cxy se e sòmente se ANxy

(2) - Axy se e sòmente se Ayx

(3) - x se e sòmente se NNx.

Vamos admitir ainda uma dedução não reversível que compreende duas premissas:

(4) Cxy - primeira premissa

Cyz - segunda premissa

Pode-se concluir Cxz

Vamos, agora, deduzir um outro método de raciocínio. Por exemplo, sendo dado Cxy, vamos mostrar que se pode deduzir: CNyNx e inversamente. Se só utilizamos métodos de raciocínio, 1, 2 e 3, cada passo pode ser reversível. Uma vez que se utilize o método 4, o raciocínio torna-se irreversível. Sendo dado Cxy, pode-se deduzir, pelo método 1: ANxy. Podemos agora nos servir do método 2, que nos permite inverter os dois têrmos da disjunção. Isto quer dizer que se pode colocar AyNx. Nós nos serviremos, agora, do método 3 substituindo y por NNy. Teremos ANNyNx. Servimo-nos ainda do método 1 e escreveremos CNyNx. Demonstramos que sendo dado Cxy, obtem-se ANyNx, é o que se chama método de raciocínio por contraposição.

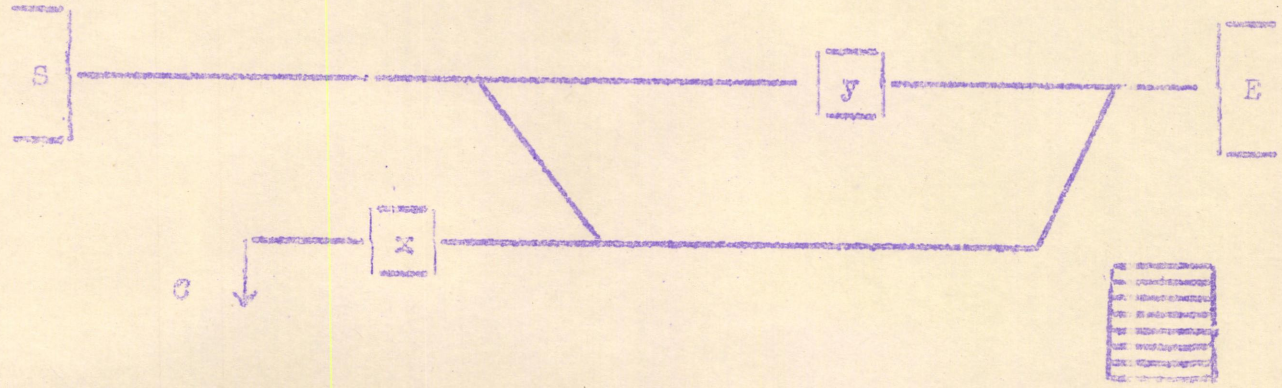
Tomemos, agora, um outro raciocínio no qual intervém o método 4. Tomemos duas premissas:

