INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Dienes, Z.P., Golding E.W. Trad. A.B.Krebs

"Ensembles, nombres et puissances"

2. OS NÚMEROS

2.1. Os Números como propriedades dos conuuntos. Conjuntos equivalentes

Nunca será demais repetir que o número não é de modo nenhum uma coisa,. É uma propriedade exatamente como o vermelhão (colorido) das faces ou a escuridão da noite ou a redondeza das torres. Essas própriedades não são nem objetos reais nem acontecimentos. A forma circular de uma tôrre não é a própria tôrre. A escuridão da noite não é a noite. Essas propriedades, não existem independentemente. Do mesmo modo os números: dois, três, quatro, não existem "concretamente": são as propriedades dos conjuntos de elementos aos quais êles se referem; "dois" é a propriedade de todo conjunto de dois objetos, três é a propriedade de todo conjunto de três objetos.

Para descobrir esta noção de propriedade, é necessário que as crianças joguem com jogos de correspondência têrmo a têrmo. É necessário que êles aprendam a classificar os conjuntos em conjuntos equivalentes. Por exemplo, trazemos chapéus de papel para a classe e perguntamos às crianças se há bastante para que cada um tenha um. Há mais chapéus, ou crianças. ou a quantidade exata? Uma vez a distribuição terminada, haverá, talvez, crianças sem chapéu, ou mais chapéus, e sobrarão alguns,. Ou ainda, se calculamos bem, terá talvez exatamente tantos chapéus quantas crianças. Nêste caso, nós teremos estabelecido uma correspondência têrmo à têrmo entre o conjunto dos chapéus e o das crianças da classe. Quando uma tal correspondência se encontra estabelecida entre dois conjuntos, dissemos que êstes dois conjuntos são equivalentes. Dizemos também, que êles têm a mesma propriedade numérica . Por exemplo, se há cinco crianças no grupo e nós lhe damos cinco chapéus, há uma correspondência têrmo a têrmo no sentido que cada criança não terá mais do que um chapéu e que a todo chapéu corresponderá uma e sòmente criança. Não haverá nenhuma criança sem chapéu nem nenhum chapéu sem criança. Esta propriedade comum dos dois conjuntos, que os torna equivalentes pela possibilidade de estabelecer uma correspondência de elemento a elemento, é chamada a propriedade cinco (1) ; antes que as crianças começam a escrever os algarismos que simbolizam as propriedades numéricas, é indispensável que elas jogam os jogos de correspondência dêste gênero, não será mais do que em se tomando como elementos de um conjunto e utilizando os objetos da classe para fazer conjuntos equivalentes, e assim por diante .

~~Não é necessário que os conjuntos equivalentes~~

Se as crianças já estão familiarizadas com os blocos lógicos, talvez já tenham feito jogos comportando conjunçoẽs e disjunçoẽs. Um jogo de conjunção é um jôgo sôbre "ao mesmo tempo ...e..." enquanto que um jôgo de disjunção é um jôgo sôbre "ou bien ou bien". Nos jogos conjuntivos, com os blocos lógicos, ensinamos às crianças a considerar os atributos "compostos" que sejam tais que um bloco possa possuí-los ao mesmo tempo. Por exemplo, vermelho e quadrado. Um bloco que é ao mesmo tempo vermelho e quadrado possui o atributo "vermelho" e o atributo "quadrado". Se, pois, nós queremos formar o conjunto de todos os blocos vermelhos e o conjunto de todos os blocos quadrados, então os blocos que são vermelhos e quadrados estarão contidos na intersecção do conjunto dos blocos quadrados. Os jogos conjuntivos quando são jogados com os atributos correspondem aos jogos de intersecção jogados com conjuntos. Assim os diagramas de Venn construídos com os blocos lógicos, correspondem exatamente ao procedimento que consiste em rodear as crianças com cordas e realizar, assim, as intersecçoẽs. Desta maneira será naturalmente possível pensar em mais de dois atributos, três por exemplo, e, tomando as crianças como membros de nosso universo, fazer de um diagrama de Venn em três arcos. Por exemplo, podemos tomar como primeiro atributo a qualidade de menino e pensar no conjunto de todos os meninos. Depois podemos tomar como outro atributo o fato de trajar vermelho e formar o conjunto de tôdas as crianças que trajam vermelho. Enfim, tomar os cabelos loiros como terceiro atributo, constituindo o conjunto de tôdas as crianças de cabelos loiros. Podemos, então, passar cordas ao redor dêste conjuntos e deixar as crianças determinarem aos quais elas pertencem, porque elas bem sabem como estão vestidas, se são meninos ou meninas, se têm ou não cabelos loiros.
Assim, jogar as intersecçoẽs, no caso dos conjuntos, é em suma a "mesma" coisa que jogar o jôgo do "e" com os atributos.

