Tradução - prof[a]. Ida Godinho   Dienes

Operadores multiplicativos

1.0 Introdução.

Os operadores multiplicativos compreendem a multiplicação e a divisão. Neste capítulo, nós nos ocupamos somente da multiplicação e da divisão de números naturais. O conjunto dos estados que nós consideramos é o dos números naturais. Nós já definimos aliás um certo conjunto de operações que chamamos as adições e as subtrações. Aqui, nós vamos operar por meio de um outro conjunto de operadores, e vamos também pesquisar as relações deste conjunto de operadores com o conjunto dos operadores aditivos já estudados.

Vamos considerar a multiplicação como uma operação de "substituição". Um estado será sempre representado pela presença de um conjunto que pertence a uma família. Esta família será o número natural que"conta" o número de objetos pertencentes a nosso conjunto. Do ponto de vista psicológico e pedagógico, um tal procedimento de concretização é necessário, porquanto a criança numa certa etapa de seu desenvolvimento não é facilmente capaz de operar com abstrações. Por esta razão as abstrações devem ser concretizadas para que a criança possa efetuar operações concretas. Desta maneira, ela poderá em seguida "fazer abstração das propriedades particulares das situações concretas introduzidas, e assim elevar-se a um nível mais elevado da abstração. Em resumo, nós vamos utilizar conjuntos que serão as <u>entradas</u> e as <u>saídas</u> de nossas"máquinas" de um lado, e vamos nos ocupar das "familias" às quais nossos conjuntos pertencem por outro lado. Assim permitiremos que números naturais sejam entradas e saídas das máquinas abstratas. Entretanto, a criança deve estar em condições de poder recorrer a uma situação concreta, se ela tiver necessidade, ou então de passar ao nível mais abstrato e mais simbólico, se ela já é capaz de uma operação abstrata sem a intervenção de uma concretização. Nós dizemos que um operador multiplicativo será um operador de "substituição".A operação de conjunto que corresponder à operação de multiplicação, será a substituição de cada elemento de um conjunto por um conjunto de elementos. Cada elemento de um conjunto na entrada de uma máquina será substituido por um determinado conjunto. Estes conjuntos que sairão da máquina serão <u>equivalentes</u>, isto é, conterão o mesmo número de elementos. Cada elemento do conjunto, na entrada, será substituído por um conjunto com um certo número determinado de elementos, e todos estes conjuntos serão reunidos para formar o conjunto saída. Por exemplo, a entrada poderia ser um conjunto de três crianças. A máquina poderia ser "cada criança recebe quatro bombons". Evidentemente, cada criança não recebe o mesmo conjunto de quatro bombons, mas cada conjunto de bombons pertence à mesma "família", isto é, à <u>familia quatro</u>. O conjunto que sai desta máquina será obtido pela <u>reunião</u> dos três conjuntos de quatro bombons. A "familia" à qual este conjunto-reunião pertence será a saída da máquina no que respeita ao número natural, ao passo que será o próprio conjunto que será a saída no que respeita ao conjunto.

operador multiplicativo → operador de substituição

Para os operadores de divisão, nós nos colocaremos igualmente no ponto de vista da substituição. Neste caso, sendo dado o conjunto na entrada, substituir-se-ão conjuntos que estão compreendidos no conjunto à entrada por objetos. O conjunto destes objetos que substituem os sub-conjuntos separados cuja reunião é o conjunto da entrada nos dára o conjunto na saída. Por exemplo, um conjunto de maçãs pode ser o conjunto na entrada. Decidir-se-á pôr três maçãs em cada prato. Então a máquina fará a operação seguinte:

Pôr um conjunto de três maçãs sobre um prato.

A entrada será o conjunto de maçãs, a saída será um certo conjunto de pratos. Do ponto de vista aritmético, ter-se-á feito uma divisão por três. É preciso prestar atenção para não introduzir entradas nesta máquina que não se pode dividir em sub-conjuntos separados dos de três. A máquina não funcionará para tais entradas.

Na segunda parte das fichas, a criança descobre a relação entre a adição e a multiplicação. É preciso evitar de dizer à criança que a multiplicação não é senão uma adição repetida. Uma adição repetida é uma máquina equivalente a uma multiplicação, mas uma equivalência não é uma identidade. Duas máquinas podem fazer o mesmo trabalho sem que elas sejam idênticas. Se tomamos máquinas para acrescentar à duas entradas, viu-se já que se podem fazer restrições e obter outras máquinas. Por exemplo, uma máquina para acrescentar onde uma das entradas é determinada, torna-se equivalente a uma máquina de uma entrada, onde é preciso acrescentar o número que se escolheu para uma ou outra das entradas. Há evidentemente outros meios de fazer restrições. No lugar de determinar o valor de uma ou de outra das entradas, poder-se-ia exigir que a entrada A e a entrada B sejam iguais, se falarmos dos números, ou sejam conjuntos equivalentes, se falarmos dos conjuntos. Ver-se-á que uma tal máquina restrita é equivalente a uma máquina que produz dois objetos à saída por um objeto da entrada. Uma tal máquina é um multiplicador por dois. Em resumo, uma máquina para acrescentar a duas entradas restritas para aceitar somente conjuntos equivalentes nas duas entradas, é uma máquina equivalente a uma máquina para multiplicar por dois.

