

Parte nº 11

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"  
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P.

Trad. A.B.Krebs

LES SIX ÉTAPES DU PROCESSUS  
D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUE



I

DESCRICÃO DAS ETAPAS

O que é compreender? O que é aprender? é preciso confessar que para estas duas perguntas nós ainda não temos resposta cientificamente satisfatória. Se é verdade que ninguém mais duvida hoje, em dia, do fato que a relação estímulo resposta conduz a um adestramento (dressage) que, sobre o plano da compreensão assim como da aprendizagem posterior, representa a maior parte do tempo bloqueios (des blocages), resta mostrar quais são os elementos constitutivos do processo de aprendizagem, çigno dêsse nome.

Partimos do teorema da existência, segundo o qual é a partir de um ambiente rico que a criança pode construir seus conhecimentos, e vamos tomar como modelo a aprendizagem da língua materna. Todo mundo sabe que as crianças que vivem num meio onde se fala uma língua rica, são capazes de se construir, de elaborarem uma língua rica. Nós podemos mostrar, ao longo de nossas pesquisas, ao mesmo tempo teóricas e práticas (cf, Bibliografia I,II,III) que "mergulhar a criança na água profunda" facilita seu processo de aprendizagem, isto é, ao mesmo tempo o processo de abstração, de generalização e de transferência.

Nossos trabalhos posteriores nos permitiram analisar de mais perto o processo de abstração no qual nós fomos levados a distinguir 6 (seis) etapas diferentes. O estudo que quero aqui dedicar-me é apresentar e a ilustrar por exemplos tomados de empréstimo à lógica e à geometria, essas diferentes etapas, as quais, evidentemente, é preciso levar em conta na organização do ensino matemático, se queremos que todas as crianças ao chegarem, isto é, se quisermos evitar de fechar a porta das ciências matemáticas ao maior número, como foi o caso no passado, e, como ainda é o caso presentemente, na maior parte.

PRIMEIRA ETAPA

A noção de ambiente nos parece capital porque em certo sentido, toda aprendizagem equivale a um processo de adaptação do organismo a seu ambiente. Dizer de uma criança, de um adulto ou mesmo de um animal, ou de um modo geral, de um organismo qualquer que aprendeu alguma coisa, significa que este organismo, este adulto ou esta criança pôde modificar seu comportamento em relação a um dado ambiente. Na fase que precede a aprendizagem, o organismo está mal adaptado a uma dada situação, a um dado ambiente, mas, graças à aprendizagem o organismo pôde se adaptar a ponto do indivíduo se tornar capaz de dominar as situações que êle encontra neste ambiente. Se levamos em conta deste aspecto da adaptação que representa toda aprendizagem, parece razoável apresentar à criança

ga um ambiente ao qual ela possa se adaptar. Este processo de adaptação a um ambiente é o que os pedagogos designam, de um modo geral, sob o nome de aprendizagem.

Para ser mais preciso, a adaptação tem lugar numa fase que podemos designar por fase do jogo livre. Todos os jogos infantis representam uma espécie de exercício que permite à criança de se adaptar às situações que ela terá de encontrar em sua vida futura. Ora, se nos propomos a fazer a criança aprender lógica, parece necessário de frontá-la com situações que a conduzirão a formar conceitos lógicos. Se nos apegamos a este exemplo da lógica, é forçoso reconhecer que, de um modo geral, o ambiente no qual vive a criança não comporta atributos que nós consideramos como lógicos. É preciso, então, inventar um ambiente artificial. Ao contacto desse ambiente, a criança, pouco a pouco, será levada a formar conceitos lógicos de um modo mais ou menos sistemático. O exemplo de um tal ambiente pode, por exemplo, compreender o universo dos blocos lógicos. Um jogo de blocos lógicos se compõe de várias peças de madeira ou de plástico onde se faz variar sistematicamente as seguintes variáveis: a cor, a forma, a espessura e o tamanho. Evidentemente, não é necessário se ater a essas quatro variáveis. Pode-se, igualmente, fazer variar outras. Se quisermos que a criança faça seus primeiros passos na aprendizagem das noções concernentes ao conceito de potência é aconselhável colocá-la num ambiente correspondente. Um tal ambiente pode ser constituído pelos jogos Multibase, onde segundo cada base, fornecemos um certo número de objetos cujo volume ou a superfície vão crescendo em relação à base escolhida. Se escolhemos a base 3, é preciso fornecer uma peça que se toma por unidade, em seguida outros pedaços cujo volume será três vezes o da unidade, a seguir, outras peças cujo volume será nove vezes o da unidade e, assim por diante. Por uma livre interação com este material, a criança fará seus primeiros passos para a aprendizagem das propriedades das potências. Poderíamos dar um grande número de exemplos semelhantes para mostrar como se pode criar um ambiente artificial para a aprendizagem de um conjunto qualquer de noções matemáticas.

