junto complementar de um conjunto "e" pode se exprimir pelas negações de "ou...ou" das prop riedades determinantes do conjunto original. Em outros têrmos, dizer"não azul"e"não quadrado" é a mesma coisa que dizer "ou não azul ou não qua drado".

O exercício pode ser transformado em jôgo da mesma maneira que o precedente.

10. OS JOGOS DAS TRANSFORMAÇÕES

10. 1. O jôgo de reprodução ou cópia.

Êle é jogado com duas equipes que se defrontam, cada uma dis ponde de uma caixa completa de blocos lógicos. Devemos cuidar para não mi sturar os dois conjuntos de blocos e verificar que não falte nenhuma pe ça num ou neutro.

A primeira reprodução será evidentemente uma forma de reprodu ção idêntica, ou dito de outra forma, cópia: uma equipe fará uma determi- nada construção, não importa qual, com os blocos, e a outra equipe deverá reproduzí-la exatamente, isto é, copiá-la.

Algumas crianças de cinco anos e mesmo de seis anos acham is to na verdade muito difícil. É prudente limitar a 5 ou 6 o número de peça da primeira construção. Se um modelo é feito por uma equipe, a cópia exa- ta, para a equipe que se encontra em frente apresentará alguma dificuldad de.Para ajudar as crianças nêste exercício é necessário que elas possam s se concentrar sôbre as relações espaciais entre as peças. Resultará,então, uma aprendizagem importante. Desde que as crianças saibam reproduzir uma construção com precisão podemos complicar o exercício; por exemplo, pode- mos decidir que a mesma construção deva ser feita, mas cada vez que uma peça azul for colocada de um lado, uma peça vermelha (mas da mesma forma, do mesmo tamanho e da mesma espessura) deverá ser colocada em frente; e, paralelamente se uma peça vermelha foi posta de um lado, então, uma peça azul (mas da mesma forma, do mesmo tamanho e da mesma espessura) deve ser colocada do outro.~~Mant~~ Além de que a uma peça amarela que é colocada de u um la do deverá corresponder uma peça amarela do outro. Assim, a estrutu ra será reproduzida exatamente com a diferença das ~~bxmms~~ peças azuis e das peças vermelhas que serão intervertidas. Areprodução poderá evidente mente ser feita de uma maneira diferente, escolhendo uma outra combinação de côr. Cêdo as crianças começam a pensar em uma troca de côr, cíclica,por exemplo: cada azul de um lado poderá ser substituido do outro lado pela m mesma peça ma s vermelha, cada vermelha pela mesma peça mas amarela e cad da amarela pela mesma peça mas azul,etc...

Há muitos outros jogos de reprodução possíveis, por exemplo, cada peça grande de um lado pode ser substituida por uma pequena, cada peq uena por uma grande, ou cada espêssa por uma delgada, cada delgada por uma espêssa ou bem podemos fazer duas destas trocas de atributos ao mesmo tempo, etc.

O jôgo pode complicado tanto quanto as crianças o desejem e pode se tornar muito competitivo. É uma introdução importante à idéia de transformação que pode mesmo conduzir as crianças à descoberta de algumas das propriedades dos grupos matemáticos.

Se três equipes jogam um jôgo de reprodução será nêste caso, com três conjuntos de blocos lógicos. Então A pode construir o edifício, B pode reproduzí-lo segundo uma certa regra e depois C pode reproduzir B segundo uma outra regra. Podemos perguntar às crianças qual é a regra que permite reproduzir A em C. Êste exercício as fará entrar no domínio da te teoria das transformações.Naturalmente, as quatro formas podem ser troca- das umas nas outras, e muitas possibilidades podem ser tentadas,por exem- plo, os quadrados podem ser trocados em triângulos e os redondos em retân gulos; quatro combinações cíclicas podem também ser ensaiadas, etc...

10.2. Desenvolvimento do jôgo de reprodução

Vemos claramente que o jôgo de reprodução contém os germens de uma a tividade matemática muito avançada. A idéia de transformação, ou função que cria uma situação a partir de uma outra situação está inclusa nêste jôgo. Em outro, a combinação de tais transformações está também in- cluso como, por exemplo, se o grupo A está reproduzido em B de um certo mero de perguntas será o "campeão", e as outras ensaiam fazer melhor se, é possível advinhar o conjunto novo com um tão pequeno número de perguntas.

