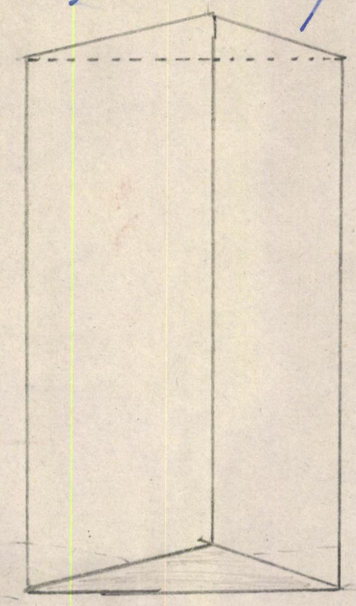
Anotações da profª Liba.



Teoria dos Grupos — Teoria das Funções

Teoria dos Conjuntos

ANOTAÇÕES DAS AULAS DO PROFESSOR ANTÔNIO RIBEIRO, em novembro de 1962, SÔBRE A

INTRODUÇÃO À TEORIA DOS CONJUNTOS

<u>Teorias fundamentais da matemática contemporânea</u>
- 1 - Grupos
- 2 - Funções
- 3 - Conjuntos

Teoria de Conjuntos

Criador: Jorge Cantor (1845 - 1918); nascido na Rússia; formação germânica.

Têrmos usados equivalentes a Conjunto: classe, coleção, agregado, agrupamento, campo.

**Conceito:**

- é uma entidade primitiva, isto é, não é definida à base de outros conceitos matemáticos
- é formado de elementos suscetíveis de possuirem uma ou mais de uma propriedade~~s~~ em comum
- independe da natureza de seus elementos

**Caracterização de um Conjunto:**

1º critério - apresentação individualizada de seus elementos

2º critério (de pertinência) - formulação de uma proposição por meio da qual se verifica se um elemento pertence ou não ao Conjunto

Simbolização - introdução por Peano

Seja: C = conjunto
a = elemento do C
b = " que não pertence a C

$\boxed{a \in C}$ a pertence a C

$\boxed{b \notin C}$ b não pertence a C

**Conjunto**
**na**
**Teoria dos Números**

Exercício nº 1

1º - Conjunto dos números naturais

Atividades operacionais $\longrightarrow$ causa da ampliação dêste campo.

| Operações - diretas | inversas |
|---|---|
| adição | subtração |
| multiplicação | divisão |
| potenciação | radicação |
| | logaritmação |

Subtração - 3 situações:

$$a - b = c \begin{cases} a > b \\ a = b \\ a < b \end{cases}$$

Com a situação a = b, surgiu o <u>zero</u>

<u>campo dos números inteiros absolutos</u>

Com a situação $a < b$, surgiu o

<u>campo dos números inteiros relativos</u>

Com a divisão, surgiu o

<u>campo dos números fracionários</u>

Com a radiciação, surgiu o

<u>campo dos números irracionais</u>

Com a radiciação de números negativos, surgiu o

<u>campo dos números complexos.</u>

- Números complexos
  - pròpriamente ditos
    - Complexos binários - pares
    - " ternários - ternos
    - " quaternos - quatro
  - reais
    - racionais
      - inteiros
        - abs.
          - Nº nat.
          - zero
        - rel.
          - pos.
          - rel.
      - fracion.
        - abs.
        - rel.
    - irracionais

Exercício nº 2

<u>Teoria dos polinômios</u>

Seja

$C_1$ = conj. de todos polinômios da forma - $a_0 x + a_1$

onde x é uma variável e $a_0$, $a_1$ são - coeficientes.

$C_2$ = conj. de todos polinômios, da forma - $a_0x^2+a_1x+a_2$ - onde x é uma variável e $a_0$, $a_1$, $a_2$ - são coeficientes

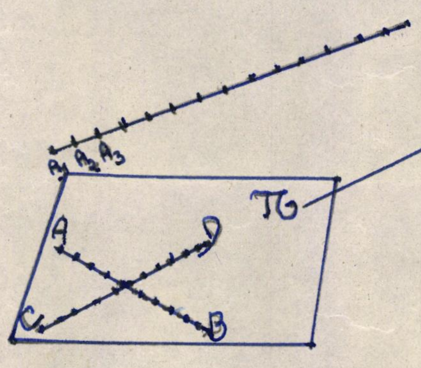
$C_3$ = conj. de todos polinômios, da forma, - $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ onde x é uma variável e $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ - são coeficientes.

$C_n$ = conj. de todos polinômios, da forma, - $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots a_{n-1}+a_n$ onde x é uma variável e $a_0$, $a_1$, $a_2$,...$a_{n-1}$, $a_n$, - são coeficientes.

E seja

$C = (C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots)$ - é um conjunto, cujos elementos são conjuntos.