Ver-se-á que se podem introduzir outras restrições. Por exemplo, poder-se-ia decidir que a entrada B deve ser um a mais que a entrada A. Teremos então uma máquina que multiplica por dois, depois acrescenta um. Poder-se-ia decidir que, para cada objeto no conjunto à entrada A, é preciso por dois objetos no conjunto à entrada B. Põem-se dois destes conjuntos na máquina de reunir, e à saida obtem-se a reunião. Ver-se-á que uma tal máquina com certa restição, será equivalente a uma máquina de multiplicar por três, porque ver-se-á que para cada objeto introduzido na entrada A, haverá três objetos na saída. Haverá o próprio objeto, e ter-se-á acrescentado os dois objetos da entrada B que devem lhe corresponder, em virtude da restrição que se fez.

É claro que uma tal restrição complexa não deve ser introduzida demasiado cedo. É todavia necessário explicar que as restrições impostas nas fichas não são as únicas possíveis. Ver-se-á que se pode construir uma máquina que é equivalente a uma máquina de multiplicar a partir de uma máquina de acrescentar de diversas entradas, submetendo esta última máquina a restrições convenientes.

Na terceira parte, introduzimos a multiplicação como operação binária. A máquina de multiplicar possuirá duas entradas livres.

Chamemos as entradas A e B; a máquina fará a operação seguinte:

É preciso pôr na saída tantos conjuntos equivalentes ao

3
c

conjunto da entrada A quantos elementos há no conjunto da entrada B. Poder-seá restringir as entradas livres. Poder-se-ia, por exemplo, escolher um valor para equivalentes. Vê-se que se obtem uma máquina que constroi o quadrado de um número. Diversos exercícios com material concreto variado são introduzidos, cujo objetivo é permitir à criança fixar em seu espírito as propriedades desta operação especial de multiplicação. Alguns exercícios conduzem a criança à compreensão do teorema do binômio.

É preciso observar que há casos em que a forma da saída não depende da base utilizada. Evidentemente se tomarmos um bastãozinho (varinha) e dois cubos pequenos numa base, e se tomarmos um bastãozinho e dois cubos pequenos em uma outra base, não teremos o mesmo número de cubinhos nestes conjuntos, se considerarmos o bastãozinho como um conjunto de cubinhos colados um ao outro. Em consequência, é um pouco surpreendente que se encontre apesar de tudo o mesmo resultado na saída no que concerne a forma ou então a quantidade do que sai da máquina. Por exemplo, se pusermos um bastãozinho e dois cubinhos nas duas entradas de uma máquina de multiplicar, teremos sempre uma placa, quatro bastõezinhos e quatro cubinhos na saída, se a base é cinco, seis, sete, oito, nove, dez ou qualquer outra base seguinte. Quando se encontram resultados gerais que não dependem do valor das variáveis que entervêm no problema, chega-se a resultados algébricos. Os outros resultados, que dependem do valor das variáveis introduzidas nos problemas, são somente resultados aritméticos. Assim, a criança pode começar a descobrir resultados generalisáveis e dar os primeiros passos para a descoberta da álgebra.

Na oitava parte desta série de fichas, introduzimos a criança no problema da comutatividade mas somente no caso dos estados e dos operadores. ?

Ensina-se-lhe que o valor da entrada e o valor da máquina podem ser invertidos sem mudar o valor da saída. Cada vez que isto acontece, diz-se que a operação em questão é comutativa. Na 6ª parte, há alguns exercícios sobre a comutatividade dos próprios operadores. Estes problemas são abordados de uma maneira mais precisa no volume Frações. No fim desta série, abordam-se, no entanto, alguns dos problemas que poderão introduzir (iniciar) a criança na noção dos operadores fracionários.

1. A natureza da multiplicação.

Fichas 1.1 a 1.15

Na primeira ficha, introduzem-se as noções da multiplicação. Tomam-se três para um, sugerindo situações concretas tais como três maçãs para um prato, tres sementes para uma maçã, três ovos para um pássaro. Pede-se à criança que continue a série:

(1) se houver uma maçã, o operador nos dá três sementes,

(2) se houver duas maçãs, nós teremos seis sementes,

(3) para três maçãs, teremos, evidentemente, nove semeentes, e assim por diante

Ficha 1.2

Aquí, nós introduzimos a base quatro para uma máquina dois para um. Isto quer dizer que teremos sempre dois na saída, cada vez que se introduz um na entrada. Não é absolutamente evidente para a criança que se consigam dois bastõezinhos na saída, toda vez que se introduza um bastãozinho na entrada. É preciso que ela faça, por construção, a correspondência entre os quatro cubinhos contidos no bastãozinho e os quatro conjuntos de dois cubinhos contidos nos dois bastõezinhos que ela obtiver. Uma vez que ela tiver obtido os quatro conjuntos de dois cubinhos, ela verá que pode trocá-los por dois bastõezinhos, e que cada vez que ela põe um bastão zinho na entrada, ela obtem dois bastõezinhos na saída.

