LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Dienes, Z.P. e Golding, E.W.

Les premiers pas en mathématique

Ensembles, nombres et puissances

Trad. A.B.Krebs
(pág. 30)

2.4. Adição e subtração

Já vimos em nossa secção sôbre os conjuntos que a experiência preparatória necessária a adição dos números é a reunião de conjuntos que não têm elementos comuns. É interessante perguntar agora às crianças qual é a propriedade numérica do conjunto realizada pela reunião de dois conjuntos dos quais elas já conhecem as propriedades numéricas. Isto não vai apresentar dificuldade particular porque uma vez os dois conjuntos reunidos, as crianças vão, simplesmente, contar a totalidade dos elementos. Reflitamos um instante no que isto significa. Que fazem elas quando "contam"? Elas estabelecem, é evidente, uma correspondência têrmo a têrmo entre os elementos do conjunto a "contar" e os elementos de um conjunto de "palavras-padrões" retidos em reserva na memória. Em nosso exemplo, elas estabelecem a correspondência entre os elementos do conjunto

{um, dois, três, quatro, cinco, seis...}

e os elementos do conjunto de mesas que se trata de "contar". Contar é só um caso particular do estabelecimento de uma correspondência entre conjuntos, um dos conjuntos sendo um conjunto-padrão, uma espécie de moeda internacional em função da qual mede-se todo conjunto. Convém lembrar que esta medida está assegurada por uma série de conjuntos cujo primeiro é um o segundo um, dois, , o terceiro um, dois, três , e assim por diante.

Suponhamos por exemplo, que o conjunto dos meninos da classe tenha a propriedade numérica quinze, e que o conjunto das meninas da classe tenha a propriedade numérica dezeseis. A propriedade numérica da reunião dêsses dois conjuntos será, então, trinta e um. Ora, a reunião dêsses dois conjuntos constitue o das crianças da classe, de modo que ao nível dos conjuntos pode-se dizer:

$$\{\text{rapazes}\} \cup \{\text{meninas}\} = \{\text{crianças da classe}\}$$

Para passar ao nível seguinte da abstração é preciso dizer: N rapazes + N meninas = N crianças da classe. Ora, o primeiro têrmo desta equação se escreve habitualmente com algarismos 15 e o segundo com os algarismos 16, enquanto que o segundo membro da equação se escreve 31. Afinal escrever 15 + 16 = 31 será uma maneira ao mesmo tempo mais corrente e mais "avançada" de escrever esta particular relação. Bem entendido, pode ser sábio não começar por números com dois algarismos, cuja complexidade relativa pode confundir as crianças nêste nível: elas arriscam não saber tudo o que está contido implicitamente no "um" e o "cinco" de 15 ou no "três" e o "um" de 31. Naturalmente, a maioria das crianças admite sem dificuldade que o quinze se escreve com um 1 seguido de um 5, mas elas confundem muitas vezes com 51 quando elas ainda não adquiriram sòlidamente a noção de valor posicional. Mas se lhes ensinamos que 15 representa a palavra quinze e 16 a palavra dezeseis, e que não se faz nenhuma tentativa para decompor o símbolo em seus elementos, 1 se referindo a um conjunto de dez e 5 a cinco objetos, não lhes teremos feito nenhum mal. Cremos, contudo que é mais seguro, no princípio, usar números pequenos.; as crianças adquirem a idéia de adição tão eficazmente com números pequenos como com grandes e, sem dúvida, mais eficazmente. (Existem, atualmente, dois sistemas em experiência "mis au point" nos Estados Unidos, um por Patrick Suppes e outro por Paul Rosenbloom, que permitem concluir as idéias e as técnicas da adição ver da subtração, da experiência anteriormente adquirida em matéria de conjuntos e de operações sôbre conjuntos)

A operação de subtração de um número de um outro número é de todo evidente a correspondente operação da procura do conjunto diferença entre dois conjuntos. Seja o conjunto constituido pelos rapazes e o subconjunto formado pelos rapazes de cabelos loiros; pode-se tirar êste subconjunto e então, a diferença entre o conjunto dos rapazes e o conjunto dos rapazes de cabelos loiros é constituida pelo conjunto dos rapazes que não têm cabelos loiros. Suponhamos agora, que a propriedade numérica do conjunto dos rapazes seja dez e a do conjunto dos rapazes loiros três: a propriedade numérica do conjunto diferença será então, sete. O cálculo

a propriedade numérica do conjunto-diferença de dois conjuntos constitue
operaçã o de subtração.Do mesmo cálculo da propriedade numérica do conju
unto formado pela reunião de dois conjuntos constitue a operação aritmé
tica que nós chamamos adição.