Exercício nº 3




<u>Geometria elementar</u>

Linha reta - é um conjunto de pontos

Plano π é um conjunto de pontos . Se considerar conjuntos de pontos sôbre as retas $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ do plano π , posso dizer: plano π é um conjunto de / conjuntos.

Exercício nº 4

<u>Conjuntos obtidos na Álgebra das Classes de Congruências</u>

Classes de congruência à módulo <u>n</u> são conjuntos de números inteiros que, divididos por <u>n</u>, deixam restos iguais.

$M_2$:

$C_0 = (0, 2, 4, 6, \dots m.2, \dots)$

$C_1 = (1, 3, 5, 7, \dots m.2+1, \dots)$

$M_3$:

$C_0 = (0, 3, 6, 9, \dots m.3, \dots)$

$C_1 = (1, 4, 7, 10, \dots m.3+1, \dots)$

$C_2 = (2, 5, 8, 11, \dots m.3+2, \dots)$

## Operações com classes de congruência, à módulo n.

$$C\,M_n \begin{cases} C_o = \text{infinidade de elementos} \\ C_1 = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ C_2 = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n-1} = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ C_n = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases}$$

O conjunto $M_n$ é constituído por n conjuntos, formados de uma infinidade de elementos, cada um.

Adição é a ação que se realiza entre 2 classes de mesmo módulo, para gerar a classe soma.

Multiplicação é a ação que se realiza entre 2 classes de mesmo módulo, para gerar a classe produto.

Sejam

$\alpha \in C_a$

$\beta \in C_b$

A classe que contiver $\alpha + \beta \in C_s = C_a + C_b$

" " " " $\alpha \times \beta \in C_p = C_a \times C_b$

## Operações entre classes e suas propriedades

$$M2 = 2 \begin{cases} C_o - (0,\ 2,\ 4,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2a,\ \ldots) \\ C_1 - (1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ 2a+1,\ \ldots) \end{cases}$$

Adição

| + | $C_o$ | $C_1$ |
|---|---|---|
| $C_o$ | $C_o$ | $C_1$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_o$ |

Multiplicação

| x | $C_o$ | $C_1$ |
|---|---|---|
| $C_o$ | $C_o$ | $C_o$ |
| $C_1$ | $C_o$ | $C_1$ |

17-11-1961

As operações adição e multiplicação possuem a propriedade **comutativa.**

Operação binária é a que atua com pares de elementos de um conjunto.

Se numa operação binária entre elementos do conjunto C, o resultado fôr um dos elementos, o outro será **elemento neutro.**

Elemento neutro
- face à adição
- face à multiplicação

- face à operação aditiva, o elemento neutro recebe o nome de **ZERO** ou elemento nulo.
- face à operação multiplicativa, o elemento neutro recebe a denominação específica de elemento **UNIDADE.**

**Exemplo**

Classes de congruência à M = 6

M = 6

$C_0 = (0, 6, 12, \ldots\ldots m.6, \ldots)$

$C_1 = (1, 7, 13, \ldots\ldots m.\ 6+1, \ldots)$

$C_2 = (2, 8, 14, \ldots\ldots m.\ 6+2, \ldots)$

$C_3 = (3, 9, 15, \ldots\ldots m.\ 6+3, \ldots)$

$C_4 = (4, 10, 16, \ldots\ldots m.\ 6+4, \ldots)$

$C_5 = (5, 11, 17, \ldots\ldots m.\ 6+5, \ldots)$

Operação: adição

| + | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
| $C_1$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ |
| $C_2$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ |
| $C_3$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ |
| $C_4$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
| $C_5$ | $C_5$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |

Operação: multiplicação

| x | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ | $C_0$ |
| $C_1$ | $C_0$ | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
| $C_2$ | $C_0$ | $C_2$ | $C_4$ | $C_0$ | $C_2$ | $C_4$ |
| $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ | $C_0$ | $C_3$ |
| $C_4$ | $C_0$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_0$ | $C_4$ | $C_2$ |
| $C_5$ | $C_0$ | $C_5$ | $C_4$ | $C_3$ | $C_2$ | $C_1$ |

Zero ou elemento nulo é $C_0$ - <u>elemento neutro</u> , na operação adição.

Elemento unidade $C_1$ - elemento neutro, na operação multiplicação.

$$\boxed{C_2 \times C_3 = C_0}$$

Os fatôres não são nulos, mas o produto é nulo. - A nulidade do produto não implica em um fator ser zero.

**<u>Conjunto</u> <u>vazio</u> - é um conjunto caracterizado por um critério de pertinência tal, que nenhum elemento satisfaz.**

Simbolismo: conjunto vazio = $\emptyset$

Exercício nº 1:

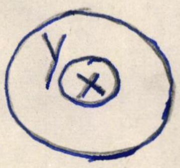
Conjunto de capitais brasileiros, cuja letra inicial de seu nome seja X.