As máquinas "quatro por um" e "cinco para um" que são sugeridas, podem ser utilizadas em qualquer base. Não é necessário que se restrinja à base quatro.

<u>Ficha 1.3</u>

Utilisam-se aqui as <u>reguazinhas</u> Cuisenaire - (ou <u>os Fatores em cores</u>). Toma-se uma reguazinha encarnada na saída, toda vez que se tem uma reguazinha branca na entrada. Para fazer o cálculo do que teremos na saída para uma reguazinha encarnada na entrada, é preciso desfazer a reguazinha encarnada, substituindo-a por duas brancas. Utiliza-se a equivalência "ocupar o mesmo espaço", quando se substitue a reguazinha encarnada por um conjunto de duas reguazinhas brancas. Em seguida, aplica-se o operador e ver-se-á que na saída se obtem duas reguazinhas encarnadas. Se começarmos na entrada com uma reguazinha verde, nós a substituimos por três reguazinhas brancas. Cada uma destas reguazinhas brancas na entrada nos dará uma reguazinha encarnada na saída. As três reguazinhas encarnadas podem ser substituidas por duas reguazinhas verdes, se aplicarmos a equivalência : "ocupar o mesmo espaço". Pode-se continuar assim indefinidadmente.

<u>Ficha 1.4</u>

Aqui, pode-se utilizar os cubinhos do material multibase, as reguazinhas Cuisenaire, ou os Fatores em cores, ou simplesmente papel quadriculado. Toma-se o operador dois para um e se põem as entradas sob a forma de uma escada para mostrar que se aumenta a entrada de um cubinho, de uma reguazinha branca de cada vez. Ver-se-á que a saída é também uma escada em que as saídas aumentam de dois cubinhos, ou então de uma reguazinha encarnada , de cada vez.

Pode-se, efetivamente, aumentar as entradas de duas ou de três cada vez. Por exemplo, poderíamos tomar as entradas 3,5,7,9 e assim sucessivamente. Teremos as saídas 6,10, 14, 18. Veremos que a escada que corresponde às entradas, terá degraus de um comprimento de duas brancas, ao passo que a escada que corresponde às saídas, terá degraus do comprimento de quatro brancas. O comprimento dos degraus na saída será sempre o dobro do comprimento dos degraus na entrada.

Se fizermos o mesmo com o operador <u>três para um</u>, veremos que a relação entre o comprimento dos degraus <u>será três para um</u>. Para cada unidade de comprimento de um degrau na entrada, teremos três unidades de comprimento para o degrau correspondente na saída.

<u>Ficha 1.5</u>

Aqui, as informações saõ dadas em termo das reguazinhas Cuisenaire. Ver-se-á que, do ponto de vista matemático, a senha é idêntica à da ficha 1.4

<u>Ficha 1.6</u>

Nesta ficha, desenvolve-se a idéia de um gráfico.

As entradas são marcadas numa coluna e as saídas numa fileira. Para marcar um ponto correspondente à entrada e à saída de um valor particular da entrada, toma-se por exemplo a entrada um para a qual, numa máquina "três para um", obtem-se uma saída três. Traça-se uma linha horizontal da entrada um e traça-se uma linha vertical da saída tres. Marca-se o ponto de intersecção destas duas linhas. Pode-se igualmente tomar uma entrada dois e a saída correspondente 6 ou 11 na base cinco que é utilizada nesta ficha. Traça-se uma linha horizontal a partir da entrada dois e uma linha vertical a partir da saída 11. Na intersecção destas duas linhas, marca-se um ponto. Após ter achado todo um conjunto destes pontos ver-se-á que todos eles estão sobre a mesma linha reta. Esta linha reta é uma representação gráfica do operador <u>tres para um</u>. Pode-se experimentar (procurar) achar a representação gráfica da máquina <u>dois para um</u>, assim como a da máquina <u>quatro para um</u>. Ver-se-á que a linha traçada para <u>três para um</u> estará situada entre as linhas que são traçadas para <u>dois para um</u> e <u>quatro para um</u> respectivamente.