#### SEGUNDA ETAPA

Após um certo período de adaptação, isto é, de jogo, a criança se dá conta das exigências (constraints) da situação. Há certas coisas que não se pode fazer. Há certas condições que é preciso satisfazer antes de poder atingir certos fins. A criança se dá conta de regularidades impostas à situação. Neste momento está pronta a jogar com restrições que lhe serão artificialmente impostas. Estas restrições se chamam: regras do jogo.

Quando se joga xadrez é totalmente arbitrário que certas peças tenham certas propriedades no jogo. Estas propriedades não dependem em nada da forma ou de outras propriedades físicas das peças. Da mesma maneira pode-se sugerir às crianças, jogos com regras: as próprias crianças poderão, a seguir, inventar outras regras, trocar as regras e, jogar os jogos correspondentes. Assim,



elas se habituarão à manipulação de regularidades. ~~Entretanto, se~~ queremos que a criança aprenda estruturas matemáticas, os ~~conjuntos de regras~~ que sugerimos serão sobre estruturas matemáticas pertinentes. ~~Os jogos se farão por~~ / meio de certos materiais estruturados como aqueles indicados acima.

#### TERCEIRA ETAPA

Evidentemente, jogar os jogos estruturados segundo as leis matemáticas inerentes à uma estrutura matemática qualquer, não é aprender matemática. Como pode a criança extrair do conjunto desses jogos as abstrações matemáticas subjacentes? O meio psicológico é fazer jogar jogos que possuem a mesma estrutura, mas que têm uma aparência muito diferente para a criança. Assim, a criança será levada a descobrir as ligações de natureza abstrata que existem entre os elementos de um jogo e os elementos de outro jogo, de estruturas idênticas. É o que nós chamamos os jogos de dicionário, ou, se quisermos utilizar um termo matemático: os jogos de isomorfismo. Assim, a criança destaca / (degage) a estrutura comum dos jogos e se desembaraça das partes não pertinentes. Por exemplo, as propriedades dos blocos lógicos que não são pertinentes são a utilização das cores, das formas, etc.. Poderíamos utilizar outras propriedades, poderíamos mesmo, tomar conjuntos de objetos e considerar as propriedades dos conjuntos em lugar de propriedades de objetos. Nem mesmo é essencial que tenha um certo número determinado de valores para uma ou outra / das variáveis que introduzimos no jogo. O que é importante é que há várias variáveis, que cada uma dessas variáveis tem muito valores, e, que a criança / possa manipular essas variáveis escolhendo os conjuntos de blocos, conjuntos de conjuntos ou, em geral, conjuntos de elementos quaisquer, de modo que os elementos possam ser distinguidos uns dos outros, pela percepção da criança. Assim, os jogos jogados com uma concretização, depois a seguir com outra concretização, serão identificados do ponto de vista de estruturas. É neste momento que a criança se dá conta do que é "semelhante" (pareil) nos diversos jogos que praticou, isto é, que ela terá realizado uma "abstração".