2.5. Multiplicação

Pode-se introduzir a multiplicação apelando para uma opera
ção muito interessante referente aos conjuntos e conhecido sob o nome de
produto cartesiano. Suponhamos que temos dois conjuntos : um conjunto de
chapeus e um conjunto de crianças. Não é preciso ter tantos chapeus quan-
tas crianças. Examinemos todas as maneiras possíveis de colocar um chapéu
numa criança e formamos um novo conjunto com todos os pares que se pode
constituir com uma criança e um chapeu. Admitamos que há conco crianças e
três chapéus : cada uma das cinco crianças pode colocar qualquer um dos t
três chapéus. Assim, a primeira criança terá três maneiras de usar chapéu
acontecerá o mesmo com a segunda, o mesmo com a terceira, o mesmo com a
quarta e o mesmo com a quintacriança.Isto fará ao todo quinze combinações.
O conjunto de todas as combinações possíveis entre um chapéu e uma crianç
ça é chama do produto do conjunto de chapéus pelo conjunto das crianças.

Tomemos outro exemplo. Nós dispomos sete feijões em uma fi-
leira e constituimos assim, um conjunto de feijões.Dispomos em baixo, sôbr
bre uma segunda fileira, um segundo conjunto de sete feijões, depois, em b
baixo, uma terceira fileira ainda de sete feijões.Nós temos assim, três fi
leiras, isto é, três conjuntos de feijões, e em cada conjunto há sete ele
mentos. E agora, como construir o produto cartesiano entre o conjunto dos
feijões de uma fileira e o conjunto das fileiras que temos dispostas na
mesa? Êste será o momento de lembrar as equivalências entre conjuntos e
constatar que o conjunto das colunas assim formadas é um conjunto equiva-
le nte ao conjunto dos feijões de qualquer uma das fileiras.Em outras pa-
lavras, há tantas colunas de feijões em nossa disposição, quantos feijões
em uma dada fileira. Pode-se então para estabelecimento do produto carte
siano, substituir o conjunto dos feijões de uma fileira pelo conjunto das
colunas. Isto será mais fácil porque então não haverá necessidade de esco
lher uma determinada fileira de feijões para formar o produto para o con-
junto das fileiras. Formemos então o produto do conjunto das colunas pelo
conjunto das fileiras. Este produto vai consistir de todos os pares possí
veis formados de uma coluna e uma fileira. Dizendo de outra maneira, pode
se fazer um par com a primeira fileira e a primeira coluna, um par com a
segunda fileira e a primeira coluna, um par com a terceira fileira e a p
primeira coluna, um par com a primeira fileira e a segunda coluna,e assim
por dia nte. Ao todo há vinte e um pares, o que é precisamente, o número
de feijões postos sôbre a mesa, porque cada feijão se encontra na interse
ção de uma e sòmente uma fileira com uma e sòmente uma coluna. Nós não qu
remos dizer com isto que a introdução do produto cartesiano constitui a m
melhor maneira de introduzir a multiplicação.Talvez não seja, mas o que q
q ueremos dizer é que recorrer a êle,talvez, seja uma maneira de ocupar
as crianças mais bem dotadas enquanto as outras, mais lentas estão ocupad
da s em recuperar seu atrazo na formação dos conceitos de adição e subtra
ção.

Uma das dificuldades que não ressalta imediatamente do que
precede, é que é preciso que as crianças compreendam bem que o conjunto d
feijões do exemplo acima, é um conjunto equivalente ao conjunto de pares
de fieliras e de colunas. A cada par formado de uma fileira e de uma colu-
na corresponde um e sòmente um feijão. E a cada feijão corresponde um e sò
mente um pa r formado de uma fileira e de uma coluna. Deste modo a propri
dade numérica do conjunto de pares de fileiras e de colunas deve ser a me
ma q ue a propriedade numérica do conjunto de feijões dispostos sôbre a
mesa. É a razão, aliás, pela qual esta forma de multiplicação é talvez um
pouco a rtificial.

