OPERAÇÃO

CONCEITOS

X Operação é todo o movimento que se obtém um resultado, portanto é todo e qualquer trabalho ativo com uma pessoa ou consigo mesmo.

OPERAÇÃO NO CONJUNTO DOS NATURAIS

É uma lei ou regra que permite associar a dois números naturais um terceiro número natural. Os dois números dados chamam-se têrmos e o terceiro número obtido, resultado da operação.

ADIÇÃO

Conceito; fundamentação na reunião; propriedades; tábua; estudo da variação da soma em relação a variação das parcelas.

Consideremos os três conjuntos:

$$A = \{a, b, c\} \qquad B = \{d, e, f\}$$

$$C = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Podemos notar que o conjunto C é constituído por letras que pertencem cada uma delas a A ou a B.

Consideremos, agora, os três conjuntos de números:

$$A = \{1,2,3,4\} \qquad B = \{4,5,6,7\}$$

$$C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

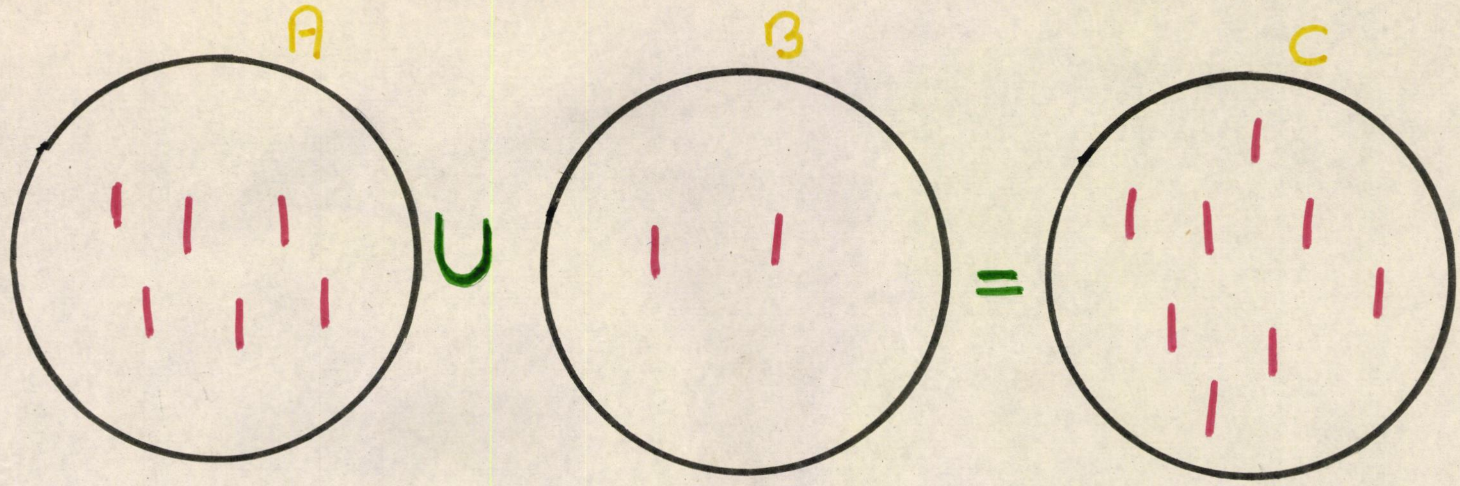
O conjunto C é constituído por números que pertencem, cada um dêles, a A ou a B, havendo até um número, o 4, que pertence ao mesmo tempo aos dois conjuntos A e B.

Em qualquer caso, C chama-se reunião de A e B.

Consideremos dois números inteiros quaisquer, 6 e 2 por exemplo.