Do mesmo modo fazer reuniões, é a mesma coisa que jogar o "ou...ou" com os atributos. Tomemos, por exemplo, a reunião do conjunto dos meninos com o conjunto das crianças vestidas de vermelho; então, a reunião formada pela totalidade das crianças consideradas de um e outro conjunto pode ser definida pelo atributo "ou bem ser um menino ou bem estar vestido de vermelho". Isto significa pois que nós consideramos tôdas as crianças que estão em uma ou outra corda. Naturalmente no caso de três atributos, nós consideramos o conjunto das crianças que é a reunião do conjunto dos meninos com o conjunto das crianças vestidas de vermelho, depois, a reunião desta reunião com o conjunto das crianças de cabelos loiros. Então, nós podemos dizer que, na reunião total, nós consideramos tôda criança que tem um ou outro dos três atributos, isto é:

é necessário que seja um menino, que esteja vestido de vermelho, ou ainda que tenha cabelos loiros.

Podemos tornar o jôgo do "ou ...ou" mais realista e jun dades numéricas e a impossibilidade, à inigualdade de suas propriedades.

Há três maneiras possíveis de exprimir a inigualdade. Podemos dizer, por exemplo, que o número dos elementos do conjunto grande azul não é do mesmo número de elementos do conjunto de quadrado a vermelhos. "Não o mesmo" pode ser Simbolizado pelo sinal de igualdade cortado (diferente de):

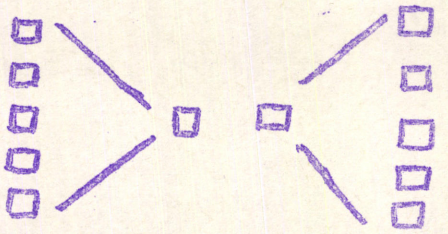
$$N \{\text{grandes azuis}\} \neq N \{\text{quadrados vemelhos}\}$$

Podemos precisar a informação dizendo que há mais elementos no conjunto dos grandes azuis que neste dos quadrados vermelhos. Isto se indica pelo sinal >

$$N \{\text{grandes azuis}\} > N \{\text{quadrados vermelhos}\}$$

Do mesmo modo, se queremos indicar que há menos elementos no conjunto dos quadrados vermelhos que no dos grandes azuis, nós empregaremos o sinal 1<[1]

NOTA : 1. Os símbolos <, > serão facilmente adquiridos pela manipulação das barrinhas (réglettes emboitables):



(N.D.É.)

$$N \{\text{quadrados vermelhos}\} < N \{\text{grandes azuis}\}$$

Quanto à propriedade numérica, em si se exprime, nós acabamos de ver, colocando a letra N antes do sinal de conjunto. Por exemplo, escrevamos a igualdade:

$$N \{\text{quadrados vermelhos}\} = N \{\text{redondos azuis}\}$$

e esta igualdade é a das propriedades numéricas dêstes dois conjuntos. Será bem entendido, inexato dizer que o conjunto dos quadrados vermelhos, é o mesmo que o conjunto dos redondos azuis, enquanto que não é mais inexato dizer que o número de elementos dêstes dois conjuntos é o mesmo. Assim acabamos de mostrar que podemos nos colocar em dois níveis diferentes quando falamos de igualdade. Quando dois conjuntos são iguais, a significação é totalmente diferente daquela quando o número de elementos dos dois conjuntos é o mesmo. Ou ainda, se nós queremos dizer alguma coisa de inigualdade, nós podemos escrever.

$$N \{\text{grandes vermelhos}\} > N \{\text{triângulos amarelos}\}$$

Esta notação traduz o fato que se nós queremos estabelecer uma correspondência entre o conjunto dos vermelhos grandes e o triangulos amarelos, vai restar no primeiro conjunto um certo conjunto dos elementos aos quais não corresponderá nenhum elemento no segundo conjunto. Em presença de uma tal situação, nós dizemos que a propriedade numérica do primeiro conjunto é maior do que a propriedade numépre à mão e que é necessário jogar seguidamente.

Podemos nos servir dêstes cartões-números para jogar os jogos de correspondência têrmo a têrmo com outros conjuntos. Por exemplo se temos um conjunto composto de uma laranja, uma maçã, e uma banana, - podemos jogar tomando primeiro as três primeiras palavras na ordem correta, e as colocar, uma por uma, em correspondência com os elementos do - conjunto de de frutas. Podemos atribuir o "um" à maçã o "dois" à laranja e o "trêz" à banana, mas, bem entendido, não é indispensável nos prendermos a esta ordem. Nós vimos, com efeito, que a ordem dos elementos deu um conjunto, não importa. Ao contrário, a ordem dos elementos do - conjunto das palavras-números é essencial. O que importa é começar pelo "um" mas tanto podemos atribuí-lo à banana como a outra fruta.