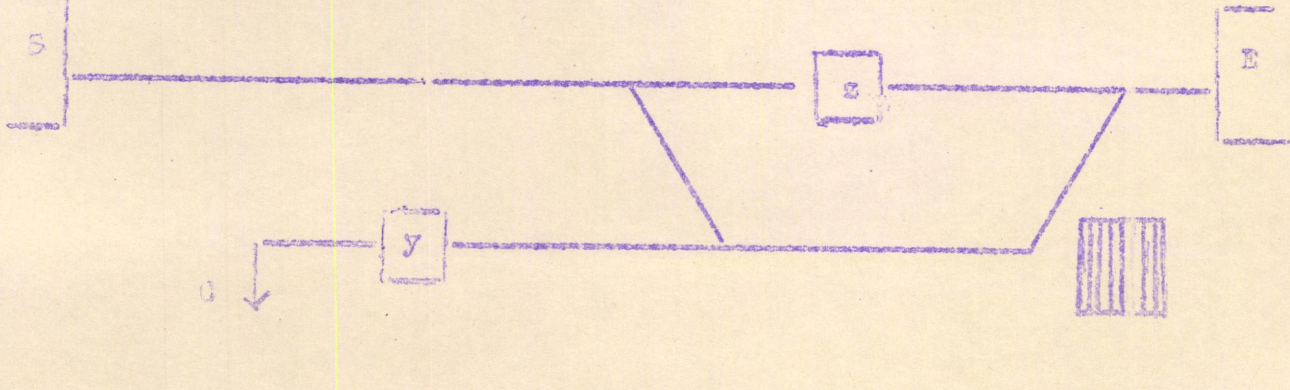
Cxy primeira premissa

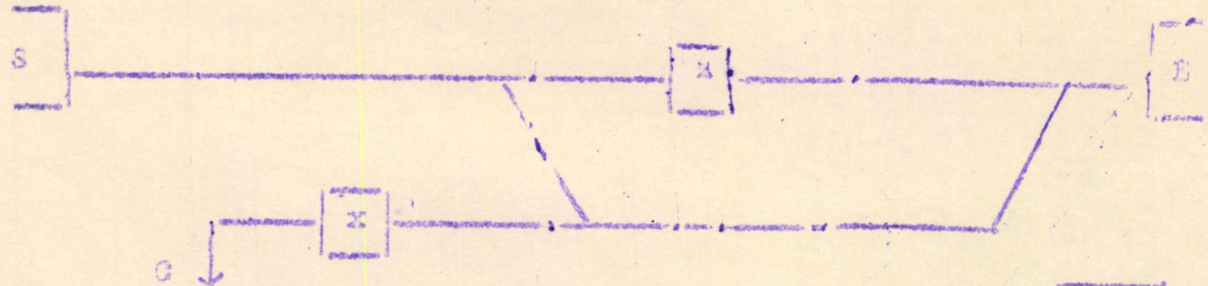
Axz segunda premissa.

É preciso demonstrar Ayz. Já temos as premissas: Cxy, Axz. Pelo raciocínio de tipo 3, Axz pode ser substituido por ANNxz. Pelo raciocínio do tipo 1, a última fórmula pode ser substituida por CNxz. Pelo método de contraposição aplicado a Cxy, que viemos de demonstrar, podemos propor CNyNx. Tomemos, agora, CNyNx para nossa primeira premissa, CNxz, para nossa segunda premissa e apliquemos o raciocínio do tipo 4. Teremos a conclusão CNyz. Apliquemos agora o raciocínio do tipo 1. Teremos ANNyz. Apliquemos, agora, o tipo 3 e teremos Ayz. Isto demonstra que das duas premissas iniciais Cxy e Axz, pode-se deduzir Ayz.

Vê-se que chegamos à etapa das demonstrações formais. Encontramos descrições parciais das rêdes lógicas que foram formuladas pelos métodos de raciocínio 1, 2 e 3 assim como 4. A seguir os utilizamos por dedução de outros métodos de raciocínio. Os outros métodos de raciocínio que não estão inclusos na descrição inicial parcial podem ser chamados de teoremas lógicos: resta mostrar que fizemos bem







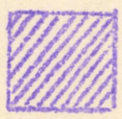


Figura 10 A

propondo o método de raciocínio tipo 4. É preciso verificar claramente que se um elemento pertence ao conjunto de partida da rêde Axy e ao da rêde ANyz, pertence igualmente, ao conjunto de partida da rêde ANxz.