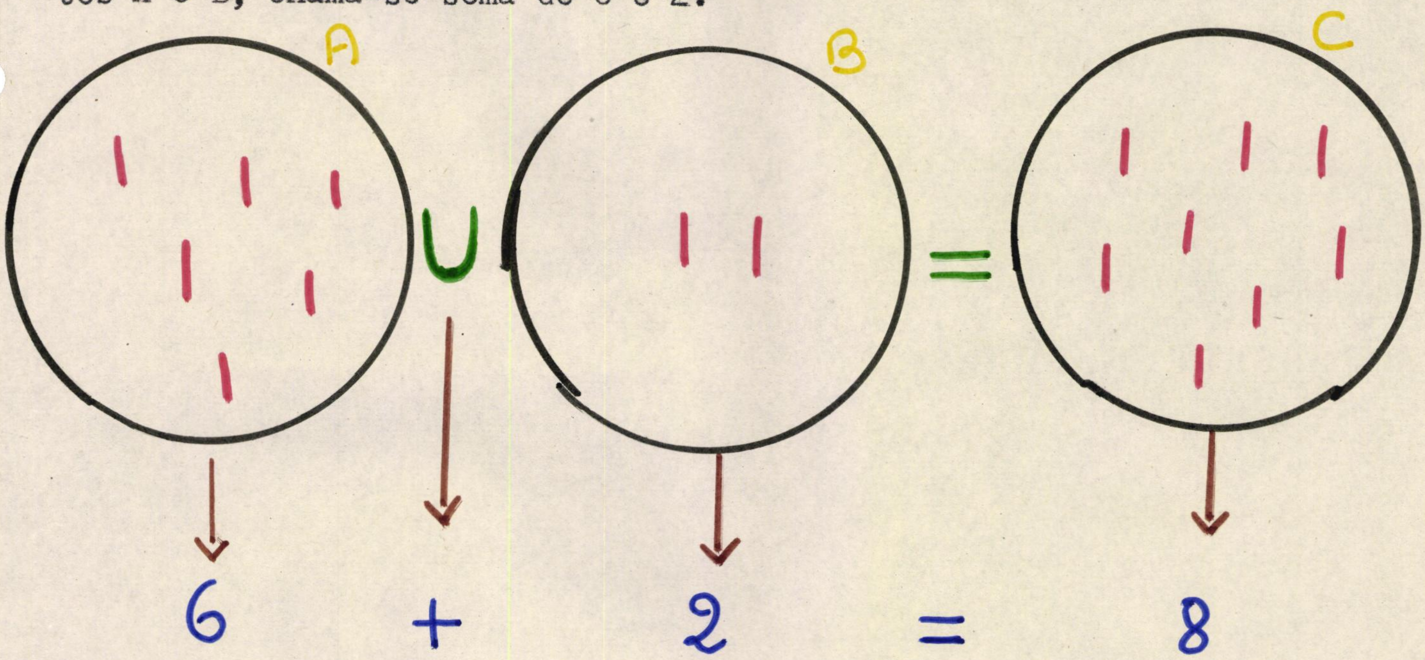
Vamos considerar um conjunto A com 6 elementos e um conjunto B com dois elementos quaiquer (da mesma espécie).

Faltou dar destaque ao fato da adição basear-se na ~~reunião~~ de conjuntos ~~disjuntos~~.



Reunindo os elementos do conjunto A e do conjunto B, formamos um nôvo conjunto, conjunto C. Contando seus elementos ao conjunto C fica associado um número, exatamente o número 8.

O número 8, associado ao conjunto C, reunião dêsses conjuntos A e B, chama-se soma de 6 e 2.



A sentença matemática correspondente a essa união entre conjuntos é:

$$\boxed{6+2=8}$$

que traduz a operação entre os números 6 e 2 e facilita o trabalho de cálculo. Como você está percebendo a adição reúne tôdas as unidades de dois números em um só número. Nessa sentença, temos:

o 6 e o 2 são os têrmos (ou parcelas)

o sinal + (lê-se "mais") é o símbolo da adição

o 8, que é o resultado, diz-se soma ou total.

Concluímos:

A operação que a cada par ordenado de números ~~inteiros~~ naturais faz corresponder a soma do primeiro com o segundo, chama-se adição.

Os números do par ordenado chamam-se têrmos ou parcelas da adição, o resultado da adição chama-se soma.

A adição é uma operação binária, atua sôbre dois números.