<u>Ficha 1.7</u>

Nesta ficha, introduzem-se situações quotidianas. É hábito colocar quatro cadeiras ao redor de uma mesa. A operação de pôr quatro cadeiras ao redor de uma mesa é nosso operador multiplicativo. O conjunto de mesas é o conjunto da entrada, e o conjunto de todas as cadeiras será o conjunto de saída. Para permitir que a criança faça abstração das mesas e das cadeiras, sugere-se um exercício de estrutura idêntico, tomando quatro fichas para uma criança. As cadeiras são substituidas pelas fichas (ou moedas) e as mesas pelas crianças.

Para responder a pergunta <u>2</u>, o operador é cinco cadeiras para cada mesa; a entrada é um conjunto de duas mesas e a saída é um conjunto de dez cadeiras.

Na questão (ou pergunta) 3, introduze-se ainda uma situação de vida. Se cada criança tiver necessidade de quatro potes de pintura, o operador em questão é <u>quatro potes para uma criança</u>. O conuunto na entrada é um conjunto de seis crianças e o conjunto, na saída, será o conunto de todos os potes de que tivermos necessidade. Nós teremos necessidade de 24 potes. Se houver cinco crianças, pode-se utilizar a mesma máquina, mas a entrada será um conjunto de cinco crianças. A saída será um conjunto de vinte potes de pintura. Se a entrada é um conjunto de quatro crianças, a sáida é um conjunto de 15 potes de pintura, etc.

<u>Ficha 1.8</u>

Toma-se a base três e estuda-se uma máquina <u>dois para um</u>. A ficha dá as entradas sucessivamente 1,2,10,11 etc. ... e a criança deve achar as saídas. As crianças acharão em seguida que as saídas aumentam de dois cubos, ao passo que as entradas aumentam de um pequeno cubo. No fim da ficha, dá-se uma saída e pergunta-se o que poderia bem ser a entrada. A entrada é evidentemente um cubo grande e dois cubinhos.

<u>Ficha 1.9</u>

Estuda-se o mesmo operador. Exprimem-se os números em base cinco, utilizando os blocos multibases para os conjuntos correspondentes. Pedem-se as saídas.

<u>Ficha 1.10</u>

Introduze-se aquí um multiplicador mais complexo. Para cada cubinho na entrada, deve-se tomar dois bastõezinhos e um cubinho na saída. Após haver efetuado os agrupamentos necessários, ter-se-á um cubo grande, zero placa, dois bastõezinhos e dois cubinhos.

No segundo problema, a máquina dada nos diz substituir cada cubinho por um bastãozinho e um cubinho. Em termos simbólicos <u>11 para um</u>. São dadas as entradas e são pedidas as saídas correspondentes.

<u>Ficha 1.11</u>

Aqui a base cinco é utilizada com uma máquina 12 para um. As substituições são efetuadas na figura e o aluno só faz as mudanças necessárias. Ver-se-á facilmente que haverá uma placa, cinco bastõezinhos e seis cubinhos. Evidentemente, poderemos trocar os cinco bastõezinhos por uma outra placa e cinco dos seis cubinhos por um outro bastãozinho. Isto quer dizer que, na saída, teremos duas placas ,um bastãozinho e um cubinho, isto é, 211 cubinhos.

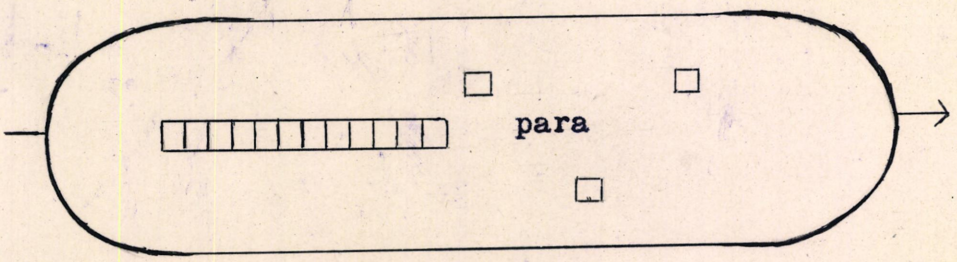
No 2º problema, utiliza-se uma entrada bastante complexa: uma placa, dois bastõeszinhos e um cubinho. Vê-se que um bastãozinho e dois cubinhos substituem cada cubinho. As cinco primeiras fileiras do arranjo da saída resultam da placa na entrada. As duas últimas fileiras do arranjo (da disposição ou combinação) resultam dos dois bastõeszinhos da entrada; o bastãozinho e os dois cubinhos que estão à parte, na extremidade da página, resultam do cubinho que está sosinho na entrada. É preciso, em seguida, fazer as trocas (mudanças) necessárias para transformar a saída em forma estandardisada. Ver-se-á que a placa na entrada, será, com efeito, substituida por um cubo grande e duas placas na saída; os dois bastõezinhos na entrada serão substituidos por duas placas e quatro bastõezinhos na saída; finalmente, o cubinho na entrada é transformado em um bastãozinho e dois cubinhos. Pode - se agora fazer ainda trocas. Os cinco bastõezinhos que foram obtidos podem ser substituidos por uma placa, o que nos dá cinco placas ao todo. Nós temos ainda dois cubinhos. Isto que dizer que teremos dois cubos grandes e dois cubinhos. Em algarismos: 2002, isto é, o valor numérico da saída em base cinco: o número de cubinhos na sáida, se fossem trocadas todas as peças por cubinhos.