Se sabemos bem as palavras-números na ordem correta, a última palavra número determina o "número cardinal" do conjunto de objetos. É isto que queremos dizer quando se fala em "contar os elementos de um conjunto". É necessário multiplicar as atividades desta espécie lembrando que o fato de limitar a fazer contar "um,dois, três, quatro, cinco..." tem muito menos significado do que fazer escolher as palavras "um","dois" "três", "quatro"... e de as fazer colocar em correspondência têrmo a têrmo, com os elementos de conjuntos materialmente realizados.

Naturalmente, é necessário mesmo, a seguir jogar os jogos - análogos com os algarismos "1", "2", "3" ... Podemos, por exemplo, para começar, fazer colocar em correspondência com os elementos do conjunto - ao mesmo tempo, os cartoēs-palavras e os cartoēs-algarismos. Para começar, nos limitaremos aos números de um a nove.

1.15 Conjunto de conjuntos, e conjunto de conjuntos de conjuntos.

Convém consagrar uma série de jogos às trocas de universos que podem se produzir ao longo de uma lição. Por exemplo, em um dado momento, pensamos no universo das crianças que estão na classe e, mais tarde, na mesma lição, pedimos que pensem no universo dos conjuntos de crianças, o que é diferente. Como pode ser um pouco abstrato para as crianças pensar num universo de todos os possíveis conjuntos decrianças, podemos - nos contentar em conduzí-los a pensar em universos de particulares conjuntos de crianças.

Para melhor nos fazermos compreender, exporemos em detalhe - um jôgo a partir do qual podem ser criados semelhantes. Fazemos as crianças sentarem nas mesas ou nas carteiras, em seus lugares habituais. Por exemplo, colocamos quatro crianças ao redor de cada mesa, ou duas crianças por banco e falamos em "mesas" (tablées) de crianças. Nêste caso, - além do universo das crianças da classe, haverá um outro conjunto de base no qual poderemos pensar durante a lição - o universo das mesas (ou - das carteiras).

Podemos, então, começar a jogar estabelecendo a correspondên cia têrmo a têrmo, entre os conjuntos pertencentes a êsses dois universos. Por exemplo, podemos jogar fazendo corresponder as mesas de crianças e as mesas, de maneira que um universo será de mesas de crianças(êsses conjuntos de quatro crianças é que são os elementos do universo) e no outro universo haverá mesas (as mesas serão os elementos d'êste universo). Se ao redor de cada mesa há quatro crianças sentadas, se não há nenhuma mesa desocupada e se não h-a nenhuma criança de pé, há tantas mesas quantas "mesas" de crianças (tablées). Neste caso há correspondência têrmo a têrmo entre um conjunto de mesas e um conjunto de crianças sentadas à mesa. (Esta não é uma correspondência têrmo a têrmo entre o conjunto das mesas e o conjunto das crianças).

Consideremos o caso seguinte. Imaginamos (ou dispomos)cinco mesas e ao redor de cada mesa imaginamos quatro crianças. Nós podemos nêste caso, por em correspondência têrmo a têrmo o conjunto dos Quartetos (permitam-nos chamar assim, por necessidade do caso, os grupos de quatro crianças) sentadas ao redor de cada mesa com o conjunto das mesas. Há tantos quartetos quantas mesas. Se, ao contrário, tentarmos por em correspondência, um a um, o conjunto de cri-nças com o conjunto de mesas, fracassaremos lamentàvelmente, porque há muito mais de cinco crianças e só há cinco mesas, quando chegarmos a sexta criança não haverá mais mesa para ela. Há evidentemente, mais crianças do que mesas, mas há tantos "quartetos" quantas mesas.

Podemos levar o jogo mais longe e imaginar que cada criança tenha três livros,. Nêste caso nós pensamos em "conjuntos de livros", mas não importa quais conjuntos de três livros em "trios" de livros. Nós dispomos, então, de um maior número de universos. Nós temos o universo das crianças, o universo dos "quartetos" de crianças, o universo dos trios de livros e o universo dos livros. Podemos jogar e, por exemplo, perguntar: "O que podemos por em correspondência (fazer ir) um a um?". Assim o conjunto de trios de livros pode ser posto em correspondência com o conjunto das crianças. Há tantos trios de livros quantas crianças sentadas ao redor das mesas. e há igualmente tantos "quartetos de trios" de livros quantos "quartetos" de crianças e, assim por diante.