Na figura 10 vemos o diagrama do Cxy seguido do diagrama do Cyz, e por fim a rêde do Cxz. O diagrama de Carroll está indicado ao lado, onde o conjunto das saídas do Cxy é hachuriado horizontalmente, e o do Cyz é hachuriado verticalmente. O conjunto que corresponde a Cxz está hachuriado oblíquo. Vê-se que se um elemento pertence ao conjunto de partida de Cxy ao mesmo tempo que ao conjunto de partida de Cyz, deve pertencer à parte do diagrama de Carroll que está hachuriada, ao / mesmo tempo horizontal e verticalmente. Vê-se que cada elemento que está hachuriado de duas maneiras pertence ao conjunto de partida de Cxz. Por consequência, o raciocínio do tipo 4 é válido e pode ser aceito

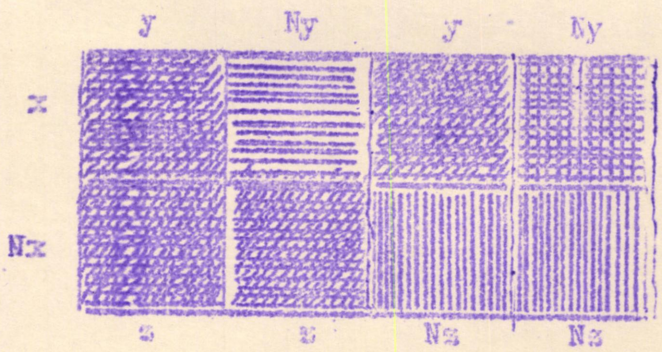


Figura 10 B

Vimos, igualmente, que na aplicação dos raciocínios 1, 2, 3 e 4 não tomamos, precisamente, os mesmos símbolos que eram postos nas fórmulas que explicam os raciocínios em questão. Por consequência, é preciso, para ser formal, juntar uma regra de jôgo que nos permita substituir cada x, cada y e cada z, numa fórmula, por uma outra fórmula qualquer que esteja bem escrita. É claro que uma fórmula bem escrita segue as leis da ortografia lógica imitada. Por exemplo, x, y e z são palavras, por assim dizer, bem escritas. Uma palavra bem escrita pode ser precedida / por N, isto nos dá uma palavra bem escrita. Pode-se, igualmente, escrever duas palavras bem escritas, uma após a outra, e fazer proceder esta série de símbolos ou por A, ou por C, ou por K. Tôdas as palavra bem escritas seguem essas leis de composição. Isto quer dizer que, em lugar de Axy premissa, Ayx conclusão, poderíamos escrever, por exemplo, AxNz, premissa ANzx, conclusão. Isto quer dizer que y pode ser substituido por Nz por exemplo, ou por qualquer outra fórmula que seja uma palavra bem escrita. Há, então, dois aspectos no formalismo: há o aspecto de escrita o qual é preciso levar em conta, isto é, que há métodos convenientes para simbolizar os elementos do sistema. Êstes são as leis de ortografia do sistema. A seguir, há leis de transformação que correspondem às leis sintáticas de nossa linguagem artificial. Vamos esboçar a passagem, a partir do jôgo livre, isto é, da adaptação inicial da / criança a um ambiente especialmente construído para a aprendizagem de estruturas matemáticas e lógicas, até a etapa em que a criança é capaz de manipular sistemas formais. É muito importante observar que na construção dos programas, absolutamente, não se pretende que em tal ou tal etapa da aprendizagem da criança, ela adquire êste ou aquêle conceito em vista de tal ou tal rubrica do programa. Os programas, em geral, são construídos de uma maneira que supõe que existam critérios que permitam dizer se a criança viu ou não um certo aspecto ou uma certa parte do conteúdo do programa. Acabamos de ver que, por exemplo, a idéia de conjunção pode ser desenvolvida no início da aprendizagem da criança, mesmo na maternal, até cêrca de 11-12 anos de idade, quando a criança está preparada (en mesure) para manipular sistemas formais. Verdadeiramente, não se pode dizer em que momento, durante êste período, a criança, efetivamente, apreendeu a noção de conjunção. Por consequência, um programa que está redigido ponto por ponto é inteiramente irracional do ponto de vista das realidades psicológicas da aprendizagem.