Exercício nº 2:

$$C = (x \in I \mid 2x - 1 = 0)$$

**O papel do conjunto vazio na Teoria dos Conjuntos é semelhante a do nº zero na Teoria dos Números.**

<u>Subconjunto</u>




**Dizemos que o Cx é uma parte do Cy ou que x está contido em y ou ainda que x é um subconjunto de y, se todos elementos de x pertencerem a y.**

**O símbolo Cx indica complementar de x.**

<u>Relação de inclusão</u>: $\boxed{x \subset y}$

$\boxed{A \not\subset B} \rightarrow$ A <u>não</u> está contido em B

A " é um subconjunto de B

<u>Propriedades da Relação de inclusão</u>

1 - Se $x \subset y$ e $y \subset z \rightarrow x \subset z$

2 - Se $x \subset y$ e $y \subset x \rightarrow x = y$

Exemplo

$N \subset I$
$Q \subset R$
$R \subset C$
$N \subset I$ e $I \subset Q \rightarrow N \subset Q$
$N \subset I \subset Q \subset R \subset C$
$\emptyset \subset C$

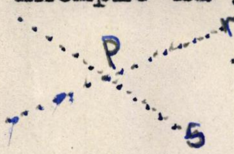
## INTERSEÇÃO DE CONJUNTOS

Vamos supor A e B - dois subconjuntos do conjunto S.

Relação de inclusão $A \subset S$, $B \subset S$

**Elemento comum** aos conjuntos A e B é um elemento x - que pertence a ambos: $x \in A$ e $x \in B$

Exemplo na geometria elementar:




- o ponto P é comum às retas r e s

Simbolismo: $A \cap B$

Diagrama de Venn

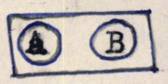

$A \cap B$

Spamer - $A \cap B = (x \in S \mid x \in B)$

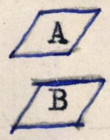
**Disjuntos**

Se não houver elementos em $A \cap B$, dizemos que $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A e B são disjuntos.

Exemplo nº 1:




Exemplo nº 2: - 2 planos paralelos




$A \cap B = \emptyset$

Exemplo nº 3: $Q \cap NQ = \emptyset$

Exemplo nº 4: $Ip \cap I; = \emptyset$ (inteiros pares Ip)

( " ímpares I;)

Exemplo nº 5:

A interseção de 2 conjuntos pode ser um dêles.

$Q \cap I = I$


= Q

Exemplo nº = 6:

Quase sempre a interseção de 2 superfícies é uma curva

$\pi \cap \sigma$ pode ser
- uma circunferência
- um ponto (se o plano fôr tg.)
- vazio (se o plano fôr externo)

Plano sup. esférica

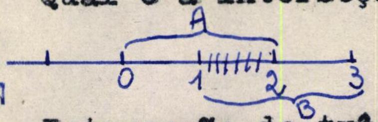
Exemplo nº 7:

No conjunto R = números reais, caracterizar os subconjuntos A e B.

$A = (a \in R \mid 0 < a < 2)$

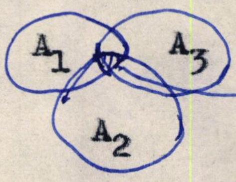
$B = (b \in R \mid 1 < b < 3)$

Qual é a interseção




$A \cap B = (x \in R \mid 1 < x < 2)$

Interseção de três e mais conjuntos :



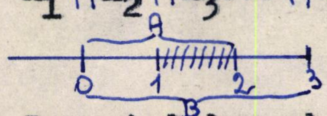

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$ é o conjunto de elementos comuns aos três

Se tivermos n conjuntos

$A_1\ A_2\ A_3 \dots A_n$, todos subconjuntos de S;

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n$ será, por definição o conjunto de elementos comuns a todos.

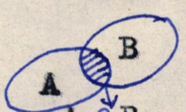
$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$




21-11-961

<u>Propriedades</u> da operação pela qual procuro o conjunto interseção.

1 - Propriedade comutativa.




$A \cap B$
ou
$B \cap A$

A interseção independe da ordem com que trabalhamos:

$$A \cap B = B \cap A$$

2 - Propriedade associativa.

Vamos supor 3 subconjuntos de S

$A \subset S$
$B \subset S$
$C \subset S$

$(A \cap B)$ conj. de el. comum a A, B, C

$C = A \cap (B \cap C)$ conj. de elementos comuns a A, B, C.

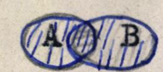
portanto, a operação é associativa.

**<u>Reunião</u>**

**Definições:**

1 - Reunião de dois conjuntos A e B, ambos subconjuntos de S, é o conjunto constituído pelos elementos comuns e não comuns a A e B.

Simbolismo $A \cup B$

Diagrama 


Exemplo C I

C F $\Big\rangle$ $I \cup F = Q$

2 - L. Nachlein

Reunião de 2 conjuntos A e B é representado por $A \cup B$ é a coleção de elementos que pertençam, pelo menos a um dos conjuntos A ou B.