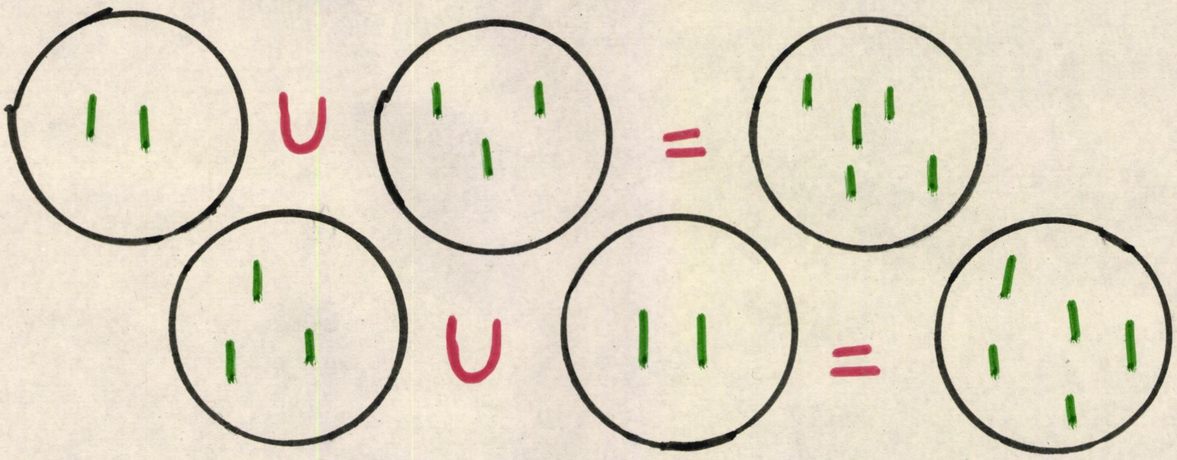
ex: $\underbrace{(3, 5)}_{\text{parcelas}} \xrightarrow[\text{adição}]{+} = \underbrace{8}_{\text{soma}}$

PROPRIEDADES

Podemos notar que as propriedades da adição são resultantes das propriedades conhecidas da reunião.

Começamos pela COMUTATIVA:

A mudança de ordem das parcelas não altera a soma.



Traduzindo para a sentença matemática temos:

$$2 + 3 = 3 + 2$$

De um modo geral temos:

$\boxed{a + b = b + a, \text{ quaisquer que sejam } a \text{ e } b}$

FECHAMENTO :

$3 + 5 = 7$, que é um número inteiro, isto é, $(2 + 7) \in N$

A soma de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

De um modo geral:

$(a + b) \in N$, quaiquer que sejam a e b .

ELEMENTO NEUTRO

Em N existe um número - o zero - chamado ELEMENTO NEUTRO,cuja adição com outro número, em qualquer ordem, dá para soma êsse outro - número.

ex: $5 + 0 = 5$ e $0 + 5 = 5$

De um modo geral:

$a + 0 = 0 + a = a$, qualquer que seja a.

ASSOCIATIVA

A adição de três números inteiros pode ser feita, associando-se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas, indiferentemente:

ex: $(3 + 7) + 10 = 3 + (7 + 10)$

De um modo geral:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, quaisquer que sejam a,b,c.

TÁBUA DA ADIÇÃO

É a tábua que registra os resultados da operação adição,(na base dez) feita no conjunto dos números naturais.

elemento Neutro

+	0	1	2	3	4	5	6 ...
0	0	1	2	3	4	5	6 ...
1	1	2	3	4	5	6	7 ...
2	2	3	4	5	6	7	8 ...
3	3	4	5	6	7	8	9 ...
4	4	5	6	7	8	9	10 ...
5	5	6	7	8	9	10	11 ...
6	.	.	.	.	.	.	. . . .
.	.	.	.	.	.	.	. . . .
.							
.							

ESTUDO DA VARIAÇÃO DA SOMA EM RELAÇÃO A VARIAÇÃO DAS PARCELAS:

1. Somando-se 1 a um número natural qualquer, obtém-se o seu sucessivo ou consecutivo. Logo, o sucessivo de a é a + 1, para qualquer $a \in N$.

2. Se a + 3 = 5 + 3, então a = 5, isto é, para a adição de dois números naturais vale a lei do cancelamento. De um modo geral:

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b$$

Também, se a = 5, então a + 3 = 5 + 3, isto é, somando-se um mesmo número a ambos os membros de uma igualdade, obtém-se uma nova igualdade.

