- Mathematics for Elementary School Teachers

-Capítulo 5:

S U B T R A Ç Ã O   8 - 5 = 3

1. Como podemos explicar a subtração
   a) Pelo uso de conjuntos?
   b) Usando as idéias da adição?
2. O que significa "5 - 3"?

Você já deu a seus alunos exercícios de subtração e pediu que êles tirassem a prova, adicionando? Talvez fôsse um exercício assim:

$$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 19 \\ \hline 27 \end{array}$$

Se o aluno achou que a resposta era 27, êle deveria achar a prova adicionando 27 + 19. Êle procuraria obter 46 se a / resposta ao exercício de subtração estivesse correta.

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 19 \\ \hline 46 \end{array}$$

Isto é, êle adicionaria a resposta (27) ao menor dos números dados (19) e procuraria obter um maior (46).

Evidentemente, a subtração tem alguma relação com a adição. Qual é esta relação? Como deve ser apresentada às crianças? Quais as consequências desta relação? Êste capítulo explicará estas e outras perguntas.

A relação acima mencionada se refere ao verdadeiro/ significado de subtração. Ensinamos às crianças que "sete menos / três é igual a quatro" mas, também, necessitamos ensiná-las porque. Se uma criança diz: "sete menos três é igual a cinco", devemos estar aptos para mostrar-lhe porque está errado. Em outras palavras devemos transmitir às crianças o significado da subtração.

- Explicando a Subtração:

Recordemos brevemente como a adição é geralmente definida nos novos programas de matemática. Primeiro mostra-se aos alunos como encontrar a união de dois conjuntos disjuntos. Mais tarde aprendem que o número de elementos de tal união é chamado soma dos elementos dos dois conjuntos. Da definição, então são deduzidas certas propriedades da adição (tais como a propriedade comutativa).

A subtração poderá ser também baseada em conjuntos, pelo uso da noção de um subconjunto. Entretanto, mesmo quando a subtração é definida em têrmos de conjuntos, ràpidamente se torna aparente o fato de que a subtração está ligada à adição. Dêste modo, o significado da subtração pode ser abordado de duas maneiras:

1. em têrmos de conjuntos

2. em têrmos de adição.

Como ilustração de abordagem através do uso de conjunto, consideremos a seguinte situação: os irmãos de Maria são: Miguel, João, Máximo, Roberto, Luis e Jorge. Designando-se o conjunto de irãos de Maria por A, teremos

$$A = \{\text{Miguel, João, Máximo, Roberto, Luis, Jorge, Emílio}\}$$

Consideremos também o conjunto de irmãos de Maria, cujos nomes dados começando com "M", é designado por B.

$$B = \{\text{Miguel, Máximo}\}$$

Uma vez que todos os elementos do conjunto B são também elementos do conjunto A, dizemos que o conjunto B é um <u>sub - conjunto</u> do conjunto A.

Os irmãos, cujos nomes não começam por "M", formam outro subconjunto de A; chamemos êste conjunto C.

$$C = \{\text{João, Luis, Jorge, Roberto, Emílio}\}$$

Agora, façamos uma pergunta numérica simples, que poderá ser apropriada para os primeiros anos.

Maria tem 7 irmãos, sòmente 2 tem nomes que começam com "M". Quantos irmãos mais tem Maria?

Se o aluno apresenta os conjuntos A, B e C como acima, então para responder a pergunta, poderia dar o conjunto C como o dos irmãos, cujos nomes não começam com "M".

Evidentemente, êste exemplo pode ser analisado por dois pontos de vista.

1. Os conjuntos A e conjunto B são dados.
O conjunto B é subconjunto do conjunto A.
Qual é o subconjunto de A, cujos elementos não / estão em B? Conjunto C.

2. É dado um conjunto de sete elementos e um dos seus subconjuntos consistindo de dois elementos. Quantos elementos do conjunto de sete elementos <u>não</u> estão neste subconjunto de dois elementos? Cinco.

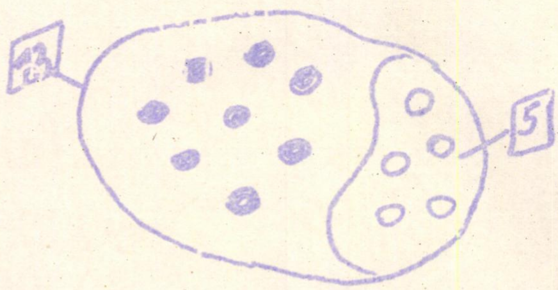
Chamamos êste tipo de problema de <u>subtração</u>. Nêle representamos o número de elementos que <u>não</u> foram dados no subconjunto por "7 - 2" (leia-se "sete menos dois"), e nos referimos a êste número como a "diferença de 7 e 2". Porque esta diferença é 5, escrevemos 7 - 2=5 (as crianças poderão, por exemplo, remover dois / blocos do conjunto de sete blocos e então contar os restantes. Escreveriam 7 - 2, ou 5, para expressarem os resultados). Dizemos que a subtração dá ao par de números 7 e 2 a diferença 7 - 2 ou 5.