<u>Ficha 1.12</u>

Aquí a base doze é experimentada e, em consequência, a entrada se escreve: 17.

Substituindo cada cubinho na entrada por dois cubinhos na saída, teríamos, finalmente, dois conjuntos de primeira espécie e quatorze cubinhos a mais. Doze destes quatroze pederiam ser trocados por uma única peça de primeira espécie; assim, teríamos, na saída, três peças de primeira espécie e dois cubinhos a mais, isto é, que na saída se escreveriam: 32.

Não há uma solução única para o problema <u>2</u> desta ficha, mas sendo dado o arranjo na figura, é conveniente concluir que a entrada teria podido ser, por exemplo, o conjunto de primeira espécie com zero cubinho, isto é, 10. A máquina teria podido ser 12 para um, isto é:



Ficha 1.13

Há um exemplo em que o problema não admite solução única mas o arranjo da figura sugere que havia na entrada uma placa dois bastõezinhos e três cubinhos, e que a máquina era "tome dois bastõezinhos e um cubinho para um cubinho", isto é, em termo numérico:

21 para um

Após ter efetuado todas as trocas, ter-se-ia um cubo grande, três placas, zero bastãozinho e três cubinhos. Em termo numérico 3303 cubinhos.

O segundo problema, ele também, não admite uma conclusão única, mas o arranjo sujere que a entrada era um conjunto de dois bastõezinhos e dois cubinhos, e que a máquina era a mesma que a utilizada na 1a parte da ficha, isto é

21 para um

Após as trocas necessárias, teremos para a saída um cubo grande, uma placa, dois bastõezinhos e dois cubinhos, seja: 1122.

Ficha 1.14

Nesta ficha, apresenta-se uma máquina cuja saída (é já desenhada) desenhou-se já na figura, e o aluno nada mais tem a fazer senão achar a forma final da saída, após haver efetuado as trocas necessárias.

A máquina substitue cada cubinho da entrada por um bastãozinho e um cubinho na saída. Por conseguinte, é uma máquina

11 para 1

Vê-se claramente que a forma transformada da saída será o conjunto que contém uma placa, três bastõezinhos e dois cubinhos. Aqui, achou-se uma relação algébrica. Esta relação é algébrica, porquanto 12 multiplicado por 11 será sempre 132 numa base qualquer. O leitor é convidado a efetuar a multiplicação na base quatro, na base seis, na base sete e mesmo na base dez. Na base 10, sabe-se que 12 multiplicado por 11 é igual a 132. A forma do resultado não depende da base de que nos servimos. Por esta razão, o resultado é geral e por conseguinte pertence ao domínio da álgebra. Os resultados gerais, que se encontram entre as propriedades dos números que são independentes do valor de ao menos uma variável intervindo no problema, são resultados algébricos.

A saída no problema 2, após as trocas necessárias, não conduz a um resultado algébrico. Veremos que acabamos por ter simplesmente dois cubos grandes e dois cubinhos. Não haverá uma placa, nem um bastãozinho. Se efetuássemos a multiplicação de 12 por 121, numa outra base, não teríamos 2002, após haver efetuado as trocas necessárias. Por esta razão, este exemplo é antes de natureza particular, e por conseguinte é antes um exemplo aritmético que um exemplo algébrico.

Ficha 1.5

Aquí, introduzimos a multiplicação que substitue cada cubinho por um bastãozinho. A entrada é um conjunto de um bastãozinho e de três cubinhos; ver-se-á que a saída pode ser representada por uma placa e três bastõezinhos. Se repetirmos este problema em outras bases, obteremos um resultado da mesma forma. É preciso salientar que é somente forma que é idêntica. Evidentemente, se tomarmos um bastãozinho e três cubinhos, na base cinco, não teremos a mesma entrada numérica que teríamos, se tomássemos um bastãozinho e três cubinhos na base quatro. Mas cada vez que tomamos um bastãozinho e três cubinhos numa base qualquer e que aplicamos o operador

um bastãozinho substitue cada cubinho

teremos, na saída, uma placa e três bastõezinhos, independentemente da base escolhida. Por esta razão, o exercício é de natureza algébrica.

Na 2ª parte da ficha, pede-se à criança, tendo sido dada a saída, achar a entrada. O operador é o mesmo que o da primeira parte da ficha. Evidentemtne a entrada achada será um conjunto de dois bastõezinhos e de três cubinhos. Nesta ficha, proporciona-se à criança a ocasião de atingir às intuições subjacentes à multiplicação pela base.