Logo: $a = b \Longrightarrow a + c = b + c$

Reunindo os dois resultados, pode-se escrever:

$$a + c = b + c \Longleftrightarrow a = b$$

3. Se $a < 5$, então $a + 3 < 5 + 3$. Logo: $a < 5 \Longrightarrow a + 3 < 5 + 3$.

Se $a > 5$, então $a + 3 > 5 + 3$. Logo: $a > 5 \Longrightarrow a + 3 > 5 + 3$

Então, somando-se um mesmo número a ambos os membros de uma desigualdade, obtém-se uma outra desigualdade de mesmo sentido.

4. A prova da operação adição baseia-se na aplicação da propriedade comutativa (p. c. a.), por meio da qual se refaz a operação, depois de trocada a ordem das parcelas.

ex:

1.024	89
20.132	20132
89	1024
21.245	21.245

Se as somas forem as mesmas, a adição está certa.

SUBTRAÇÃO

Conceito; fundamentação na complementação dos conjuntos; tábua; verificação das propriedades; possibilidades; princípios.

Quando um subconjunto de objetos é separado de um conjunto, a situação é chamada subtrativa.

Por exemplo, suponhamos que 7 crianças estejam brincando. Se 4 crianças dêste conjunto saírem, a situação é subtrativa e pode ser representada pelos símbolos: 7 - 4

Uma vez que três crianças permaneceram 7 - 4 = 3

Simboliza não apenas a situação inicial e a ação, mas também o resultado. O processo através do qual os símbolos 7 - 4 são substituídos pelo símbolo 3, chama-se subtração.

No exemplo acima, havia, originalmente, um conjunto de tamanho conhecido (7). Depois um subconjunto, também de tamanho conhecido (4), foi retirado dêle.

O conjunto de crianças que permaneceram (3) é o COMPLEMENTAR do conjunto (4), crianças retiradas, no conjunto inicial (7),

Determinar a diferença entre 7 e 5.

A operação feita foi a subtração; 7 e 5 são os têrmos da subtração, o primeiro, 7, é o MINUENDO e o segundo, 5, é o SUBTRAENDO; o resultado da operação, 2, é a diferença.

Para indicar que a diferença entre 7 e 5 é igual a 2, escreve-se: 7 - 5 = 2

A diferença 2 representa exatamente o número que adicionado a 5 dá por soma 7.

De uma maneira geral podemos dizer:

1º) Dados dois números, o primeiro maior ou igual ao segundo chama-se diferença entre o primeiro e o segundo, o terceiro número que adicionado ao segundo dá por soma o primeiro.

Consideremos agora a diferença entre 6 e 1 que é igual a 5, isto é $6 - 1 = 5$, pois $1 + 5 = 6$;

2º) A diferença entre 4 e 4 é igual a 0, isto é, $4 - 4 = 0$, pois $4 + 0 = 4$.

Sòmente existe a diferença entre dois números ~~inteiros~~ naturais, considerados em certa ordem, quando o primeiro fôr $\geqslant$ ao segundo.

Se fôr o primeiro $<$ que o segundo, a diferença não existe

ex: $3 - 8 = ?$

Concluímos:

A operação que a cada par ordenado de números ~~inteiros~~ naturais, com o primeiro $\geqslant$ ao segundo, faz corresponder a diferença entre o primeiro e o segundo, chama-se subtração.

TÁBUA DA SUBTRAÇÃO

Tôda a operação comporta uma tábua operatória. Na tábua da subtração " ? " indica que não existe diferença, sendo os cálculos feitos na base decimal e o primeiro têrmo (minuendo) tomado na primeira coluna vertical.

−	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
0	0	?	?	?	?	?	?	?
1	1	0	?	?	?	?	?	?
2	2	1	0	?	?	?	?	?
3	3	2	1	0	?	?	?	?
4	4	3	2	1	0	?	?	?
5	5	4	3	2	1	0	?	?
6	6	5	4	3	2	1	0	?
7	7	6	5	4	3	2	1	0
⋮								

APLICAÇÃO DO SÍMBOLO DA EQUIVALÊNCIA ENTRE A OPERAÇÃO ADIÇÃO E SUA INVERSA SUBTRAÇÃO:

A operação subtração é inversa da operação adição. Podemos observar melhor êste fato com o exemplo:

$$-\begin{array}{r} 8 \\ \underline{3} \\ 5 \end{array}+ \qquad 8 - 3 = 5 \Longleftrightarrow 5 + 3 = 8$$

onde $\Longleftrightarrow$ indica a equivalência entre as igualdades escritas. De um modo geral pode-se escrever:

$$\boxed{\text{minuendo} - \text{subtraendo} = \text{diferença}} \Leftrightarrow \boxed{\text{diferença} + \text{subtraendo} = \text{minuendo}}$$

A segunda igualdade permite tirar a prova da subtração, isto é, verificar se a operação está certa.