Qualquer problema sôbre objetos que "restam" ou são "tirados" ou que "sobram" podem ser resolvidos pela subtração como é indicado aqui.

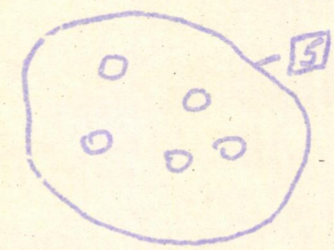
Uma espécie de problema, chamado, muitas vêzes, de "comparação" entram com menos evidência no padrão de subtração. A - qui está um exemplo:

Eugênio tem 13 bolinhas de gude.
Hubert tem 5. Quantas mais tem Eugênio do que / Hubert?

Nesta situação, as 5 bolinhas de Hubert não são um subconjunto das 13 de Eugênio, então teremos que simplesmente pro - curar o conjunto que resta. Mas o processo requerido é obvio (tal - vez não às crianças, porém): Comparamos as 5 de Hubert com 5 das de Eugênio. Então procuramos o subconjunto restante das de Eugênio.



Conjunto de Eugênio



Conjunto de Hubert

O número do conjunto que resta é 13 - 5. Isto nos diz "quantas" bolinhas "mais" tem Eugênio.

Usando-se conjuntos, podemos dar uma definição formal de a - b, a diferença de a e b, no seguinte:

Se A fôr um conjunto que contenha a elementos e B fôr um subconjunto de A que contém b elementos, en - tão a - b é o número do subconjunto de elementos de A que não estão em B.

A diferença a - b não depende da seleção de conjuntos A e B, desde que êstes conjuntos preencham os requisitos especí ficos. Desta definição, aparece uma restrição aos números envolvi - dos em subtração. A definição diz que para que se subtraia b de a , b deverá ser o número de um subconjunto de um conjunto de a elementos. Claro que b não poderá ser maior do que a. Então, expressões/ como 3 - 5, 17 - 18, etc., não têm sentido nêste estágio.

- Conjunto de Exercícios 1:

1. Para cada um dêsses exercícios, responda às perguntas:
   - É B um conjunto de A?
   - Se é, qual é o subconjunto de A composto de e- lementos não em B ?

   a. A= $\{a, e, f, i, j, o, p, u\}$
      B= $\{a, e, i, o, u\}$

   b. A= {vermelho, branco, azul, verde}
      B= {verde}

c. A= $\{$Acre, Minas Gerais, Guanabara, Ceará, Amapá$\}$
B= $\{$Ceará, Amapá$\}$

d. A= $\{x, y, z\}$
B= $\{x, y, 3\}$

e. A= $\{\triangle, \square, \bigcirc\}$
B= $\{\ \}$

2. Para cada exercício acima, escreva uma sentença/ de subtração. A sentença de subtração para a primeira é 8 - 5=3 porque, dado um conjunto de 8 elementos e um subconjunto de 5 elementos, o subconjunto restante tem 3 elementos.

3. Se B é um subconjunto de A, como acima, e se C é o subconjunto de A composto de elementos não em B, então que conjunto é B $\cup$ C?

Até aqui, no desenvolvimento da subtração, não mencionamos a adição. Entretanto, a subtração é muitas vêzes chamada / de "operação inversa" da adição. Porque?

Nos exercícios e texto acima, começamos com um conjunto e subconjunto de um conjunto; então recorremos ao subconjunto restante. No Exercício 1a, o conjunto dado foi:

A= $\{a, e, f, i, j, o, p, u\}$ e o subconjunto era
B= $\{a, e, i, o, u\}$

O conjunto restante encontrado foi:

C= $\{f, j, p\}$

Agora, uma vez que C é um conjunto de elementos de A que não estão em B, o conjunto C e B são disjuntos. Podemos formar a sua união, B $\cup$ C; está claro que B $\cup$ C=A. Isto é:

$$\{f, j, p\} \cup \{a, e, i, o, u\} = \{a, e, f, i, j, o, p, u\}.$$

Tôda a vez que efetuamos a união de dois conjuntos/ disjuntos, temos uma situação de adição. A união acima implica a sentença de adição 3 + 5 = 8

A sentença de subtração no Exercício 1a é 8 - 5 = 3

Então, a adição está por certo relacionada com a subtração.

