ASSOCIAÇÃO DE EDUCAÇÃO CATÓLICA DO RIO GRANDE DO SUL (AEC/RS)
GRUPO DE ESTUDOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA DE PÔRTO ALEGRE (GEEMPA)

CURSO DE MATEMÁTICA REFORMULADA PARA PROFESSÔRES DE PRIMEIRO ANO PRIMÁRIO

NÚMERO CARDINAL

"Estamos completamente familiarizados com os rostos das pessoas que vivem conosco. Contudo raramente temos perfeita consciência das minúcias das suas feições. Se, ao olhar um rosto que conhecemos bem, notamos com particular atenção seus pormenores, tais como a curva dos lábios ou uma ruga na testa, parece-nos que os estamos vendo pela primeira vez. Então, ao ver êstes traços em que nunca reparamos, temos repentinamente a impressão de que estamos a observar o rosto de um estranho. Poderemos fazer um experiência semelhante com os números que nos são tão familiares na vida quotidiana. Quando utilizamos êstes números, recorremos a certas propriedades que êles possuem. No entanto, estamos de tal modo habituados a estas propriedades que dificilmente temos consciência delas, assim como da maneira como as usamos" . (pág.13 -A Matemática Moderna de I.Adler-1958)

"A pesquisa dos fundamentos da noção de número deu origem, nos últimos anos a grande número de trabalhos, de perspectivas lógicas, matemáticas, filosóficas ou psicológicas. Basta citar os nomes de Hilbert, Tarski, Church, Russel, Piaget, Inhelder. Os resultados dêstes trabalhos vão sendo paulatinamente introduzidos nos sistemas escolares de todo o mundo." (A Matemática Moderna no Ensino Primário - Z.P. Dienes - Paris - pág.13).

Os primeiros números que todos aprendemos a empregar são aquêles de que necessitamos para responder à pergunta: Quantos ?

Detenhamo-nos um pouco nêles.

Quando dois conjuntos podem ser postos em correspondência biunívoca por meio de uma aplicação, dizemos que possuem o mesmo número de elementos ou que têm o mesmo número cardinal. Todos os conjuntos que que têm o mesmo número cardinal podem ser postos em correspondência biunívoca (bijeção) um com cada um dos outros. Formam uma família de conjuntos associada com aquêle número cardinal. Cada número cardinal tem uma família de conjuntos que lhe é própria. Por exemplo: os conjuntos que possuem apenas um objeto pertencem à família de conjuntos associada ao número que denominamos "um". Os conjuntos de pares de objetos pertencem à família de conjuntos associada ao número que chamamos "dois". Os conjuntos de ternos pertencem à família de conjuntos associada ao número "três", etc.

Cada conjunto que correntemente consideramos, pertence a uma destas famílias. Quando nos fazem a pergunta: "Quantos objetos há neste conjunto?" é como se, na realidades, nos perguntassem: "A que família de conjuntos pertence?"

Usamos um método sutil para procurar esta família, que consiste em: estabelecemos uma correspondência biunívoca entre os elementos que contamos e os conjuntos dos nomes dos números pronunciados. O primeiro objeto é pôsto em correspondência com o conjunto formado sòmente pela palavra "um" põem-se em correspondência biunívoca os dois primeiros com o conjunto formado pelas palabras "um", "dois"; põem-se em correspondência biunívoca os três primeiros elementos com um, dois, três e assim sucessivamente. Quando a contagem termina, sabemos que o último nome de número usado é o número cardinal do conjunto de nomes de números que pusemos em correspondência com os elementos que contamos.

Portanto, é também o número cardinal do conjunto cujos elementos contamos. Empregando conjuntos formados dos nomes dos números dispostos por ordem de grandeza, condensamos numa só, tôda uma sucessão de operações de correspondência, para acabar por responder à pergunta: "Quantos ?"

Assim, em todo conjunto de conjuntos pode ser estabelecida uma relação baseada na lei .....possui mesmo número de elementos que...... . Esta relação goza da propriedade reflexiva, pois todo conjunto possui o mesmo número de elementos que êle; é simétrica, pois se A possui o mesmo número de elementos que B, B possui o mesmo números de elemtnso que A, pois se pode também estabelecer uma correspondência biunívoca tendo B como conjunto de partida e A como conjunto de chegada; é transitiva, pois se A possui o mesmo número de elementos que B e B possui o mesmo número de elementos que C, então A possui o mesmo número de elementos que C.

A relação, baseada nesta lei, é de equivalência, porque goza destas 3 propriedades. Se a lei de uma relação de equivalência se refere a um atributo ela gera sub-conjuntos no conjunto onde se aplica e que são caracterizados pelos valôres dêste atributo. No caso em que estamos abordando, o atributo em questão é o número cardinal, a quantidade de elementos. Os valôres do atributo "número cardinal" são o 0, 1, 2, 3, etc.

Dizemos que dois conjuntos que podem ser postos em correspondência biunívoca e que, portanto, possuem o mesmo número de elementos, são equipotentes.