A introdução corrente consistirá em deixar as crianças con
tarem os conjuntos equivalentes e formar conjuntos de conjuntos equivalen
tes, depois contar os elementos dêsses conjuntos de conjuntos. Dito de ou
tre modo, no caso dos feijões foram feitos três conjuntos eq uivalentes d
feijões. Êles são equivalentes porque cada um é composto de sete feijões.
Depois há um conjunto de conjuntos, isto é, um conjunto de fileiras, nêst
caso; o conjunto de fileiras possui a mesma propriedade numérica de três
e ea da conjunto de feijões tem a propriedade numérica sete. Se então for

3

da propriedade numérica do conjunto-diferença de dois conjuntos constitue a operaçã o de subtração. Do mesmo modo o cálculo da propriedade numérica do conjunto formado pela reunião de dois conjuntos constitue a operação aritmética que nós chamamos adição.

2.5. Multiplicação

Pode-se introduzir a multiplicação apelando para uma operação muito interessante referente aos conjuntos e conhecido sob o nome de produto cartesiano. Suponhamos que temos dois conjuntos : um conjunto de chapeus e um conjunto de crianças. Não é preciso ter tantos chapeus quantas crianças. Examinemos todas as maneiras possíveis de colocar um chapéu numa criança e formamos um novo conjunto com todos os pares que se pode constituir com uma criança e um chapeu. Admitamos que há conco crianças e três chapéus : cada uma das cinco crianças pode colocar qualquer um dos três chapéus. Assim, a primeira criança terá três maneiras de usar chapéu acontecerá o mesmo com a segunda, o mesmo com a terceira, o mesmo com a quarta e o mesmo com a quintacriança. Isto fará ao todo quinze combinações. O conjunto de todas as combinações possíveis entre um chapéu e uma criança é chama do produto do conjunto de chapéus pelo conjunto das crianças.

Tomemos outro exemplo. Nós dispomos sete feijões em uma fileira e constituimos assim, um conjunto de feijões. Dispomos em baixo, sôbre uma segunda fileira, um segundo conjunto de sete feijões, depois, em baixo, uma terceira fileira ainda de sete feijões. Nós temos assim, três fileiras, isto é, três conjuntos de feijões, e em cada conjunto há sete elementos. E agora, como construir o produto cartesiano entre o conjunto dos feijões de uma fileira e o conjunto das fileiras que temos dispostas na mesa? Êste será o momento de lembrar as equivalências entre conjuntos e constatar que o conjunto das colunas assim formadas é um conjunto equivale nte ao conjunto dos feijões de qualquer uma das fileiras. Em outras palavras, há tantas colunas de feijões em nossa disposição, quantos feijões em uma dada fileira. Pode-se então para estabelecimento do produto cartesiano, substituir o conjunto dos feijões de uma fileira pelo conjunto das colunas. Isto será mais fácil porque então não haverá necessidade de escolher uma determinada fileira de feijões para formar o produto para ~~o~~ conjunto das fileiras. Formemos então o produto do conjunto das colunas pelo conjunto das fileiras. Este produto vai consistir de todos os pares possíveis formados de uma coluna e uma fileira. Dizendo de outra maneira, pode se fazer um par com a primeira fileira e a primeira coluna, um par com a segunda fileira e a primeira coluna, um par com a terceira fileira e a primeira coluna, um par com a primeira fileira e a segunda coluna, e assim por dia nte. Ao todo há vinte e um pares, o que é precisamente, o número de feijões postos sôbre a mesa, porque cada feijão se encontra na interseção de uma e sòmente uma fileira com uma e sòmente uma coluna. Nós não queremos dizer com isto que a introdução do produto cartesiano constitui a melhor maneira de introduzir a multiplicação. Talvez não seja, mas o que queremos dizer é que recorrer a êle, talvez, seja uma maneira de ocupar as crianças mais bem dotadas enquanto as outras, mais lentas estão ocupadas em recuperar seu atrazo na formação dos conceitos de adição e subtração.