PROPRIEDADES DA SUBTRAÇÃO

a) FECHAMENTO:

Consideremos a diferença de dois números quando o primeiro $\geq$ ao segundo. Se o primeiro $<$ segundo, a diferença não existe:

Assim, $4 - 9 = ?$

Não há um terceiro número que adicionado a 9 dê por soma 4.

E pois: o conjunto N não é fechado em relação a subtração.

b) ELEMENTO NEUTRO

O conjunto N não possui elemento neutro em relação à subtração.

Ex: $8 - 0 = 8$, mas $0 - 8$ não é igual a 8.

c) COMUTATIVA

No conjunto N não vale a propriedade comutativa para a subtração.

Ex: $15 - 10 \neq 10 - 15$

√

d) ASSOCIATIVA

No conjunto N não vale a propriedade associativa para a subtração.

Ex: $(18 - 12) - 3 \neq 18 - (12 - 3)$

Comcluímos, então, que as propriedades estruturais que valem para adição no conjunto N não valem para a subtração.

Na subtração encontramos três idéias:

1ª) IDÉIA SUBTRATIVA: (quanto resta?, Quanto fica?, Quanto sobra?)

Ex: Comprei 10 bolinhas, perdi 4, quantas restam?

2ª) IDÉIA COMPARATIVA: (qual a diferença? quanto a mais? quanto a menos?)

Ex: Paulinho tem 7 anos. José tem 4 anos. Qual a diferença de idade entre os dois meninos?

Fazemos através da correspondência dos elementos dos dois conjuntos.

3ª) IDÉIA ADITIVA : (quanto falta?)

Esta situação se caracteriza pela pergunta: quanto falta?

$3 + \square = 5$

$5 - 3 = \square$

É a complementação de um conjunto menor, para ficar igual a um conjunto maior.

Ex: Eu tenho 4 botões, meu vestido leva 6 botões. Quantos faltam?

MULTIPLICAÇÃO

Conceito; fundamentação no produto cartesiano; tábua; propriedades.

Consideremos dois conjuntos finitos A e B:

A = { m,n,p }   onde n (A) = 3

B = { f, g }   onde n (B) = 2

Formando o Produto Cartesiano dêsses conjuntos, obtemos:

P = A X B = { (m,f), (m,g), (n,f).(n?g ... ,g) }

onde n ...

Con... e

ro natural) de c...

(A

3 ,

Adot...

a que...

mentos dos conjunt...

cartesiano, isto é...

(3,2

onde:

X ou .

6 é o r

De um m

(a,b)

onde os

to.

A multip

bre dois números natur

O trabalho foi feito em conjunto. Liamos, discutíamos e concluíamos.

Concluímos que:

"A operação que a cada par ordenado de números inteiros faz corresponder o produto do primeiro pelo segundo, chama-se multiplicação."

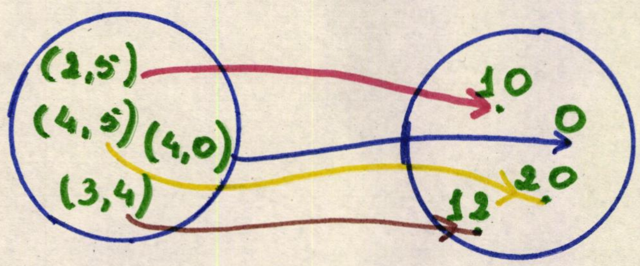
Ex: (2,5) $\longrightarrow$ 10

(4,5) $\longrightarrow$ 20

(3,4) $\longrightarrow$ 12

(4,0) $\longrightarrow$ 0

Em um diagrama teríamos:



TÁBUA DA MULTIPLICAÇÃO

elemento Neutro

x	0	1	2	3	4	5	6	7...
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	8	10	12	14
3	0	3	6	9	12	15	18	21
4	0	4	8	12	16	20	24	28
5	0	5	10	15	20	25	30	35
6	0	6	12	18	24	30	36	42
7	.	.	.	.	.	.	.	.
:	.	.	.	.	.	.	.	.