Não é preciso esperar ver nascer estratégias muito complicadas no princípio. Mas, após uma prática suficiente, as crianças terão f feito melhor uso da informação. Por exemplo: Se um triângulo grande amarelo delgado é uma peça "sim" será uma boa estratégia trocar um só atributo por vez e mostrar um triângulo grande vermelho delgado. Se é uma peça "não" é então o amarelo que faz a diferença e o atributo "amarelo" deve fazer parte do conjunto a advinhar. Se, pelo contrário, é uma peça "sim" então a côr não pode fazer adiferença e pode-se deduzir que a côr não entra na definição do conjunto;..., mas, como acabamos de dizer, não podemos esperar um tal rigor de princípio, se bem que há crianças que sã capazes.

O que é certo é que as crianças não tirariam nenhum benefício de exercícios dêste gênero se a professôra lhes ensinasse a resolvêlos desta maneira. O fim de tais jogos não é, com efeito, mostrar como encontrar a solução, mas, note-se, a necessidade que faz aprender a jogar, a manejar com uma certa soma de reflexões pessoais, e os jogos são propostos justamente às crianças para lhes dar uma oportunidade de adqui r essa tal reflexão pessoal; dizer como jogar privará as crianças desta v vantagem e tornará os jogos sem valor educativo.

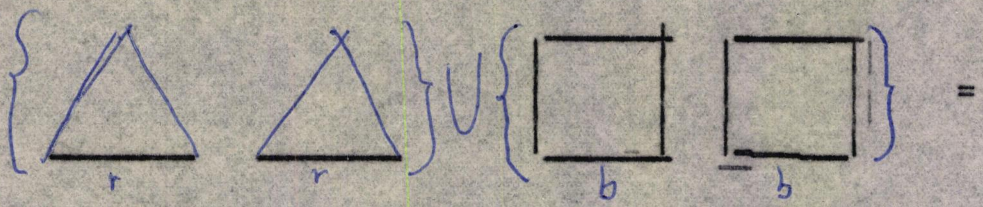
7. O JÔGO DOS QUADROS OU MATRIZES

Pedimos para as crianças colocarem em ordem os conjuntos de blocos. Esta fórmula é em idéia, muito vaga e as crianças farão, algumas vezes um vago ensaio de por as peças em ordem. As instruções podem ser mais precisas que dissermos:"Coloque todas as peças grandes aqui e todas as pequenas lá. Nós começaremos com os quadrados e depois continuaremos com os retângulos, depois com os redondos e depois com os triângulos"; ma seria preferível, evidentemente, deixar as crianças tomarem estas decisõ sões sòzinhas.

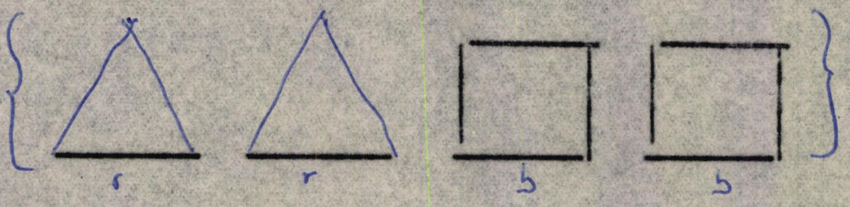
Pode que 48 peças sejam um número muito grande para um arranjo conveniente numa matriz. Se selecionarmos, de modo sistemático, um pe queno número de peças e se pedimos às crianças para arrumá-los, a idéia de fazer seguir uma certa ordem poderá vir-lhes ao espírito mais fàcil - mente. Se dermos só as peças grandes e espêssas, serão 12 compreendendo 3 cores e 4 formas. Não esperaremos muito antes que as crianças as ordenem em 3 filas de 4 peças ~~de~~ cada uma e cada fila conterá as peças de m mesma côr e provàvelmente na mesma ordem. Haverá uma fileira vermelha, u ma azul e uma amarela e, provàvelmente, uma coluna com quadrados, uma co triângulos, uma com retângulos e uma coluna com redondos. Tendo apresen tado esta como uma das possíveis ordenações, então a classificação de t todas as peça s da caixa em um quadro (tabuleiro) se tornará muito fácil. O método de classificação tendo sido escolhido e definido, podemos começ çar uma parte colocando sòmente um certo número de peças, isto é, enchendo uma certa parte da mesa e pedindo para as crianças continuarem a dispor o resto segundo as regras como elas viram fazer com as peças já colo cadas. Evidentemente podem fazer em rodízio e de modo competitivo. c criança ou uma equipe pode pensar em uma regra e aplicá-la colocando sòmente algumas peças. A outra equipe pode então procurar encontrar esta regra colocando outras peças a seguir. As peças mal colocadas podem ser contestadas pela equipe adversária ~~prixxxxxixx~~ e ~~os~~ pontos ganhos ou p didos conforme o caso. Se uma regra que é diferente da escolhida pela p primeira equipe é realizada pela segunda, deixaremos as crianças conti rem tanto tempo até que esta regra diferente ficará de acôrdo com as pos sições das peças já colocadas.