Uma das dificuldades que não ressalta imediatamente do que precede, é que é preciso que as crianças compreendam bem que o conjunto de feijões do exemplo acima, é um conjunto equivalente ao conjunto de pares de fileiras e de colunas. A cada par formado de uma fileira e de uma coluna corresponde um e sòmente um feijão. E a cada feijão corresponde um e sòmente um pa r formado de uma fileira e de uma coluna. Deste modo a propriedade numérica do conjunto de pares de fileiras e de colunas deve ser a mesma q ue a propriedade numérica do conjunto de feijões dispostos sôbre a mesa. É a razão, aliás, pela qual esta forma de multiplicação é talvez um pouco a rtificial.

A introdução corrente consistirá em deixar as crianças contarem os conjuntos equivalentes e formar conjuntos de conjuntos equivalentes, depois contar os elementos dêsses conjuntos de conjuntos. Dito de outro modo, no caso dos feijões foram feitos três conjuntos eq uivalentes de feijões. Êles são equivalentes porque cada um é composto de sete feijões. Depois há um conjunto de conjuntos, isto é, um conjunto de fileiras, neste caso; o conjunto de fileiras possui a mesma propriedade numérica ~~de~~ três e ca da conjunto de feijões tem a propriedade numérica sete. Se então for-a reunião dos conjuntos de feijões que dispusemos em fileiras e se calcularmos a propriedade numérica dêste conjunto-reunião, obteremos um terceiro conjunto cuja propriedade numérica é vinte e um. É o produto das propriedades numéricas do conjunto das fileiras e do conjunto de feijões de cada fileira.

Chamemos R o conjunto das fileiras de feijões e chamemos F_1, F_2 ou F_3 ou, ainda, em resumo, F, se não desejamos fazer diferença entre as fileiras, ao conjunto de feijões de cada fileira. As propriedades numéricas são então:

$$N\{R\} = 7$$
$$N\{R\} = 3$$

Além disso a reunião de F_1, F_2, e F_3, isto é,

$$\{F_1 \cup F_2 \cup F_3\}$$

constitui o conjunto-reunião do qual nós queremos calcular a propriedade numérica. Esta propriedade numérica, é o produto dos dois números 3 e 7. Se chamamos P o conjunto-reunião, temos

$$N\{P\} = N\{F\} \times N\{R\}$$

e, "multiplicado por" é a operação necessária ao cálculo da propriedade numérica do conjunto-reunião em estudo.

É importante compreender que nesta operação vamos além da idéia de adição. É verdade que se obtém a mesma solução para o problema adicionando os três têrmos ou multiplicando por três. Mas não é porque a resposta é a mesma que a operação é a mesma. A multiplicação implica uma va espécie de variável, a saber o multiplicador, que conta os conjuntos. O multiplicador é uma propriedade dos conjuntos de conjuntos. A multiplicação é uma propriedade dos conjuntos. Também os dois fatores não se referem ao mesmo universo. De fato, não há fatores no caso da adição, porque o número de elementos a adicionar é sem incidência sôbre a natureza do problema. Os mestres que ensinam que a multiplicação é uma adição repetida prestem um desserviço a seus alunos. Na realidade lhes escondem uma dificuldade, e mesmo lhes atiram uma contra verdade. Talvez seja útil salientar que a estrutura lógica da aritmética torna-se relativamente simples quando se trata da adição e da subtração, enquanto a introdução da multiplicação propõe problemas bem diferentes. Resulta - e isso os professores não devem jamais esquecer - uma dificuldade de uma ordem maior na aquisição do conceito de multiplicação, comparado à aquisição do conceito de adição. Na multiplicação, trabalha-se em dois universos diferentes ao mesmo tempo, enquanto que na adição trata-se de um só universo, o dos conjuntos. Na multiplicação, ao contrário, alguns números se referem aos conjuntos e outros aos conjuntos de conjuntos. É uma diferença considerável, e os exercícios que as crianças fizerem com conjuntos e com conjuntos de conjuntos e mesmo com conjuntos de conjuntos de conjuntos, as ajudarão consideràvelmente, por consequência, a enfrentar os problemas que a multiplicação lhe prepará.