Mas demonstremos esta relação de modo mais esplícito, voltando aos conjuntos nos exs. 1a:

A= $\{a, e, f, i, j, o, p, u\}$
B= $\{a, e, i, o, u\}$

Em vez de perguntarmos: "Qual é o conjunto de A, cujos elementos não estão em B"? poderemos perguntar: "Qual é o conjunto, disjunto de B, que completará corretamente esta sentença:

B $\cup$ $\square$ =A?

A resposta a cada pergunta é a mesma: $\{f, j, p\}$

Agora, façamos uma pergunta numérica sôbre êste exemplo. Poderíamos perguntar: "Qual é o número de elementos do subconjunto de A, cujos elementos não estão em B". Ou, podemos fazer a pergunta assim: "Qual é o número que adicionado ao 5 dará uma soma de 8?"

Em outras palavras, para se achar a diferença de 8 e 5, poderemos completar a sentença $5 + \square = 8$. Assim a sentença $5 + \square = 8$ tem o mesmo significado que $\square = 8 - 5$.

Os números que são adicionados são chamados adendos. Completar uma sentença como $5 + \square = 8$ pode ser chamado "completar o adendo que falta (ou desconhecido)". Assim, a subtração é, às vêzes, chamada "a operação de se encontrar o adendo que falta". Na adição, procuramos a soma de dois adendos, enquanto que na subtração procuramos um dos adendos de uma soma dada. É por isso que muitas vêzes, a subtração é chamada de inversa da adição.

Se subtração significa o adendo que falta, o que significa 8 - 5? 8 - 5 é o número que, quando adicionado ao 5 dá 8, isto é, 3. Então 8 - 5=3. A diferença 3 pode ser achada completando-se $5 + \square = 8$. Nesta sentença, 5 é, muitas vêzes, chamado de adendo conhecido ou dado, e 8 é chamado a soma. Note-se que a expressão "8 - 5" lida da esquerda para a direita primeiro mostra a soma 8, depois menos, então o adendo dado 5.

Claro que se o adendo dado for maior que a soma desejada, não será possível encontrar-se um adendo que falta, apropriado, entre os números inteiros. Por exemplo: $6 + \square = 2$ e $\square + 9 = 8$ não poderão ser completados com números inteiros. Assim, expressões tais como 2 - 6 e 8 - 9 não têm significado quando se trabalha com o conjunto dos números inteiros.

Dêste modo, somos levados às mesmas restrições vistas na definição de subtração usando-se conjuntos:

O adendo conhecido não pode ser maior do que a soma

(Quando os alunos chegam ao ginásio, entretanto, descobrem que existem números - especialmente os números negativos - que se aplicarão para completar sentenças como $6 + \square = 2$). A abordagem, adendo-que-falta, para a subtração, aplica-se, portanto, para grandes classes de números do que para a abordagem de conjuntos - por exemplo, para uma classe que inclua não sòmente números inteiros mas também números negativos e fracionários.

Agora usamos a idéia de número-que-falta para descrever a subtração como se segue:

A subtração atribue ao par de números inteiros a e b o número que falta na sentença $b + \square = a$

O número-que-falta é nomeado "a - b". A isso, também se chama diferença de a e b. A expressão "a - b" indica um número / inteiro sòmente quando b não é maior que a.

Segue-se que quando completamos uma sentença tal como $\square + 6=19$, nós com efeito, "subtraimos" 6 de 19, e sabemos que o nome para o adendo que falta é "19-6". Daí, pelo nosso conhecimento da adição, $\boxed{13} + 6=19$, obteremos $13=19-6$.

Se introduzimos a subtração através do adendo que falta, não será estritamente necessário que sejam decorados os "fatos da subtração". Por exemplo, se pedirmos à criança que complete/ a sentença $11 - 4= \square$ (isto é, pedimos a subtração de 4 de 11) ela deveria pensar livremente: $11= \square + 4$ ou $11= 4 + \square$ e então completar qualquer das sentenças através do seu conhecimento dos fatos da adição. O adendo que falta, encontrado, é a diferença entre 11 e 4, $11 - 4$. A criança deveria aprender que "onze menos quatro equivale a 7", porque "sete mais quatro iguala onze".

Pode-se agora explicar como a adição pode ser prova da subtração?

- Conjunto de Exercícios 2:

1. Escreva duas sentenças de subtração de cada uma dessas sentenças de adição:

a. $6 + 4= 10$ $\quad$ $6= 10 - 4$ $\quad$ $4= 10 - 6$
b. ....