Quando um bastãozinho substitue cada cubinho, a criança deve se dar conta de que é preciso tomar uma placa para substituir cada bastãozinho, um cubo grande para substituir cada placa, e assim por diante. No começo, é preciso, mesmo assim que a criança faça as substituições minunciosamente, substituindo cada cubinho por um bastãozinho. É a razão pela qual a saída é desenhada desta maneira. A criança está em condições de ver que cada cubinho, mesmo que ele esteja compreendido num bastãozinho é substituido por um bastãozinho. Tratase de uma aprendizagem que permite controlar que os quatro bastõezinhos, obtidos na saída, podem ser substituidos por uma placa. Após um certo número de exercícios semelhantes, a criança se dará conta (compreenderá) da relação constante entre a saída e a entrada, que é sempre a relação 10 sobre 1.

2) MULTIPLICAÇÕES E ADIÇÕES REPETIDAS.

Fichas 2.1 à 2.11

Ficha 2.1

Os alunos que abordam os problemas desta série deverão ter feito os problemas correspondentes na série: "Operadores aditivos". Eles terão se familiarizado com operadores aditivos de duas entradas. Aqui, quer-se mostrar que um operador aditivo de duas entradas, sujeito à restrição de que em cada entrada é preciso sempre pôr conjuntos equivalentes, é equivalente a um operador

dois para um

Não é preciso confundir aqui os dois sentidos da palavra equivalência. Quando dois conjuntos são equivalentes, isto quer dizer que pensamos na relação de equivalência "ter tantos elementos como". Quando dizemos que duas máquinas são equivalentes, pensamos na equivalência: "faz o mesmo trabalho como". No primeiro caso, nosso conjunto universal é o dos conjuntos; no outro caso é o das máquians ou dos operadores. Repetimos:

Dois conjuntos equivalentes têm o mesmo número de elementos,
duas máquinas equivalentes fazem o mesmo trabalho.

O trabalho feito pelo aluno sobre as relações de equivalência na série de fichas intitulada "Relações" lhe terá ensinado que se um objeto matemático é equivalente a um outro, é da relação de equivalência, como também do conjunto universal escolhido que depende a equivalência de dois objetos matemáticos.

Na 2^a parte da ficha, utilizamos duas máquinas. A máquina R é uma máquina composta de três entradas. Em todas as entradas é preciso pôr elementos equivalentes. É o que se entende por "a mesma cousa". Se as máquinas são abstratas, as entradas serão números. Neste caso, as máquinas adicionam os números que introduzimos nas entradas.

*Se as máquinas reunem conjuntos, as entradas serão conjuntos, Os conjuntos nas entradas devem ser equivalentes entre si. No caso em que pensamos nas máquinas abstratas, é preciso dizer que os números nas entradas devem ser iguais. A máquina R tem três entradas. Ver-se-á que a máquina T é equivalente à máquina R. Estas duas máquinas fazem o mesmo trabalho. *

Observa-se que não foram postas mais de duas entradas ao mesmo tempo para cada máquina de somar. Quando se pensa precisamente nisto, não se pode senão acrescentar dois números ao mesmo tempo; não se pode reunir senão dois conjuntos ao mesmo tempo. Após haver acrescentado dois números, pode-se acrescentar um terceiro; após haver feito a reunião de dois conjuntos, pode-se reunir esta reunião a um terceiro conjunto. É por esta razão que se desenham máquinas, pondo somente duas entradas para cada reunião, ou para cada adição.

Ficha 2.2

A máquina X tem duas entradas, a máquina Y tem três, e a máquina Z tem quatro. Impõe-se uma restrição a todas estas máquinas. É preciso sempre pôr conjuntos equivalentes nas entradas de cada máquina. Pede-se que a criança faça um quadro para cada máquina. No problema 2, pede-se-lhe que faça a comparação entre estas máquinas de reunião e as máquinas correspondentes que exprimem operadores multiplicativos. Evidentemente a máquina X é equivalente à máquina

—(2 apara 1)→

A máquina Y é equivalente à máquina

—(3 para 1)→

e a máquina Z é equivalente à máquina

—(4 para 1)→

OBS.: a folha 10 está no final do trab.

11

C

Em seguida, dão-se as saídas que se obtem das máquinas de adicionar, e pede-se à criança que escreva as saídas correspondentes tais como elas são obtidas nas saídas das máquinas de multiplicar correspondentes. As máquinas que fazem o mesmo trabalho são máquinas equivalentes. Esta ficha sublinha esta noção de uma maneira explicita.