PROPRIEDADES

A multiplicação no conjunto dos números inteiros naturais N possui as seguintes propriedades estruturais:

1- FECHAMENTO

O produto de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

Ex: $2 \times 5 = 10$, que é um número inteiro, isto é, $(2 \times 5) \in N$

$7 \times 0 = 0$, que é um número, isto é, $(7 \times 0) \in N$.

De um modo geral:

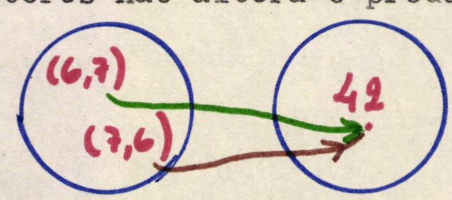
$(a \times b) \in N$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b.

2- COMUTATIVA

A mudança da ordem dos fatôres não altera o produto.

Ex: $6 \times 7 = 7 \times 6$

$8 \times 1 = 1 \times 8$



De um modo geral:

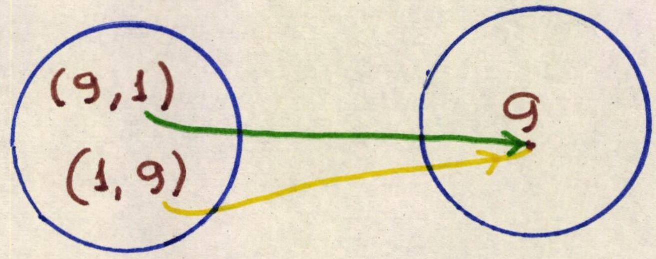
$a \times b = b \times a$, quaisquer que sejam os números inteiros a e b

3- ELEMENTO NEUTRO

Existe um número - o número 1 - que multiplicado por outro, em qualquer ordem, dá por produto êsse outro.

Ex: $9 \times 1 = 9$

$1 \times 9 = 9$



De um modo geral:

$a \times 1 = 1 \times a = a$, qualquer que seja o número inteiro a.

4- ASSOCIATIVA

Numa multiplicação de três fatôres, pode-se associar os dois primeiros ou os dois últimos fatôres, indiferentemente.

Ex: $(2 \times 6) \times 3 = 2 \times (6 \times 3)$

De um modo geral:

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, quaisquer que sejam os números inteiros a,b e c.

5- DISTRIBUTIVA

O produto de um número por uma soma (ou diferença) pode ser obtido, multiplicando-se o número por cada um dos têrmos da soma (ou diferença) e adicionando-se (ou subtraindo-se) os produtos parciais.

Ex: $9 \times (3 + 2) = 9 \times 3 + 9 \times 2$

$4 \times (7 - 1) = 4 \times 7 - 4 \times 1$

De um modo geral:

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, quaisquer que sejam os números inteiros a,b e c.

DIVISÃO

Conceito; divisão exata; fundamentação na partição regular; divisão inexata; divisão partitiva; divisão por medida; possibilidades; tábua; verificação das propriedades; princípios da divisão.

Consideremos dois números naturais, sendo, por exemplo 30 o primeiro dêles e 6 o segundo.

A operação que permite achar um terceiro número natural que multiplicado pelo segundo, dê para resultado o primeiro é denominada divisão (exata).

Indicamos a divisão pelo sinal : (lê-se dividido por) e o terceiro número , resultado da operação, é chamado quociente (exato).

Representando êsse quociente por Δ , temos :

$30 : 6 = \Delta$ tal que $\Delta \times 6 = 30$.

Como 5 é o único número natural que, multiplicado por 6, resulta 30, concluímos que $\Delta = 5$.

Logo:

$30 : 6 = 5 \Longleftrightarrow 5 \times 6 = 30$ e, por isso a divisão é considerada operação inversa da multiplicação.