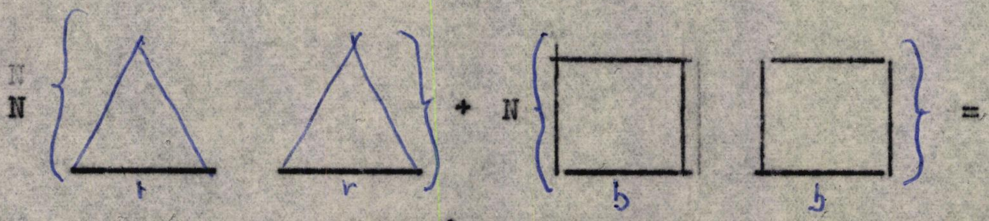
Se quizermos jogar de uma maneira que relève ao mesmo tempo o jôgo de dominó e o jôgo dos quadros, podemos dizer às crianças que façam variar em uma linha, a espessura de uma peça a outra conservando o mesmo tamanho. As instruções podem ser: "Coloque só as peças grandes nesta linha, mas na ordem: espêssa, delgada, espêssa, delgada, etc...Depois podemos pedir que façam uma linha paralela com, desta vez, sòmente peças pequenas, do mesmo modo: espêssa, delgada, espêssa, delgada, etc. Devemos dizer à s crianças que nesta parte as cores e as formas não

A adição corresponde, ao nível do número, à reunião de conjuntos disju..



A reunião do conjunto de pequenos triângulos vermelhos e o conjunto dos pequenos quadrados azuis nos dá :





dois mais dois é igual quatro

2 + 2 = 4

"O atributo número" do conjunto de pequenos triângulos vermelhos é "dois" (ou 2) é o atributo número do conjunto de pequenos quadrados azuis é "dois" (ou 2). Se nós adicionamos o "atributo número" 2 a outro "atributo número" 2 teremos o "atributo número" do conjunto reunião, isto é "4".

JOGOS "ESTADO OPERADOR" COM A ADIÇÃO 107

Todo o elemento da adição pode ser considerado como um operador que "opera" sôbre um número e produz um outro número. É um pouco como uma máquina que opera sôbre o que se introduziu "à entrada" e que dá outra coisa "à saida". Por exemplo, pode-se imaginar uma "máquina de juntar dois" e cada vez que nela se introduz qualquer coisa, ela produz na saida qualquer coisa que é "dois a mais" que à entrada.

Pode-se organizar muitos jogos dêste gênero na maternal. Para se começar as "maquinas" não serão representados simbòlicamente sôbre o papel ou o quadro, mas encarnadas pelas crianças. Tomam-se três crianças, uma encarregada da "entrada" outra encarregada da "saida" e, uma terceira entre as duas, com a função da máquina de adicionar dois. Pode-se mesmo imaginar que êste "operador" seja associado a seu "tournisseur" encarregado de reaprovisioná-lo. A criança "entrada" decide, por exemplo, pôr cinco "jetons" (tentos do jôgo) e se conta um a um. O operador da máquina os toma e junta dois "jetons" vindos do fornecedor depois passa o tôdo à criança "saida" que conta e mostra que há sete "jetons".