#### QUARTA ETAPA

De certo modo, a criança não é capaz de se utilizar desta abstração porque ela ainda não está fixada em seu espírito. Antes de tomar plenamente consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo de representação. Uma tal representação lhe permitirá falar do que ela abstraiu, de olhar ao redor, de sair do jogo ou do conjunto de jogos, de examinar os jogos e de refletir sobre o ~~seu~~ (objetivo) assunto. Uma tal representação pode ser um conjunto de gráficos, pode ser um sistema cartesiano, pode ser um diagrama de Venn, ou qualquer outra representação visual, ou mesmo auditiva, no caso de crianças que não pensam essencialmente de maneira visual.

#### QUINTA ETAPA

Após a introdução de uma representação, ou mesmo de muitas representações da mesma estrutura, será possível examinar esta representação. A finalidade deste exame é dar-se conta das propriedades da abstração realizada.



nalidade deste exame é dar-se conta das propriedades de abstração realizada. Numa representação pode-se, facilmente, dar-se conta das principais propriedades do ser matemático que se criou. Isto significa que nesta etapa precisamos de uma descrição do que representamos. Para uma descrição é preciso, evidentemente, uma linguagem; é por isso que a realização de propriedades de abstração nesta quinta etapa deve ser acompanhada pela invenção de uma linguagem e, a / descrição da representação, a partir dessa linguagem inventada. Será melhor, se possível, que a criança invente sua própria linguagem e que mais tarde as crianças com a ajuda do professor, discutam entre elas se uma <sup>das</sup> linguagens introduzidas é mais vantajosa do que as outras. Uma tal descrição formará a base de um sistema de axiomas. Cada parte da descrição poderá servir de axioma ou mesmo mais tarde, de teorema.

#### SEXTA ETAPA

A maior parte das estruturas matemáticas são tão complexas que elas possuem um número infinito de propriedades. É impossível citar todas essas propriedades numa descrição dos sistema que se engendrou. É preciso, então, de / certo modo, fechar a descrição num domínio finito, em um número finito de palavras. Isto quer dizer que precisamos de um método para chegar a certas partes da descrição, sendo dada uma primeira parte que tomamos como ponto de partida. Esses métodos para chegar a outras partes da descrição serão nossas regras do jogo de demonstração. As descrições posteriores às quais nós chegaremos, serão chamadas de "teoremas do sistema". Assim, inventamos um sistema formal no qual há axiomas, isto é, a primeira parte da descrição e, as regras do jogo. Poderá haver outras que serão as regras lógico-matemáticas da demonstração. A seguir haverá teoremas do sistema que são as partes da descrição às quais se chega a partir da descrição inicial, utilizando as regras do jogo.

#### CONCLUSÕES

##### RESUMO DAS ETAPAS

A primeira etapa introduz o indivíduo no ambiente que é construído expressamente para que certas estruturas matemáticas possam ser retiradas. A primeira adaptação a este ambiente se chama "Jogo livre".

Em segundo lugar vem a etapa dos jogos estruturados. Regularidades que foram descobertas pela criança em seu ambiente a levam à possibilidade de examinar jogos. Um jogo tem início, regras e um fim. As regras representam as dificuldades nas situações matemáticas, como em toda situação cotidiana ou científica. Manipular as dificuldades de uma situação é dominar a situação na qual as dificuldades existem. Essas dificuldades podem ser naturais ou artificiais.

Terceira etapa. Aqui o indivíduo se dá conta da estrutura comum dos jogos estruturados já jogados.

A estrutura comum é representada de uma maneira gráfica ou de outra.

O indivíduo se torna capaz de substituir, preencher a representação vazia pelos estados e os operadores particulares de um jogo particular de estrutura, em questão.

Quinta etapa. Aqui se estudam as propriedades da representação, isto é, as propriedades da abstração atingida. Com este fim é preciso inventar uma linguagem.