Mas há, naturalmente, muito mais livros do que crianças. Se ensaiarmos estabelecer uma correspondência têrmo a têrmo entre o número de livros e o número de crianças, faltarão crianças bem antes de faltar livros, do mesmo modo que as mesas para a totalidade da classe.

Estamos em presença do universo dos conteudos numéricos crescentes. O universo numericamente mais fraco e o das mesas, que tem a mesma propriedade numérica do universo dos "quartetos" de crianças. O universo das crianças já é mais importante em número, e tem a mesma propriedade numérica que o universo dos "trios" de livros. Quanto ao universo dos livros, é o que tem maior conteúdo numérico. Assim, a ordem ascendente é: mesas, crianças, livros. Se queremos calcular o número de livros que há sôbre todas as mesas é necessário, primeiro, procurar o número de livros

Com esta série, a criança não tem nenhuma necessidade de saber que para obter o "seguinte" o "sucessivo" de 5 é necessário juntar 1 ao 5 e obter 6. É suficiente recitar a série de palavras, que aprendeu de cor e o que vem após o "cinco" será o "sucessivo" e ela saberá que é "seis" Mas esta maneira de agir deixa completamente separadas as idéias de "um a mais", de "vizinho" e de"sucessivo". Tem sido amplamente demonstrado que quando as crianças não têm uma certa medida, de certo modo, êxito - em fazer a síntese entre estas duas idéias, todo seu trabalho sôbre os números arrisca ser feito ("au petit bonheur la chance") com pouco êxito, e elas não são capazes de racionar eficazmente sôbre as situações - aritméticas mais simples.

O jôgo descrito em 4.2. (pág.47) pode ser tornado independente de tôda base de numeração, para verificar o conhecimento dos números fazendo as crianças construirem pilhas de cubos de maneira recorrente, isto é, referindo-se à pilha procedente cada vez que elas construirem a pilha seguinte.

Nota - Êste jôgo se deve a P.Greco, numa forma ligeiramente diferente. Veja Études, XIII, sôbre a construção do número.

O primeiro exercício é muito simples. Tomar um - objeto. Temos a primeira pilha.

Em seguida construir um conjunto equivalente ao primeiro conjunto (ou a primeira pilha). Melhor dito, a criança deve separar um outro objeto. Depois pedimos colocar um outro objeto com êste objeto. Assim construiram seu segundo conjun to (sua segunda pilha).

Em seguida , construimos um conjunto equivalente - ao segundo conjunto. Isto feito, toma-se um outro objeto e o juntamos ao conjunto que vem de ser construido. Temos agora realizado o terceiro conjunto,

Em seguida, novamente, "copiamos" o último conjunto, isto é, construimos um conjunto equivalente ao terceiro conjunto. - Juntamos um objeto a êste novo conjunto e, eis o quarto conjunto.

Continuamos o maior espaço de tempo possível, de - preferência até que a criança tenha perdido a conta do número de objetos que entram na composição das pilhas sucessivas.

Então, a professôra mostra as duas primeiras pilhas e pergunta às crianças que assistiram à construção da série, qual é que tem mais objetos. A pergunta seguinte é: "Quantos objetos a mais há na - maior das duas?". Prosseguindo o interrogatório, retomamos a série mostrando sempre duas pilhas consecutivas. As crianças não demoram a perceber que a pilha "seguinte" tem sempre um objeto a mais, pois que foram - assim constituidos.

A etapa seguinte poderá consistir em "mostrar" a primeira e a terceira pilhas, depois a segunda e a quarta, depois a - terceira e a quinta (bem entendido, sem pronunciar os adjetivos ordinais!)

e a propor as mesmas perguntas. Muitas crianças que respoderam certo à série de perguntas precedentes vão começar por acreditar:

a) ou bem que a pilha maior tem três ou quatro elementos a mais do que a menor, mesmo se ela não está mais do que dois intervalo da procedente.

b) ou bem, que a pilha maior tem sòmente, um elemento a mais do que a menor. Se lhes perguntarmos porque elas responderão dizendo que no primeiro caso, que as pilhas são tão grandes que as maiores devem ser muito maiores do que as pequenas e, no segundo caso que as pilhas são tão grandes que são quase parelhas e que não têm tanta diferença.

É evidente que estas crianças ainda não estabeleceram uma ligação utilizável entre a sucessão dos números e as quantidades que êles representam. Sabemdo que um e um são dois, elas operam um a mais e um a mais são dois a mais. Veremos que logo que as crianças jogam com os <u>estados</u> e <u>operadores</u>, e estabeleceram as equivalências entre as sucessões de operadores e os operadores isolados, as dificuldades que acabamos de lembrar desaparecem em grande número.

[illegible] em Junho de 1978
[illegible]