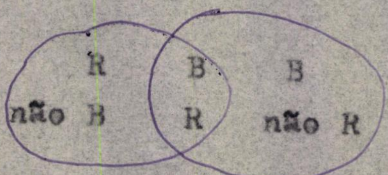
A primeira igualdade significa que o conjunto dos rapazes é o conjunto das crianças que não são meninas. A segunda igualdade significa que o conjunto das meninas é o conjunto das crianças que não são rapazes. Assim o sinal / nos permite designar os conjuntos complementares.

Para começar, é bom utilizar esta noção com parcimônia. Acabaremos por empregá-lo junto com os sinais de reunião e intersecção. Suponhamos, por exemplo, que queremos falar da intersecção de um conjunto com um outro conjunto diferença ou com um conjunto complementar. Seja, ainda uma vez como universo o conjunto das crianças da classe e um conjunto B formado de todas as crianças loiras; se chamamos R o conjunto das crianças vestidas de vermelho, como designaremos o conjunto das crianças vestidas de vermelho que não têm cabelos loiros? As crianças que não têm cabelos loiros vão formar o conjunto complementar dêste das crianças que têm os cabelos loiros. Assim, o conjunto das crianças que não são loiras pode ser escrito I \ B. O conjunto das crianças vestidas de vermelho se escreve (R). Ora, o que nos interessa agora, é a parte comum, ou intersecção dêstes dois conjuntos. Nós escrevemos

$$\{I \setminus B\} \cap \{R\}$$

Êste conjunto é aquele do qual falamos, isto é, o conjunto das crianças não loiras que vestem vermelho ou ainda o conjunto as crianças vestidas de vermelho que não são loiras.

Nunca será demais insistir que êste "cálculo" sôbre os conjuntos não é para ser apresentado a qualquer preço para a criança. O que importa é dar-lhes idéia de conjunto, idéia de relação entre um elemento e o conjunto, as noções de conjunto vazio, de reunião, de intersecção e de complementos dos conjuntos. Se as crianças mostram qualquer dificuldade em utilizar o simbolismo, é necessário renunciar a êle. Seria bem mais fácil, na maior parte dos casos escrever a definição de um conjunto sob a forma de uma frase da linguagem corrente como temos feito muitas vezes até aqui. Por exemplo, em lugar de escrever a definição de um conjunto de uma maneira formal, poderiamos dizer como temos feito: "O conjunto das crianças que não têm cabelos loiros e que vestem vermelho". Em certas idades e em certos ~~estados~~ níveis êste gênero de descrição verbal convém mais. Há, bem entendido, uma outra maneira de expressão, os diagramas de Venn:



Nosso conjunto se encontra à esquerda (R não B). Esta notação é muito clara e desde que as crianças tenham compreendido que os limites do diagrama de Venn indicam as condições de pertinência a um conjunto para os objetos que estão dentro e de não-pertinência a um conjunto para os objetos que estão fora não haverá nenhuma dificuldade em traçar o diagrama de Venn de qualquer conjunto. De fato, êste diagrama fará as crianças compreenderem a noção de conjunto, que nós as queremos fazer adquirir, muito mais rápido e mais eficazmente que tôda outra notação formal. Ao contrário, haverá crianças que apreciarão a concisão e a beleza de uma notação formal: não devemos privá-los, de sorte que não se pode impor a êste assunto nenhuma regra rígida. O que não deixa dúvida é que basta recorrer a uma notação muito simples para conservar o traçado feito, e certas abreviações serão provàvelmente, necessárias. Não é necessário, nem possível, escrever tudo por extenso em linguagem corrente. As crianças são prontas a abreviar; quanto a saber em que medida fazendo, elas podem progredir para uma linguagem mais concisa e mais formal, será a situação da classe que permitirá decidir.

As operações sôbre conjuntos que vão ter influência importante sôbre a introdução das operações aritméticas sôbre os números são:

1) a operação que constroi o conjunto-reunião
2) a operação que constroi o conjunto-diferença.