2. Escreva uma sentença de adição para cada uma dessas sentenças de subtração:

a. $12 - 7 = 5$ $\quad$ $12= 5 + 7$ (ou $12=7 + 5$)
b. $6 - 6 = 0$ $\quad$ ....
c. ....

3. Converta cada uma dessas sentenças de subtração. Então complete as sentenças:
a. $3 + \square =12$ $\quad$ $\boxed{9} = 12 - 3$
b. ....

4. Converta cada uma destas sentenças a uma sentença de adição. Complete ambas as sentenças:
a. $\square =16 - 9$ $\quad$ $9 + \boxed{7}= 16$ (ou $\boxed{7} + 9=16$)
b. ....

Propriedades da Subtração

Nos novos programas de matemática, as crianças não aprendem só a significação da adição e multiplicação mas, também, as propriedades dessas operações matemáticas. Duas das propriedades im portantes da adição e multiplicação são as propriedades associati - va e a comutativa.

-PROPRIEDADES ASSOCIATIVA E COMUTATIVA DA MULTIPLICAÇÃO E ADIÇÃO:

OPERAÇÃO	PROPRIEDADE ASSOCIATIVA	PROPRIEDADE COMUTATIVA
Multiplicação	Para todos os números inteiros a, b e c (a x b) x c=a x(b x c) Exemplo: (3 x 6) x 4 = 3 x (6 x 4)	Para todos os números/ inteiros a e b a x b = b x a Exemplo: 12 x 7 = 7 x 12
Adição	Para todos os números inteiros a, b e c, (a + b) + c = a + (b + c) Exemplo: (3 + 6) + 4= 3 + (6 + 4)	Para todos os números inteiros a e b, a + b = b + a Exemplo: 12 + 7 = 7 + 12

Tem a subtração também essas propriedades? Consideremos dois exemplos:

1. É a subtração comutativa? É 8 - 3 = 3 - 8?

É obvio que 8 - 3 = 5, porque 5 completa corretamente a sentença 3 + ☐ =8. Mas "3 - 8" não é um nome para 5; de fato não é nome para nenhum número inteiro, uma vez que nenhum número inteiro se ajusta à sentença 8 + ☐ =3. Então 8 - 3 ≠ 3 - 8. O símbolo "≠" significa "não é igual a" (Usando-se números negativos, poderemos achar que 3 - 8 é -5, e não 5, então aqui também, 8-3≠3-8).Outros exemplos como êsses, são fáceis de se encontrar mas não são necessários para o nosso objetivo. A subtração seria comutativa sòmente se a - b = b - a assim o fôsse para todos os números inteiros a e b. O exemplo acima mostra que há ao menos uma excepção - isto é, que a - b não iguala a b - a para todos os números inteiros. Mostrando-se que 8 - 3 não é igual a 3 - 8, achamos uma exceção. Então a subtração não é comutativa.

2. É a subtração associativa? Por exemplo:

é 9 - (5 - 3) igual a (9 - 5) - 3?

9 - (5 - 3) = 9 - 2 = 7

Mas (9 - 5) - 3 = 4 - 3 =1

Então 9 - (5 - 3) ≠ (9 - 5) - 3. Esta exceção nos mostra que a subtração não é associativa. (Porque para a subtração/ ser associativa, seria necessário que a - (b - c)=(a - b) - c para todos os números inteiros a, b e c).

- Exercícios Conjunto 3:

1. Inserir "=" ou "≠" onde necessário, em cada círculo:

   a. 3 − 2 ◯ 2 − 3 ....

2. Inserir parêntesis para tornar verdadeira cada / sentença.

   a. 8 − 4 − 1 = 5   b.......   c......

O Papel do zero na Subtração

Sabe-se que o 0 tem papel especial na adição.

PROPRIEDADE DO ZERO NA ADIÇÃO

Para cada número a,

$a + 0 = a$ e $0 + a = a$

Exemplos:

$5 + 0 = 15$

$0 + 16 = 16$

Esta lei especial leva a algums fatos interessantes sôbre o 0 na subtração. Êstes fatos, ainda que apresentados aqui, de maneira mais ou menos abstrata, são melhor comunicados à criança através de exemplos e exercícios.

A propriedade de adição do zero leva a sentenças tais como $5 + 0 = 5$, $0 + 16 = 16$, $0 + 65 = 65$, $2 + 0 = 2$, etc. De cada tipo de sentença de adição acima poderão se formar dois tipos de sentenças de subtração.