Ficha 2.6

Utilizam-se as reguazinhas do material algébrico. A ficha apresenta uma figura em que a entrada está à direita e a saída, à esquerda. Não é importante conservar, para a entrada, sempre o mesmo lado. Com efeito, há um convenção bastante difundida segundo a qual, numa multiplicação, o primeiro fator é o multiplicador e o segundo, o multiplicando. Poderia parecer, pois, mais natural pôr a entrada à direita e a máquina à esquerda. Os símbolos 4 x , 5 x , etc ... podem ser rodeados por círculos (ou circundados) para evidenciar o fato de que são operadores.

Se não se soubesse que uma máquina

3 para 1

é equivalente a uma máquina de adicionar com três entradas, sujeita à condição de introduzir sempre conjuntos equivalentes em cada entrada, não se poderia resolver o problema apresentado no começo desta ficha, visto que a entrada é dada de uma maneira geral. A régua pequena representa um conjunto arbitrário. A cada elemento do conjunto representado por uma tal reguazinha corresponderá, na saída, um conjunto de três objetos. Acontecendo que não se saiba quantos objetos há no conjunto de entrada, não somos capazes de achar o conjunto de saída. Mas, se nos servirmos do simbolismo concreto de uma reguazinha para representar um conjunto qualquer, nós sabemos que a saída será um conjunto que contém três conjuntos separados, cada um equivalente ao conjunto da entrada. Poder-se-ia, então, simbolizar o conjunto na saída por três reguazinhas simbólicas. Da mesma maneira, se pusermos dois conjuntos na entrada, isto é, a reunião de dois conjuntos quaisquer, mas equivalentes entre si, teremos a reunião de seis conjuntos na saída, cada um destes conjuntos sendo equivalente a um e a outro dos conjuntos cuja reunião fornecia nossa entrada. A criança aprende que 4 vezes uma entrada qualquer lhe dará o mesmo número de elementos que a adição repetida desta entrada, numa adição de quatro termos. Se quisermos nos servir de uma notação algébrica, a criança aprende aí que $4x\ A = A+A+A+A$, onde A representa o número de elementos em nosso conjunto qualquer. Os quadrados vazios da ficha representam, igualmente, o número de elementos do conjunto qualquer que nós não precisamos (fixamos)

Ficha 2.7

As intuições de que acabamos de falar são precisas (exatas). Para anotar a operação de multiplicação por um número dado, um simbolismo é desenvolvido. Toma-se aí o primeiro fator para aquele que desempenhará o papel de multiplicador. O segundo fator desempenhará o papel da entrada, isto é, o do multiplicando.

As questões 2 e 3 apresentam problemas que são fáceis de resolver e dão à criança ocasião de praticar o que ela aprendeu. Evidentemente, ela terá necessidade de mais prática que não é possível dar lhe nas fichas. Na quarta questão, escolhe-se a base quatro, e por conseguinte a máquina

4 para 1

C

torna-se

10 para 1

Pede-se à criança que ache as saídas de certas multiplicações por 10. As respostas serão 20, 30, 100, 110, 120, 130, e assim sucessivamente.

Trata-se aqui de reforçar o que a criança já aprendeu a respeito da multiplicação pela base. A máquina de multiplicar

10 para 1

é uma máquina que substitue cada cubinho por um bastãozinho, do ponto de vista de conjunto.

Ficha 2.8

Retoma-se a introdução de uma entrada qualquer. A entrada qualquer é representada por uma reguazinha, um bastãozinho, uma barra que é um símbolo concreto para o conjunto qualquer. As divisões vasias, de que nos servimos mais tarde, representam os números de elementos nestes conjuntos quaisquer. Numa mesma equação, é preciso sempre substituir cada compartimento, ou quadrado vazio, pelo mesmo número. Por exemplo, quatro vezes uma entrada qualquer é igual a esta entrada, mais esta entrada, mais esta entrada, mais esta entrada. A máquina é desenhada do ponto de vista de conjuntos, ao passo que a equação

4 x entrada = entrada + entrada + entrada + entrada

é escrita do ponto de vista numérico. Ver-se-á que esta equação é verdadeira independentemente do valor da entrada. Por esta razão, é uma equação algébrica e não aritmética. As equações que eram as soluções dos problemas 2 e 3 da ficha precedente, eram equações artméticas.

Ficha 2.9

Ela explora a compreensão que a criança tiver já atingido, isto é, a da equivalência da máquina à esquerda com a máquina à direita, desenhadas na ficha. A entrada sugerida é o conjunto constituido por uma placa, dois bastõezinhos e um cubinho. Se pusermos um conjunto igual na entrada A, assim como na entrada B, assim como na entrada C, teremos a saída indicada de três placas, seis bastõeszinhos e três cubinhos. Após haver efetuado as trocas, teremos um cubo grande, duas placas e um bastãozinho. Isto quer dizer que 121 cubinhos na entrada serão transformados em 1210 cubinhos na saída. Obteremos o mesmo resultado se introduzirmos a entrada 121 na máquina

3 para 1

Se a criança experimenta introduzir diversas entradas nas duas máquinas, prestando atenção para introduzir o mesmo número de cubinhos em cada entrada da máquina de esquerda que ela introduzir na entrada da máquina de direita, ela achará que as saídas lhe darão sempre o mesmo número de cubinhos. Uma tal experiência a convencerá ainda mais que as duas máquinas são, com efeito, eqüivalentes.