A reunião de dois conjuntos, no caso onde a intersecção dêstes dois conjuntos é vazia, constituirá o estado anterior, preparatório (préalable) da operação aritmética de adição. A descoberta da diferença entre dois conjuntos conduz à descoberta da diferença entre dois números, isto é, à operação se haverá mesas (as mesas serão os elementos dêste universo). Se ao re-dor de cada mesa há quatro crianças sentadas, se não há nenhuma mesa de-socupada e se não há nenhuma criança de pé, há tantas mesas quantas "mesas" de crianças (tablée). Nêste caso há correspondência têrmo a têrmo entre um conjunto de mesas e um conjunto de crianças sentadas à mesa.((Esta não é uma correspondência têrmo a têrmo entre o conjunto das mesas e o conjunto das crianças).

Consideremos o caso seguinte. Imaginamos (ou dispomos) cinco mesas e ao redor de cada mesa imaginamos quatro crianças. Nós podemos, nêste caso, por em correspondência têrmo a têrmo o conjunto dos "quartetos" (permitam-nos chamar assim, por necessidade do caso, os grupos de quatro crianças) sentadas ao redor de cada mesa com o conjunto das mesas. Há tantos quartetos quantas mesas. Se, ao contrário, tentarmos por em correspondência, um a um, o conjunto de crianças com o conjunto de mesas, ~~fr~~ fracassaremos lâmentàvelmente, porque há muito mais de cinco crianças e só há cinco mesas; quando chegarmos à sexta criança não haverá mais mesa para ela. Há evidentemente, mais crianças do que mesas, mas há tantos "quartetos" quantas mesas.

Podemos levar o jôgo mais longe e imaginar que cada criança tenha três livros, Nêste caso nós pensamos em "conjuntos de livros", mas não importa quais conjuntos: em conjuntos de três livros em "trios" de livros. Nós dispomos, então, de um maior número de universos. Nós te-mos o universo das crianças, o universo dos "quartetos" de crianças , o universo dos "trios" de livros e o universo dos livros. Podemos jogar e, por exemplo, perguntar: "O que podemos por em correspondência (fazer ir) um a um ?" Assim, o conjunto des trios de livros pode ser posto em cor-respondência com o conjunto das crianças. Há tantos trios de livros quantas crianças senta-das ao redor das mesas. E há igualmente tantos "quartetos de trios" de livros quantos "quartetos" de crianças e, assim por diante.

Mas há, naturalmente, muito mais livros do que crianças. Se ensaiarmos estabelecer uma correspondência têrmo a têrmo entre o número de livros e o número de crianças, faltarão crianças bem antes de faltar livros, do mesmo modo às mesas para a totalidade da classe.

Estamos em presença do universo dos conteudos numéricos crescentes. O universo numèricamente mais fraco é o das mesas, que tem a mesma propriedade numérica do universo dos "quartetos" de crianças. O universo das crianças já é mais importante em número, e tem a mesma propriedade numérica que o universo dos "trios" de livros. Quanto ao universo dos livros, é o que tem maior conteúdo numérico. Assim, a ordem ascendente é: - mesas, crianças, livros. Se queremos calcular o número de livros que há sôbre todas as mesas é necessário, primeiro, procurar o número de livros de cada "trio", isto é, três, depois o número de trios por mesa, que é quatro, depois o número de mesas que é cinco. Como calcular o número total de livros, não é nosso propósito aqui: isto é do nível da escola primária, não da maternal[1].

Nota 1. Nas escolas inglesas onde o caminho abstrativo da aprendizagem da matemática tem sido posto em relêvo, o Curso preparatório, a classe de 11e faz parte da escola maternal. As crianças só entram na escola primária após terem aprendido a ler. Segue-se que os exercícios descritos como pertencentes à escola maternal serão feitos no Curso preparatório.

É necessário fazer jogos dêste tipo com as crianças mais a-diantadas da escola maternal, para as familiarizar, primeiro com os conjuntos de conjuntos, depois com os conjuntos de conjuntos de conjuntos. Existem numerosos exemplos na vida de todo dia onde vemos pequenos recipientes em recipientes maiores, por sua vez, contidos em recipientes ainda maiores. É necessário, em tôda ocasião examinar a possibilidade de os colocar em correspondência biunívoca e fazer descobrir as relações entre as propriedades numéricas de cada conjunto e conjunto de conjuntos.

prieda de comum dêstes dois conjuntos é, bem entendido, o número seis. O número quatro penetra apenas por uma pequena porta.