Todo o conjunto equipotente ao conjunto vazio é vazio.

Chama-se "zero" o número cardinal do conjunto vazio e se escreve 0 = N.

Todos os conjuntos unitários são equipotentes; chama-se "um" o número cardinal dos conjuntos unitários.

Assim: 1 = N 0 .

Como os conjuntos unitários não são vazios, $0 \neq 1$ e 0,1 é um conjunto com 2 elementos.

Todos os conjuntos com 2 elementos são equipotentes. Chama-se "dois" o número cardinal dêstes conjuntos. Em particular 2 = N 0,1 .

Os números 0, 1, 2 foram exemplificados pelas fórmulas.

0 = N
1 = N 0
2 = N 0,1

Continuando a litania: 3 = N 0, 1, 2
4 = N 0, 1, 2, 3
5 = N 0, 1, 2, 3, 4
....
28 = N 0, 1, 2, 3, ..., 27
....
1.000.000.000 = N 0, 1,2,3 ...999.999.999

Admite-se sem dificuldade que os números 0, 1, 2, 3 .... são distintos dois a dois.

Êstes números são chamados naturais e com êles formamos um conjunto designado por N.

Chamam-se conjuntos finitos todo o conjunto cujo cardinal é um número natural.

Chama-se conjunto infinito todo o conjunto não finito.

O conjunto N é um conjunto infinito

Ordem no conjunto dos números naturais

Sejam C, B dois conjuntos.

Se N(A) N(B) equivale a dizer que existe uma injecção de A em B. A relação baseada na lei .... é menor que ... fàcilmente se vê que é uma relação de ordem. Para isto é necessário provar que ela é antissimérica e transitiva. (Mathèmatique Moderne - Papy - I Paris - pág. 240).

Analisaremos ainda mais o que é um número cardinal.

Quando nós pronunciamos a palavra "três" ou quando nós escrevemos o símbolo "3", o que temos em nosso espírito ? "3" é o símbolo de um objeto concreto como "maçã" é o símbolo de uma fruta bem real que nós podemos comer, ou é o símbolo de uma abstração como generosidade é o símbolo de uma certa maneira de ser ? É evidente que "3" representa algo mais próximo de generosidade do que de maçã. Dizemos que generosidade é uma qualidade da pessoa, "3" é uma propriedade de um conjunto de objetos. O "3" é o sinal desta propriedade. Propriedade é tomada aqui no sentido de valor de atributo.

Eis aí duas preliminares à noção de número: saber o que é uma propriedade, saber o que é um conjunto. Não se trata, evidentemente, de fazer um curso ex-cathedra, às crianças, sôbre as noções de propriedade e de conjunto, mas convençamo-nos de que as crianças deverão descobrir o que é uma propriedade de um objeto, descobrir que um objeto pode ter várias propriedades e que, algumas vêzes, uma delas será mais importante para nós, enquanto outras são indiferentes; se eu me interesso por crianças loiras, pouco me importa que sejam meninos ou meninas; se eu me interesso por meninas, pouco me importa que sejam loiras ou morenas, etc. A vida é assim repleta de situações em que, numa certa coleção de objetos, certas propriedades dêstes objetos são importantes, outras não.

"As crianças deverão também trabalhar com conjuntos porque o número é uma propriedade de um conjunto" (Des Ensembles à la Decouverte du Nombre - Nicole Picard - Paris - 1966 - pág. 12).

"Ter dois elementos" é uma propriedade de conjuntos que permite distinguir no universo dos conjuntos um certo conjunto conjuntos, a saber o Conjunto dos Conjuntos nos quais cada Elemento-Conjunto consta justamente de dois elementos. Importa insistir que "ter dois elementos" ou apenas "dois" para abreviar, é um valor de atributo de conjuntos e não de elementos dêsses conjuntos. Valôres como "ser rapaz", "ser gordo", ter pele negra", aplicam-se a elementos do universo das criaturas e não ao universo dos conjuntos dos sêres vivos.

Um conjunto de rapazes não é um rapaz; por isso, a propriedade "ser rapaz" não pode aplicar-se a nenhum conjunto de criaturas, mas sim e tão sòmente a uma criatura. Inversamente, ter dois elementos é uma propriedade que não se aplica a uma criatura isolada, mas sim a determinados conjuntos de criaturas isoladas. Não se julgue que se facilitam às crianças quando se escreve (como em certos compêndios):

000 = 3, ou o que é ainda pior = 3

O primeiro membro da equação é um conjunto, ou melhor, um símbolo de conjunto; o segundo membro é uma propriedade do conjunto. Não se pode dizer que uma propriedade seja idêntica àquilo que goze dessa propriedade. A brancura não é idêntica ao objeto branco, o número três não é idêntico a um conjunto de três objetos" (A Matemática Moderna no Ensino Primário - Z.P. Dienes - pág. 28).

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Pôrto Alegre, junho de 1971

Trabalho pesquisado e elaborado pela
Profª ESTHER PILLAR GROSSI