Sexta etapa: Sendo dado que todas as propriedades não podem ser descritas numa descrição, toma-se um número mínimo de se inventa um processo para se deduzir outras. Este número mínimo de descrições, chama-se "axiomas". O processo para se deduzir outros se chama uma demonstração e as propriedades ulteriores chamam-se "Teoremas".

A manipulação de um tal sistema, chamado sistema formal, é a meta final da aprendizagem matemática de uma estrutura.

Na pedagogia tradicional se agia exatamente em sentido inverso. Introdizia-se um sistema formal por meio de símbolos. Nos damos conta de que a criança não é capaz de compreender um tal sistema, por consequência utilizamos meios audiovisuais para fazê-la compreender. Quando se chega a partir da etapa do simbolismo passamos à etapa da representação, ainda que a criança não é capaz de aplicar os conceitos, mas utiliza-se de auxílios audiovisuais; por consequência é preciso ensinar-lhes a realidade.

Finalmente, chegamos à realidade de onde devemos partir. Assim, no ensino tradicional, a direção de aprendizagem era exatamente o contrário da proposta nestas páginas.

.....



*Arquivaldo  
M. S. S. S.  
27/05/82*

LES SIX ÉTAPES DU PROCESSUS  
D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUE

I

DESCRIÇÃO DAS ETAPAS

O que é compreender ? O que é aprender ? É preciso confessar que para essas duas perguntas nós ainda não temos resposta - cientificamente satisfatória. Se é verdade que ninguém mais duvida hoje em dia, do fato que a relação estímulo resposta conduz a um adestramento (dressage) que, sobre o plano da compreensão assim como da aprendizagem ulterior, representa a maior parte do tempo bloqueios (des blocages), resta mostrar quais são os elementos constitutivos ao processo de aprendizagem, digno dêsse nome.

Partimos do teorema da existência segundo o qual é a partir de um ambiente rico que a criança pode construir seus conhecimentos, e vamos tomar como modelo a aprendizagem da língua materna. Todo mundo sabe que crianças que vivem num meio onde se fala uma língua rica, são capazes de se construir, de elaborar uma língua rica. Nós podemos mostrar ao longo de nossas pesquisas ao mesmo tempo teóricas e práticas (cf, Bibliografia I, II, III) que "mergulhar a criança na água profunda" facilita seu processo de aprendizagem, isto é, ao mesmo tempo o processo de abstração, de generalização e de transferência.

Nossos trabalhos ulteriores nos permitiram analisar de mais perto o processo de abstração no qual nós fomos levados a distinguir 6 (seis) etapas diferentes. O estudo que quero aqui dedicar-me e apresentar e a ilustrar por exemplos tomados de empréstimos à lógica e à geometria essas diferentes etapas, as quais evidentemente é preciso levar em conta na organização do ensino matemático, se queremos que todas as crianças ai cheguem, isto é se quisermos evitar de fechar a porta das ciências matemáticas - ao maior número, como foi o caso no passado, e, como ainda é o caso presentemente na maior parte.

Primeira Etapa

A noção de ambiente nos parece capital porque em certo sentido, toda aprendizagem equivale a um processo de adaptação do organismo a seu ambiente. Dizer de uma criança, de um adulto ou mesmo de um animal, ou de um modo geral de um organismo qualquer que aprendeu alguma coisa significa que este organismo, este

adulto ou esta criança pôde modificar seu comportamento em relação a um dado ambiente. Na fase que precede a aprendizagem, o organismo está mal adaptado a uma dada situação, a um dado ambiente, mas, graças à aprendizagem o organismo pôde se adaptar a ponto do individuo se tornar capaz de dominar as situações -- que êle encontra nêste ambiente. Se levamos em conta dêste aspecto da adaptação que representa tôda aprendizagem, parece razoável apresentar à criança um ambiente ao qual ela possa se -- adaptar. Êste processo de adaptação a um ambiente é o que os pedagogos designam de um modo geral sob o nome de aprendizagem.