2.6. Divisão

Chega um momento em que é necessário introduzir a divisão. A forma mais simples de divisão é a partição. Temos um conjunto e queremos separá-lo em um certo número de sub-conjuntos equivalentes. O resultado da divisão é o número de elementos que terá em cada um dêsses sub-conjun s, Suponha mos, por exemplo, um conjunto de 12 nozes que se trata de reparti em quatro sub-conjuntos equivalentes : o resultado procurado é a propriedade numérica de cada um dêsses sub-conjuntos. É 3 bem entendido. Quando dividimos o conjunto de 12 nozes em 4 sub-conjuntos, a propriedade numérica de cada um dêsses sub-conjuntos equivalentes é três. É muito fácil de fazer e as crianças compreendem que é, de certo modo, o oposto do que se faz quando se multiplica. Quando se multiplica, temos um conjunto de conjuntos e sua propriedade numérica, assim como a propriedade numérica de cada um dos conjuntos dos quais é composto o conjunto de conjuntos. O problema é encontrar a propriedade numérica da reunião de todos êsses conjuntes que são os elementos do conjunto de conjuntos. Na divisão partimos da propriedade numérica da reunião dos conjuntos de conjuntos; temos igualmente a propriedade numérica do conjunto de conjuntos e procuramos a propriedade numérica de cada conjunto que compõe o conjunto de conjuntos.

Primeira situação :

$N\{E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots\ldots\ldots E_n\}$

e $N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = \ldots\ldots N\{E_n\}$ são conhecidos

Problema:

Qual é a resposta para $N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \ldots\ldots\ldots \cup E_n\}$?

É pela multiplicação que se resolve o problema.

Segunda situação:

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots\ldots, E_n\}$

e $N\{E_1, E_2, E_3, \ldots\ldots\ldots E_n\}$ são conhecidos

e sabemos que

$N\{E_1\} = N\{E_2\} = N\{E_3\} = N \ldots\ldots\ldots\ldots (E_n)$

Problema:

Qual é o valor comum de $N\{E_1\}$?

Êste problema tem sua solução numa divisão.

Terceira situação:

$N\{E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots E_n\}$

e $N\ E_1$ é conhecido.

Problema :

Qual é o valor de $N\{E_1, E_2, E_3 \ldots\}$?

Êste problema tem igualmente sua solução na divisão.

Quanto a os meios de chegar ao fim das dificuldades inherentes à estrutura acima, vamos indicar mais adiante, na página 114 (máquinas de escolher).

3. ESTADOS E OPERADORES

3.1. Estados e operadores em matemática

Uma boa parte da matemática se refere ao estudo dos estados e ao estudos dos operadores que ~~conduzem~~ ocasionam a transformação dêstes estados em outros estados. Por exemplo, a adição constitui uma situação dêsse gênero. O mesmo se dá com a subtração e em tôda outra operação aritmética. Na adição, temos a situação seguinte:

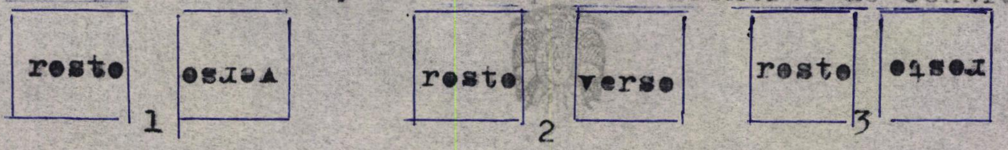
Seja um estado de origem, por exemplo a propriedade numérica de um conjunto: três livros colocados sôbre a mesa. Êste conjunto de três livros é o conjunto de origem e sua propriedade numérica, três, constitu o estado de origem. Efetuemos agora uma transformação. Pode ser reunir êste conjunto de três livros a um outro conjunto, de quatro livros, que acabamos de colocar sôbre a mesa. O operador é a propriedade numérica do conjunto que vem de ser colocado e que se trata de reunir ao conjunto original existente sôbre a mesa. A propriedade numérica do conjunto original é três, e a propriedade numérica do operador é quatro. Bem entendido, uma vez que os conjuntos são reunidos, o estado da mesa se encontra modificado. Há em cima um novo conjunto e sua propriedade numérica é constituida pelo estado modificado. É sete. Assim, o que se passou foi que ao "estado três" foi aplicado um operador "juntar quatro", o que resultou um "estado sete". Podemos dizer o mesmo da multiplicação. Ao "estado três" que está sôbre a mesa aplicamos o operdador "multiplicar por quatro". Isto significa que sôbre uma outra mesa, por exemplo, nós queremos criar um estado no qual haverá quatro vezes outros tantos livros. Nós vamos considerar um conjunto de conjuntos tal que em cada um dêsses conjuntos haverá três livros e que ~~assim~~ assim, êste conjunto de conjuntos compreenderá um conjunto de três livros, um outro conjunto de três livros, um outro conjunto de três livros e ainda um outro ~~de três~~ conjunto de três livros. A propriedade numérica dêste conjunto de conjuntos é naturalmente, quatro, e é êste nosso operder que age como multiplicador. O novo estado que foi engendrado se obtém calculando a propriedade numérica da reunião de todos os conjuntos de livros que foram postos sôbre a mesa. Esta propriedade numérica é doze. Assim, nêsse caso, partimos de um "estado três" e por uma operação de "multiplicação por quatro" obtivemos um "estado de doze". Bem entendide, podemos utilizar os estados e os operadores em muita outra coisa a não ser contar a pertinência aos conjuntos e a modificar esta pertinência reunindo outros conjuntos ao conjunto de origem. Por exemplo, pode-se dizer que o estado de uma criança da classe ~~que ele~~ é estar de pé em um canto da peça. Pode-se ~~fazer~~, a seguir aplicar-lhe um operador (por exemplo, dar dois passos à frente) o que a coloca em um outro lugar da peça. Pode-se, também, dar-lhe outras ordens como dar passos para o lado ou para trás, o sentar ou subir numa cadeira, e assim por diante. Em cada um dêsses casos o estado inicial é a posição na qual a criança se encontrava até o momento em que por um operador, êste estado foi transformado em um outro estado.

Podemos jogar as trocas de estados com os interruptores elétricos. Por exemplo, o estado da peça é "claro". Aciona-se o interruptor: é o operador. Tendo acionado o interruptor, o estado da peça ficou diferente, isto é, "escuro". E se acionamos de novo o interruptor, o estado muda novamente. Eis aí, um conjunto de trocas muito simples. Basta acionar o interruptor. Podemos complicar o jôgo com dois interruptores, comandando cada um, uma lâmpada diferente. Temos então, três espécies de trocas - acionar um dos interruptores, acionar o outro, acionar os dois interruptores ao mesmo tempo. Podemos mesmo, se quizermos, para completar o quadro, incluir o operador que consiste em não acionar nenhum interruptor. Mas isto é um pouco complicado e não é preciso ir tão rápido. "Não fazer nada" como operador corresponde ao zero na adição e a um na multiplicação.

Vamos descrever jogos dêste gênero na segunda parte. Jogar de usar um operador para passar de um estado inicial a um estado final, é pode-se dizer, jogar os jogos estado-operador-estado.

3.2. Os operadores inversos em geral

Após ter realizado alguns jogos estado-operador-estado, pode-se perguntar o que é preciso fazer para voltar ao estado inicial. Por exemplo, dando três passos à frente, que será necessário fazer para retornar ao estado anterior à operação? Três passos para trás, é claro. O deslocamento, a transformação, a operação de dar três passos à frente, é "anulada" pelo movimento que consiste em dar três passos para trás. Do mesmo modo dois passos à direita são anulados por dois passos à esquerda, e uma intervenção no interruptor é anulada pela intervenção seguinte: se havia luz antes de ser acionado, haverá luz novamente quando acionado pela segunda vez, e do mesmo modo se de início havia escuridão, ela voltará quando o interruptor for acionado duas vezes. Não se dá o mesmo no caso dos dois passos à frente. Se após ter dado dois passos à frente, são dados ainda dois passos à frente, não se volta ao ponto de partida : fica-se ainda mais distanciado, então, querendo retornar ao ponto de partida será necessário dar dois passos para trás, isto é, em sentido contrário. Tomemos um outro exemplo, Se dizemos "faze meia volta no lugar" duas vezes em seguida, o executante retorna à posição ~~o~~ inicial; se êle estava de frente para o quadro negro, êle ainda estará de frente para o quadro negro depois das duas meias voltas. Do mesmo modo se voltamos um caderno sôbre sua capa, depois, se fizermos ainda uma meia volta no mesmo sentido, estamos no mesmo caso do interruptor. Podemos realizar diversos jogos "operador-estado-operador" com as crianças, Podemos, por exemplo, retomar o caderno e ver se podemos imaginar outros movimentos. Podemos, com efeito, fazê-lo revirar de várias maneiras: pode ser oscilado voltando a parte de cima para nós (ou afastando de si a parte de baixo o que é equivalente), isto constitui um primeiro movimento; pode-se também, ~~fazer~~ voltá-lo como se vira uma página, da direita para a esquerda (ou da esquerda à direita, é a mesma coisa) o que faz um segundo movimento. Se dermos importância ao sentido em que se encontra o caderno após a rotação, êstes dois movimentos não são equivalentes : no primeiro caso a capa de trás do caderno, onde geralmente, está impressa uma tábua de multiplicação, se volta de cabeça para baixo, e a tábua está ao contrário; no segundo movimento, ao contrário, ela fica no sentido da leitura. Enfim, podemos fazer o caderno girar sôbre si mesmo sem levantá-lo da mesa, de modo que a parte de cima continue em cima e a de baixo em baixo, mas que as inscrições da capa se encontrem ao contrário:



~~as grandes pelas pequenas e todas as espêssas por delgadas.~~

2.5. O jôgo de cópia com troca de forma

Prepa ra-se o jôgo dando todos os quadrados e todos os triângulos

A seguir pode-se deixar as crianças decidirem outras inversões de côres.

2.3. O jôgo de cópia com trocas cíclicas de côres

É muito provável que as próprias crianças imaginem êste jôgo, caso contrário, o professor pode sugerir. Por exemplo, joga-se uma partida decidindo que os vermelhos são copiados em azuis, os azuis em amarelo, e os amarelos em vermelhos. Numa outra partida, adota-se um outro ciclo de troca de côres: o vermelho muda em amarelo, o amarelo em azul e o azul em vermelho. Não há nenhuma razão para não formar mais de duas equipes; pode-se fazer três, q uatro, mais mesmo, com a condição de que cada uma tenha um jôgo completo de blocos. Pode-se decidir que a primeira equipe construa um edifício, que a segunda o copie segundo uma certa regra e a terceir a de acôrdo com uma outra regra, e assim por diante.

2.4. O jôgo de cópia com trocas de tamanho ou de espessura

Começa-se a partida distribuindo a cada uma das duas equipes a metade dos blocos lógicos de uma caixa - os grandes para uma e os pequenos pa ra a outra ou ainda, os espêssos para uma e os delgados para a outra, e se joga "copiar". Pode-se, bem entendido, associar dois tipos de transformações e, por exemplo, uma das equipes pode copiar substituindo todas as grandes pelas pequenas e todas as espêssas por delgadas.

2.5. O jôgo de cópia com troca de forma

Prepa ra-se o jôgo dando todos os quadrados e todos os triângulos para uma eq uipe, todos os retângulos e todos os círculos para a outra. Decide-se que para todo quadrado colocado pela primeira equipe corresponderá um retângulo na segunda, e a todo triângulo da primeira, um círculo na segunda. Nas partidas seguintes, as próprias crianças decidem as regras aplicáveis às transformações.

Lá também, pode-se introduzir trocas cíclicas. Por exemplo, todo quadrado mudará em triângulo, todo triângulo mudará em círculo, todo círculo em retângulo e todo retângulo em quadrado. Deixamos as crianças decidirem as outras trocas.

2.6. Combinação de trandformações.

Voltemos à situação na qual uma casa ou um motivo foram transformados, por uma regra, em outro, depois êste outro era, por sua vez, transformado por uma outra regra. Tomemos, por exemplo, as trocas cíclicas de côres. Começamos por uma construção e estabelecemos como primeira regra, como antes, q ue o vermelho troca em azul, mas que o amarelo não troca. Depois q ue a outra equipe aplica por sua vez a mesma regra: o azul troca em vermelho e o vermelho troca em azul, o amarelo não troca. Que se descobre no fim das duas partidas? Nota-se que voltamos à construção ~~inicial~~ original, e se recomeçarmos sem cessar, faz-se sempre a mesma constatação

Pedimos às crianças para aplicarem uma regra análoga, por exemplo que o vermelho muda em amarelo, o amarelo em vermelho, mas que o azul fica sem mudar. Que se passa se jogamos duas partidas uma depois da outra?