Podemos fazer tais jogos com os blocos lógicos. Por exemplo, salientamos que há tantas peças espêssas quantas peças delgadas, e que é fácil estabelecer uma correspondência têrmo a têrmo entre cada peça espêssa e a peça delgada correspondente. A maioria das crianças estabelecerá uma correspondência entre todos os outros atributos além da espessura de tôda peça espêssa que elas juntam a uma peça delgada. Assim, elas colocarão um círculo grande amarelo espêsso com um círculo grande amarelo e delgado, e, assim por diante. Não devemos impedí-los se sugerem proceder de outra maneira; ainda mais, os encorajaremos! Não há uma só correspondência têrmo a têrmo entre dois conjuntos, há muitas. Não é obrigatório que um determinado chapéu cubra um a certa pessoa e sòmente ela. Todo chapeu de papel pode ficar sôbre qualquer criança dêsde que não reste nenhum chapéu sem criança nem nenhuma criança sem chapéu. Podemos fazer corresponder todos os blocos azuis com todos os blocos amarelos e veremos, ainda, que a propriedade numérica do conjunto dos blocos azuis é a mesma que a propriedade numérica do conjunto dos blocos amarelos, e, ainda, que a do conjunto dos blocos vermelhos.

Podemos ainda fazer corresponder os redondos azuis com os quadrados amarelos. Há tantos redondos azuis quantos quadrados amarelos, pois que podemos fazê-los corresponder têrmo a têrmo.

Poderemos, bem entenddido, pedir às crianças construir conjuntos que não possam ser postos assim, em correspondência. Por exemplo, suponhamos que se lhes diga: "Tomem os quadrados azuis e tomem os vermelhos grandes". Há naturalmente, mais elementos no conjunto dos vermelhos grandes do que no conjunto dos quadrados azuis. Os elementos dêsses dois conjuntos não podem ser postos em correspondência têrmo a têrmo. Ao nível dos números, nós dizemos que o número de elementos do conjunto dos vermelhos grandes é maior do que o número de elementos do conjunto dos quadrados azuis. A possibilidade de estabelecer conjuntos em correspondência conduz à igualdade de suas propriedades numéricas e a impossibilidade, à inigualdade de suas propriedades.

Há três maneiras possíveis de exprimir a inigualdade. Podemos dizer por exemplo, que o número de elementos do conjunto grande azul não é o mesmo número de elementos do conjunto de quadrados vermelhos. "Não é o mesmo" pode ser simbolizado pelo sinal de igualdade cortado (diferente de):

$$N\{\text{grandes azuis}\} \neq N\{\text{quadrados vermelhos}\}$$

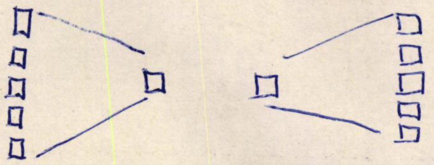
Podemos precisar a informação dizendo que há mais elementos no conjunto dos grandes azuis que nêste dos quadrados vermelhos. Isto se indi pelo sinal $>$

$$N\{\text{grandes azuis}\} > N\{\text{quadrados vermelhos}\}$$

Do mesmo modo, se queremos indicar que há menos elementos no conjunto dos quadrados vermelhos que no dos grandes azuis, nós empregamos o sinal $<$ 1.

$$N\{\text{quadrados vermelhos}\} < N\{\text{grandes azuis}\}$$

1. Os símbolos $<$, $>$ serão fàcilmente adquiridos pela manipulação das barrinhas (réglettes emboîtables):



(N. D. E.)

Quanto à propriedade numérica, em si, se exprime, nós acabamos de ver colocando a letra N antes do sinal de conjunto. Por exemplo, escrevamos a igualdade:

$$N\{\text{quadrados vermelhos}\} = N\{\text{redondos azuis}\}$$

e esta igualdade é a das propriedades numéricas dêstes dois conjuntos. Será, bem entendido, inexato dizer que o conjunto dos quadrados vermelhos é o mesmo que o conjunto dos redondos azuis, enquanto que, não é mais inexato dizer que o número de elementos dêstes dois conjuntos é o mesmo. Assim, acabamos de mostrar que podemos nos colocar em dois níveis diferentes quando