Consideremos agora os seguintes conjuntos:

1- D = {alunos do curso de matemática moderna 4º período}

A = {alunas da turma 741}

B = {alunas da turma 742}

C = {alunas da turma 743}

$A \neq \emptyset$ $\qquad A \cap B = \emptyset$

$B \neq \emptyset$ $\qquad A \cap C = \emptyset$

$C \neq \emptyset$ $\qquad B \cap C = \emptyset$

$A \cup B \cup C = D$

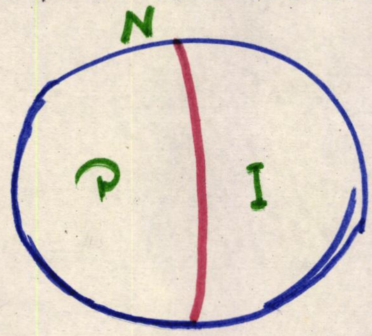
$\{A, B, C\} \longrightarrow$ partição de D

2- $N = \{\text{números naturais}\}$

$P = \{\text{naturais pares}\}$

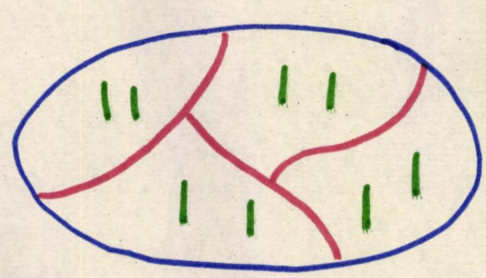
$I = \{\text{naturais ímpares}\}$

Dividimos o conjunto Universo (N), dos naturais, em dois subconjuntos (P) e (I). De onde resultou:



Retomando as partes do conjunto N, ou seja (P e I) temos novamente (N).

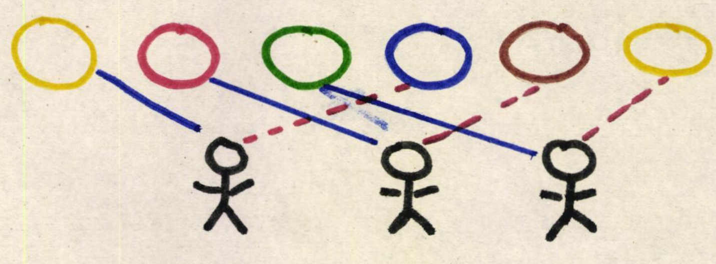
3- Consideremos agora o seguinte conjunto demonstrado em diagrama:



O conjunto de 8 elementos, separados em classes de dois elementos, cada uma, resultou em 4 classes equivalentes ou seja:

$8 : 2 = 4$

4- Dividir 6 balões entre três crianças:



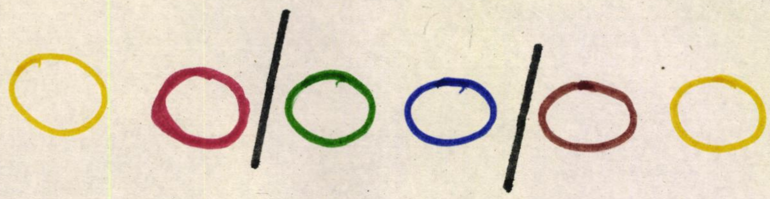
Distribuímos inicialmente um balão para cada criança, restaram 3 balões, que serão novamente divididos entre as três crianças.

Logo cada criança recebeu dois balões.

Traduzindo êste exemplo para sentença matemática, temos que

$$6 : 3 = 2$$

5- No exemplo acima, podemos também distribuir os balões da seguinte maneira:



Dois balões para cada criança.

A divisão (exata), assim como a subtração, nem sempre é possível com dois números naturais quaisquer. É necessário que o primeiro número seja múltiplo do segundo, que por sua vez é diferente de zero, para existir o quociente (exato) entre êles.

Não é possível dividir um número por zero!

De um modo geral:

Ao par de números naturais (a,b), com a múltiplo de b e $b \neq 0$, a operação divisão (inversa da multiplicação) faz corresponder um número natural q, denominado quociente.

$(a,b) \longrightarrow a : b = q$ porque $q \times b = a$

a e b são os têrmos da divisão e se chamam respectivamente a, dividendo, e b, divisor.

q é o resultado da operação e se denomina quociente (exato)

$(12,4) \longrightarrow 12:4=3$ porque $3 \times 4 = 12$

$(8,8) \longrightarrow 8 : 8 = 1$ porque $1 \times 8 = 8$

Concluímos:

$$\boxed{a : b = q} \iff \boxed{q \times b = a}$$

$$\boxed{\text{dividendo : divisor = quociente}} \iff \boxed{\text{quociente x divisor = dividendo}}$$

CASOS PARTICULARES

1º- Se o dividendo é zero, então o quociente é zero.