$5 + 0 = 5$	leva a	$5 - 5 = 0$	e	$5 - 0 = 5$
$0 + 16 = 16$	leva a	$16 - 16 = 0$	e	$16 - 0 = 16$
$0 + 65 = 65$	leva a	$65 - 65 = 0$	e	$65 - 0 = 65$
$0 + 2 = 2$	leva a	$2 - 2 = 0$	e	$2 - 0 = 2$

Êstes resultados sugerem a possibilidade de generalização:

1. O fato de que $5 - 5 = 0$, $16 - 16 = 0$, etc, sugere / que "qualquer número inteiro subtraido de si mesmo leva a 0".

2. O fato de que $5 - 0 = 5$, $16 - 0 = 16$, etc., sugere que "0 subtraido de qualquer número inteiro leva a êste número inteiro."

Essas generalizações constituem o papel do 0 na subtração; êles podem ser provados com a propriedade de adição do 0.

Para cada número inteiro a
$a - a = 0$

Para cada número inteiro
$a + 0 = a$

Para cada número inteiro a
$a - 0 = a$

Para resumir: Que significa $5 - 3$? $5 - 3$ é o número que completa corretamente a sentença $3 + \square = 5$

Se de uma soma de dois adendos um dos adendos é subtraido, a diferença é o adendo remanecente.

A subtração não é comutativa ou associativa.

Qualquer número subtraido de si mesmo resulta 0.

<u>0</u> subtradio de qualquer número leva ao mesmo número.

"<u>Mudança de Termos" na Subtração</u>

Mesmo depois do significado da subtração estar inteiramente compreendido, ainda permanece o problema de se efetuar / eficientemente o cálculo da subtração. Num problema simples como $11 - 4 = \square$ o adendo que faltar por exemplo $11 = 4 + \square$ pode ser usado, eficientemente, pela criança que conhece os fatos elementares da adição.

Entretanto, em problemas de mesmo pouca complexidade, o uso direto da abordagem adendo que falta, nem sempre é prática. Por exemplo, pode não auxiliar muito o principiante, se êle tentar calcular $46 - 19 = \square$ escrevendo $46 = 19 + \square$

A criança aprende como fracionar êste problema em partes simples que poderão ser usadas com o conhecimento já adquirido. Para conseguir isto, poderá usar um algorítmo de subtração por meio do qual calcula a diferença.

$$\begin{array}{r} 46 \\ -\ 19 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{l} 46 = 40 + 6 = 30 + 16 \\ 19 = 10 + 9 = 10 + 9 \end{array}$$

Poderá usar então a abordagem adendo-que-falta para obter $30 - 10 = 20$, $16 - 9 = 7$; assim sua resposta se torna $20 + 7 = 27$.

Note-se, entretanto, que êste cálculo torna tácito/ uma premissa que é raramente apontada nos textos elementares. O problema original foi: $46 - 19$. Por conveniência, foi expressado primeiro na forma $(30 + 16) - (10 + 9)$

Uma discussão mais detalhada sôbre algoritmos de subração aparecerá num capítulo posterior. Aqui introduzimos brevemente um algoritmo da subtração, para desenvolver uma propriedade importante da subtração.

Entretanto, a resposta foi em verdade calculada como $(30 - 10) + (16 - 9)$

É válido questionar como sabemos que esta "mudança/ de termos" leva ao resultado correto. A resposta está incorporada / na seguinte generalização:

Para todo o número inteiro a, b, c, d, onde $\underline{a}$ não é menor que $\underline{c}$ e $\underline{b}$ não é menor que $\underline{d}$,

$$(a + b) - (c + d) = (a + c) - (b + d)$$

(Incluímos a seguinte prova para as professôras que estiverem interessadas em ver uma).

De acôrdo com a abordagem de adendo-que-falta para a subtração (Veja pg. 72):

Se $a - c = x$, então $a = c + x$ e

Se $b - d = y$, então $b = d + y$

Dessas equações, e pelas propriedades associativa e comutativa da adição, temos:

$$(a + b) = (c + x) + (d + y)$$
$$= (c + d) + (x + y)$$

o que simplesmente significa que $(a + b) - (c + d) = x + y$

Substituindo-se x e y, temos $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$

Esta é a igualdade que procuramos estabelecer. Um caso especial é obtido tornando $d = b$.

$$(a + b) - (a + b) = (a - c) + (b - b)$$
$$= (a - c) + 0$$
$$= (a - c)$$

O resultado é expresso como

$$(a + b) - (c + b) = (a - c)$$

O que simplesmente significa que o resultado de uma subtração é invariavel se o mesmo número é adicionado a ambos os números no problema de subtração.

Por exemplo: $241 - 97 = (421 + 3)$
$= 424 - 100$
$= 324.$