Para ser mais preciso, a adaptação tem lugar numa fase que podemos designar por fase do jôgo livre. Todos os jogos infantis representam uma espécie de exercício que permite à criança de se adaptar às situações que ela terá de encontrar em sua vida posterior. Ora, se nos propomos a fazer a criança aprender lógica, parece necessário defrontá-la com situações que a conduzirão a formar conceitos lógicos. Se nos apegamos a êste exemplo da lógica, é forçoso reconhecer que de um modo geral o ambiente no qual vive a criança não comporta atributos que nós consideramos como lógicos. É preciso, então, inventar um ambiente artificial. Ao contacto desse ambiente, a criança, pouco a pouco, será levada a formar conceitos lógicos de um modo mais ou menos sistemático. O exemplo de um tal ambiente pode, por exemplo, compreender o universo dos blocos lógicos. Um jôgo de blocos lógicos se compõe de várias peças de madeira ou de plástico onde se faz variar sistematicamente as seguintes variáveis: a cor, a -- forma, a espessura e o tamanho. Evidentemente, não é necessário de se ater a essas quatro variáveis. Pode-se igualmente fazer -- variar outras. Se quisermos que a criança faça seus primeiros -- passos para aprendizagem das noções concernentes ao conceito de potência é aconselhável colocá-la num ambiente correspondente. Um tal ambiente pode ser constituído pelos jogos Multibase, <sup>cuja</sup> ou segundo cada base, fornecemos um certo número de objetos cujo -- volume ou a superfície vão crescendo em relação à base escolhida. Se escolhemos a base 3, é preciso fornecer uma peça que se toma por unidade, em seguida outros pedaços cujos volume será -- três vezes o da unidade, a seguir, outras peças cujo volume será nove vezes o da unidade e, assim por diante. Por uma livre -- interação com êste material, a criança, fará seus primeiros passos para a aprendizagem das propriedades das potências. Poderíamos dar uma grande número de exemplos semelhantes para mostrar como se pode criar um ambiente artificial para a aprendizagem de um conjunto qualquer de noções matemáticas.

### Segunda Etapa

Após um certo período de adaptação, isto é, de jogo, a criança se dá conta das exigências (constraints) da situação. Há certas coisas que não se pode fazer, há certas condições que é preciso satisfazer antes de poder (atender), atingir, certos -- fins. A criança se dá conta de regularidades impostas à situação. Neste momento, está pronta a jogar com restrições que lhe serão artificialmente impostas. Estas restrições se chamam: regras do jogo.

Quando se joga xadrês é totalmente arbitrário que certas peças tenham certas propriedades no jogo. Estas propriedades não dependem em nada da forma ou de outras propriedades físicas das peças. Da mesma maneira pode-se sugerir às crianças, jogos com regras: as próprias crianças poderão, a seguir, inventar -- outras regras, trocar as regras e, jogar os jogos correspondentes. Assim, elas se habituarão à manipulação de regularidades. Evidentemente, se queremos que a criança aprenda estruturas matemáticas, os conjuntos de regras que sugeriremos serão sobre estruturas matemáticas pertinentes. Os jogos se farão por meio de certos materiais estruturados como aqueles indicados acima.