Ficha 2.10

As máquinas desta ficha são também equivalentes. Há, para fazer, uma reunião de dois conjuntos equivalentes; Utiliza-se um conjunto equivalente para introduzir na entrada duma máquina que substitue cada cubinho por dois cubinhos. A criança só tem que fazer as tro -

cas e achar o mesmo resultado para cada uma destas duas máquinas. Outros exercícios semelhantes são apresentados nos problemas 2 e 3.

<u>Ficha 2.LL</u>

Volta-se ou retorna-se à equivalência de uma máquina para reunir composta de três entradas, sujeitas à restrição de que as entradas devem receber conjuntos equivalentes, e a máquina

3 para um

Utiliza-se a base quatro. A criança deve achar a saída em cada caso e descobrir que ela obtém o mesmo número de cubinhos. Dão se-lhe as máquinas desenhadas de uma maneira mais esquemática na parte inferior da ficha e sugere-se que ela faça um quadro para achar as saídas de A e de B, mas esta vez na base cinco. Ela deveria ver que a base utilizada não tem influência sobre a equivalência das duas máquinas.

3. <u>A multiplicação como operação binária</u>

<u>Fichas 3.1 a 3.11</u>

Nas fichas anteriores, uma máquina de multiplicar nos dizia sempre precisamente quantos objetos eram precisos tomar para substituir cada um dos objetos que faziam parte do conjunto na entrada. Por esta razão, as máquinas estudadas até agora não tinham senão uma única entrada, visto que, sendo dada a entrada, era possível achar o número de elementos na saída. Nesta terceira parte, estudam-se operadores multiplicativos <u>de duas entradas</u> de uma maneira paralela ao que se fez ao estudar os operadores aditivos. No início do estudo dos operadores aditivos, era exatamente determinado de quanto se aumenta a entrada; mais tarde, introduziram-se máquinas de reunir. Estas máquinas de reunir nos conduziram à consideração dos casos especiais destas máquinas. Nestes casos especiais, nós concluimos que uma máquina de reunir pode ser equivalente a uma máquina de multiplicar. Nós vamos ver mais tarde que máquinas de multiplicar de duas entradas podem ser submetidas a restrições que as tornarão equivalentes às máquinas que fazem o quadrado de um número. Será o caso em que nos será imposta a restrição de que as duas entradas devem receber conjuntos equivalentes, ou então iguais.

Ficha 2.3

Ela repete a mesma senha, mas com "trens" construidos por meio de reguazinha, ou de Fatores coloridos.

Ficha 2.4

Apresenta-se um conjunto de máquinas, e a criança deve decidir se há máquinas que pertencem à mesma família. É preciso supor que as restrições de equivalência dos conjuntos de entradas são observadas. Há máquinas de reunião das quais um é equivalente a uma máquina

2 para 1

uma outra a uma máquina

3 para 1

e uma outra a uma máquina

4 para 1

Escreveu-se reunião nas máquinas para que a criança possa considerar estas operações como operações de conjuntos. Por esta razão, desenharam-se os cubinhos nas máquinas que representam os operadores multiplicativos para que eles se possam pôr no mesmo nível de conjuntos (ensembliste)para todas as máquinas.

Ficha 2.5

Introduze-se a noção da equivalência das máquians de uma maneira mais explicita, visto que é sugerido que a máquina de esquerda faz o mesmo trabalho que a máquina de direita. Para simbolizar o que é uma máquina composta de máquinas simples de reunião do ponto de vista numérico, utilisa-se o simbolismo da adição. Para simbolizar numéricamente o que faz uma máquina de multiplicar, utiliza-se o simbolismo da multiplicação. Sabe-se por exemplo, que, se introduzimos um conjunto de quatro objetos em cada uma das entradas da máquina de reunir de três entradas, assim como na entrada da máquina

3 para 1

ter-se-á, nos dois casos, um conjunto de doze na saída. No primeiro caso, escrever-se-á 4+4+4, ao passo que, no segundo caso, escrever-se-á 3 x 4.

Acontecendo que estas duas saídas nos dão nos dois casos o mesmo número , pode-se apresentar a igualdade.

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

Sugere-se aquí que o operador seja escrito na frente. Quando se escreve 3 x 4, é o quatro que representa a entrada, três vezes que represen tam a máquina que transforma cada objeto na entrada em três objetos na saída. Em fim de ficha, pede-se à criança substituir as saídas das máquinas de multiplicar pelas saídas correspondentes que serão obtidas,se introduzirmos as mesmas entradas nas máquinas correspondentes de somar.