Ex: 0 : 5 = 0 porque 0 x 5 = 0

2º- Se o dividendo e o divisor são iguais entre si, então o quociente é igual a 1.

Ex: 9 : 9 = 1 porque 1 x 9 = 9

3º- Se o divisor é igual a 1, então o quociente é igual ao dividendo.

Ex: 9 : 1 = 9 porque 9 x 1 = 9

TÁBUA DA DIVISÃO

elemento impossível

:	0	1	2	3	4	5	6	7	...
0	?	0	0	0	0	0	0	0	.
1	?	1	?	?	?	?	?	?	.
2	?	2	1	?	?	?	?	?	.
3	?	3	?	1	?	?	?	?	.
4	?	4	2	?	1	?	?	?	.
5	?	5	?	?	?	1	?	?	.
6	?	6	3	2	?	?	1	?	.
7	?	7	?	?	?	?	?	?	1
⋮									

PROPRIEDADES

Podemos verificar que a divisão (exata), como a subtração

1) não possui propriedade de FECHAMENTO

ex: 8 : 5 = ?

2) não possui a propriedade COMUTATIVA

ex: 4 : 2 = 2 2 : 4 = ?

3) não possui ELEMENTO NEUTRO

ex: 4 : 1 = 4 1 : 4 = ?

4) não possui a propriedade ASSOCIATIVA

ex: (18 : 6) : 3 ou 18 : (6 : 3)

Já estudamos que a operação divisão - inversa da multiplicação - só era possível no caso de o dividendo ser múltiplo do divisor.

Contudo, podemos entender a noçao de divisão, estudando as divisões por aproximação que permitem interpretar problemas de vida prática.

Ex: Queremos repartir 53 figurinhas por 6 colegas.

Quantas receberá cada um?

Não é possível encontrar-se um número inteiro que, multiplicado por 6, dê 53, pois:

$8 \times 6 = 48$ $<$ que 53

$9 \times 6 = 54$ $>$ que 53

Se dermos 8 figurinhas a cada um , sobrarão 5 (53 - 48 = 5) e, dando 9, faltará 1 (54 - 53 = 1).

Nestas condições, só cabe resolver o problema por aproximação, uma vez que o "quociente" procurado não é nem o número inteiro 8 nem o número inteiro 9.

O número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa 53, é denominado quociente aproximado por falta, a menos de uma unidade, porque o êrro que se comete, quando se toma o número 8 como quociente, é menor que uma unidade.

Da mesma forma, o 9 é o quociente aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Para nossas aplicações, quando se fizer necessária a divisão aproximada, escolheremos o quociente aproximado por falta.

Daí a definição:

Divisão aproximada (por falta) de um número inteiro por outro (diferente de zero), dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado maior que o primeiro.

Os números dados continuam recebendo os nomes de dividendo (o primeiro) e divisor (o segundo).

Chama-se resto de uma divisão aproximada (por falta) a diferença entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado.

Ex: DIVIDENDO | DIVISOR

QUOCIENTE (aproximado)

RESTO

De um modo geral:

dividendo = quociente x divisor + resto

que é a relação fundamental entre o dividendo, o quociente, o divisor e o resto, para as divisões aproximadas.

É importante lembrarmos que nas divisões aproximadas o resto é sempre menor que o divisor.

Indicamos o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, respectivamente, pelas letras D,d,q,r temos:

$$\boxed{D = q \times d + r}$$

?

onde r d .

BIBLIOGRAFIA

Castrucci

Papy

Sangiorgi, Matemática Curso Moderno

Norma Cunha Osório
Rizza de Araújo Pôrto — Matemática na escola primária moderna

Lydia Condé Lamparelli, Matemática para o ginásio

Charles H D'Augustine, Métodos modernos para o ensino da matemática.

Cadernos de aula.

B $\rightarrow$ A

Conceito:

Componentes do grupo:

Lara Rocca Valladares

Nancy Ferreira Garcia

Vera Regina Schmeider Berend

Walkiria Rebrutto Liveri

Nivel A