### Terceira etapa

Evidentemente, jogar os jogos estruturados segundo as leis matemáticas inerentes à uma estrutura matemática qualquer não é aprender matemática. Como pode a criança extrair do conjunto desses jogos as abstrações matemáticas sub-jacentes? O meio psicológico é fazer jogar jogos que possuem a mesma estrutura, mas que têm uma aparência muito diferente para a criança. Assim, a criança será elevada a descobrir as ligações de natureza abstrata que existem entre os elementos de um jogo e os -- elementos de outro jogo, de estruturas idênticas. É o que nós chamamos os jogos de dicionário, ou, se quisermos utilizar um termo matemático: os jogos de isomorfismo. Assim, a criança -- destaca (degage) a estrutura comum dos jogos e se desembaraça das partes não pertinentes. Por exemplo, as propriedades dos blocos lógicos que não são pertinentes são a utilização das cores, das formas, etc. Poderíamos utilizar outras propriedades, poderíamos mesmo, tomar conjuntos de objetos e considerar as propriedades dos conjuntos em lugar de propriedades dos objetos. Nem mesmo é essencial que tenha um certo número ~~determinada~~ determinado de -- valores para uma ou outra das variáveis que introduzimos no jogo. O que é importante é que há várias variáveis, que cada uma dessas variáveis tem muitos valores, e, que a criança possa manipular es sas variáveis escolhendo os conjuntos de blocos, conjuntos de -- conjuntos ou, em geral, conjuntos de elementos quaisquer, de mo

do que os elementos possam ser distinguidos uns dos outros, pela percepção da criança. Assim, os jogos jogados com uma concretização depois, a seguir com outra concretização, serão identificados do ponto de vista de estruturas. É neste momento que a criança se dá conta do que é "semelhante" (pareil) nos diversos jogos que praticou, isto é, que ela terá realizado uma "abstração".

#### Quarta Etapa

De certo modo, a criança não é capaz de se utilizar desta abstração porque ela ainda não está fixada em seu espírito. Antes de tomar plenamente consciência de uma abstração, a criança tem necessidade de um processo de representação. Uma tal representação lhe permitirá falar do que ela abstraiu, de olhar ao redor, de sair do jogo, ou do conjunto de jogos, de examinar os jogos e de refletir sobre o seu objetivo, assunto. Uma tal representação pode ser um conjunto de gráficos, pode ser um sistema cartesiano, pode ser um diagrama de Venn, ou qualquer outra representação visual, ou mesmo auditiva no caso de crianças que não pensam essencialmente de uma maneira visual.

#### Quinta Etapa

Após a introdução de uma representação, ou mesmo de muitas representações da mesma estrutura, será possível examinar esta representação. A finalidade deste exame é dar-se conta das propriedades da abstração realizada. Numa representação, pode-se facilmente, dar-se conta das principais propriedades do ser matemático que se criou. Isto significa que nesta etapa precisamos de uma descrição do que representamos. Para uma descrição, é preciso, evidentemente, uma linguagem, é por isso que a realização de propriedades de abstração nesta quinta etapa deve ser acompanhada pela invenção de uma linguagem e, a descrição da representação, a partir dessa linguagem inventada. Será melhor, se possível, que a criança invente sua própria linguagem e que mais tarde as crianças com a ajuda do professor, discutam entre elas se uma das linguagens introduzidas é mais vantajosa do que as outras. Uma tal descrição formará a base de um sistema de axiomas. Cada parte da descrição poderá servir de axioma ou mesmo, mais tarde, de teorema.

#### Sexta Etapa

A maior parte das estruturas matemáticas são tão complexas que elas possuem um número infinito de propriedades. É impossível citar todas essas propriedades numa descrição do sistema que se engendrou. É preciso, então, de certo modo, fechar a descrição num domínio finito, em um número finito de palavras. Isto quer dizer que precisamos de um método para chegar a certas

partes da descrição, sendo dada uma primeira parte que tomamos como ponto de partida. Esses métodos para chegar a outras partes da descrição serão nossas regras do jogo de demonstração.- As descrições posteriores às quais nós chegaremos serão chamadas de "teoremas do sistema". Assim, inventamos um sistema formal no qual há axiomas, isto é, a primeira parte da descrição e, as regras do jogo. Poderá haver outras que serão as regras lógico-matemáticas da demonstração. A seguir haverá teoremas do sistema que são as partes da descrição às quais se -- chega a partir da descrição inicial, utilizando as regras do - jogo.