Tomemos, agora, duas regras. Primeira regra - tudo é copiado tal q ual; segunda regra - o azul troca para amarelo, o amarelo em azul e o vermelho fica sem trocar. Se jogarmos êste jôgo lance sôbre lance, voltamos à construção original? Ao fim de quantas partidas? Conservemos a primeira das duas regras, e adotemos como segunda regra que o vermelho muda em amarelo, o amarelo em vermelho, e que o azul não muda. Se jogarmos êste jôgo lance sôbre lance, voltamos à construção original? Ao fim de quantas pa rtidas?

E agora se decidimos que o azul troca em vermelho, o vermelho em amarelo e o ama relo em azul, o que acontece? Voltamos à construção original ao fim de quantas partidas? E se paramos ao fim de duas partidas? Que temos então? Podemos chegar ao mesmo resultado em uma só partida? Quais regras seria então, necessário empregar?

Expe rimentemos ainda essa espécie de jôgo. De início estabelecemos duas regras. A primeira, por exemplo, será que os quadrados trocarão para círculos, os círculos em quadrados, os retângulos em triângulos e os triâ ngulos e m retângulos; a segunda será que os quadrados mudam em triângulos, os triângulos em quadrados, os círculos em retângulos e os retângulos em círculos. Quando se jogam duas partidas como se apresenta a construção? Poderíamos obter o mesmo...

conjuntos, mas, universos; há um grande salto na abstração, mas as crianças se encantam de fazê-lo, contanto que se lhes proporcionem as experiências convenientes para alicerçar esta nova abstração.

O número de elementos de um conjunto vazio é designado pela cifra zero. Escreve-se simbòlicamente : N = 0. Por exemplo, tem-se:

N triângulos quadrados = 0 porque triângulo quadrado =

b) A adição dos números. A etapa seguinte no processo da aprendizagem parece definido muito naturalmente como sendo a construção das operações sôbre os números à imagem das operações sôbre os conjuntos. Depois de ter compreendido a distinção entre números e conjuntos, a igualdade dos números, os conjuntos vazios e o número zero, é possível enxertar a noção de adição sôbre a noção de reunião de conjuntos, Mas, apresenta-se uma dificuldade; os conjuntos que possuem elementos comuns, uma vez reunidos, não dão o mesmo Resultado Númérico que conjuntos de mesmo número não tendo elementos comuns. Por ex.:

N quadrados grandes delgados = 3

N quadrados azuis delgados = 2

A reunião dêstes dois conjuntos é formada de quadrados delgados que são grandes ou azuis, o que faz 4 elementos sòmente, os números"não se adicionam". Mas, se set tomam :

quadrados grandes delgados reunidos com quadrados grandes espessos obtém-se :

N quadrados grandes delgados N quadrados grandes espessos = 3 - 3 = N quadrados grandes = 6. Neste caso os números "se adicionam". Em consequência a operação de adiçao dos números repousa sôbre a operação dos conjuntos que não têm elementos comuns, isto é, cuja intersecção é vazia. Serão necessários muitos exercícios práticos para compreender esta noção; em outros trabalhos, especialmente os de Suppes, corta-se esta complicação eliminando a reunião de conjuntos que tem elementos comuns. Nós objetamos a êste método que as crianças aprendem primeiro um caso particular, e, devem, depois, executar um processo de generalização, para poderem dominar a situação lógica completa quando esta última se apresenta. Diversos fatos levam a pensar que as crianças têm mais dificuldade de g generalizar um conceito já formado, que formar, de início, um conceito mais geral.

c) A subtração dos números. A operação que consiste em formar a diferença de dois conjuntos conduz muito naturalmente à operação que consiste em encontrar a diferença de dois números, isto é, a subtração.

Quando de um conjunto se retira um de seus subconjuntos, obtém-se o conjunto diferença, entre o conjunto e seu subconjunto. A reunião de conjunto-diferença e do sub-conjunto, restitui o conjunto primitivo do qual se havia partido. É nisto que repousa a operação inversa entre a adição e a subtração.