CONJUNTOS E NÚMEROS

– Trabalho apresentado pelo
PROF. ELDER GISLER DOS SANTOS –
à Associação Estadual de Professôres e Pesquisadores de Matemática.

Os procedimentos quantitativos básicos das ciências, envolvem contagem e medição.

Contagem caracteriza uma coleção ou conjunto de objetos.

Medida atribue um número a alguma propriedade de um objeto.

Contagem e medição estão longe de serem conceitos simples, como a noção de conjunto, e cada qual tem sido o objeto de muitos estudos no campo da metodologia científica.

O importante para nós no presente estudo é o fato de que contagem e medição lida com números, e através do uso de números e conjuntos é possível penetrar-se muito dentro dos mistérios da natureza.

Iniciaremos com um breve estudo sôbre conjuntos, classificando vários tipos de números e introduzindo algumas operações e noções básicas de número e conjunto, os quais são fundamentais nos campos da matemática e demais ciências.

CONJUNTOS E NOTAÇÕES BÁSICAS

A noção básica de conjunto, cuja importância na matemática foi primeiro considerada por Georg Cantor (1845-1918), é tão fundamental para os diferentes ramos da matemática que é impossível dar uma definição precisa em têrmos de conceitos básicos mais elementares

No entanto êsse conceito está tão intimamente embebido em nossa intuição que teremos que contar com nossas experiências para considerar a noção de conjunto.

Podemos pensar um conjunto como uma coleção de objetos de qualquer espécie.

Por exemplo: podemos considerar como conjuntos:

a) o conjunto das notas musicais;
b) o conjunto de inteiros positivos menores que 8;
c) o conjunto de todos os estados do Brasil com população inferior a 10 000 habitantes;
d) o conjunto de tôdas as retas que passam por um ponto dado;
e) o conjunto de todos os pontos que estão sôbre uma linha dada;
f) o conjunto de todos os fosseis da terra;
g) o conjunto das letras da palavra INDEPENDENCIA;

Se um objeto pertence ao conjunto, êle é chamado um membro ou elemento do conjunto, mas se o objeto não pertence ao conjunto, êle não é um elemento do conjunto.

Para indicar que um objeto pertence ao conjunto usamos o símbolo $\in$.

Letras maiúsculas são usualmente utilizadas para designar conjunto, e letras minúsculas para designar seus elementos.

Assim, se a e um elemento e A é um conjunto, escrevemos $a \in A$ como uma abreviação de " a é um elemento do conjunto A" ou " a pertence a A ". Se desejmaos indicar que a não é um elemento de A, escrevemos $a \notin A$ (a não pertence a A).

Como vemos dos exemplos, existem muitos conjuntos diferentes, assim como de diferentes tamanhos.

Os exemplos a), b), c), f), g), são <u>finitos</u>, enquanto que os exemplos d), e) são <u>infinitos</u>.

Em geral, dizemos que um conjunto tem um número finito de elementos se pudermos enumerar os elementos do conjunto numa certa ordem e logo contá-los até que um último seja alcançado.

Um conjunto é chamado FINITO se possue um número finito de elementos, em caso contrário é chamado INFINITO.

Note que o número de elementos no exemplo g) é 7 apesar de haver 13 letras na palavra INDEPENDENCIA.

Assim, o número de elementos neste exemplo e em a) e b) é o mesmo. No exemplo c) o conjunto não possue elementos.

Um conjunto tal como em f) deve ser finito apesar de ser muito grande (possuir muitos elementos).

A ordem de enumeração dos elementos não afeta o conjunto em si.

O uso de conjuntos na matemática elementar é util para a clareza de certas idéias, na simplificação de certos conceitos complicados, e ainda na unificação do estudo de diferentes conceitos que se relacionam entre si.

Com isto em mente, introduziremos os dois métodos mais comuns para definir um conjunto, por compreensão e por extensão.

POR EXTENSÃO - Indicamos um conjunto enumerando seus elementos e colocando-os entre chaves.

POR COMPREENSÃO - Indicamos um conjuntos colocando dentro de chaves uma frase descritiva, e acrescentando que todos os objetos e somente êsses, os quais possuem a propriedade descrita são elementos do conjunto.

<u>EXEMPLOS:</u>

1.- o conjunto $A = \{a, e, i, o, u\}$ define o conjunto A de vogais de nosso alfabeto.

Isto pode ser escrito :

$$A = \{X, \text{ tal que } X \text{ é uma vogal do nosso alfabeto}\}$$

(Note-se que neste exemplo "X" é usado como um símbolo para um elemento arbitrário do conjunto, não como uma letra do alfabeto).

Uma outra notação mais abreviada é:

$$A = \{X;\ X \text{ é uma vogal de nosso alfabeto}\}$$

(o ponto e vírgula lê-se " tal que ")

2.- Se lembrarmos que um inteiro par é qualquer inteiro que seja divisivel por 2, o conjunto:

$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ pode tambem ser escrito:

$$B = \{X;\ X \text{ é um inteiro positivo par} < 12\}$$

3.- NÃO É POSSIVEL escrever o conjunto:

$M = \{X;X \text{ é uma fração positiva entre 1 e 2}\}$ por extensão.

4. - NÃO È POSSIVEL escrever o conjunto:

$$D = \{ \text{seu cão, a terra, Pedro, Maria, a ilusão} \}$$

por COMPREENSÃO.

Em qualquer estudo de conjunto, um dos requisitos básicos é a possibilidade de comparar os tamanhos de diferentes coleções de objetos. Isto é realizado por um dos grandes conceitos fundamentais da matemática, o da " correspondência bi-unívoca".

<u>DEFINIÇÃO</u> - Uma correspondência BI-UNÍVOCA existe entre dois conjuntos A e B se é possivel associar os elemtnos de A com os elementos de B de modo tal que cada elemento de cada conjunto é associado com um elemento do outro.

Por exemplo, um homem normal pode associar dedos das / mãos com os dedos dos pés de modo que cada dedo das mãos é associado uma só vez com um dedo dos pés.

Nos exemplos acima uma correspondência bi-unívoca existe entre os conjuntos A e B, B e D ou D e A.

Em tais casos dizemos que os dois conjuntos têm o <u>mesmo tamanho</u>, apesar disso desejamos tornar claro que êles não são iguais.

DEFINIÇÃO - Dois conjuntos A e B são ditos iguais se cada elemento de A é um elemento de B e cada elemento de B é um elemento de A, e escrevemos: A=B

DEFINIÇÃO - Dois conjuntos Ae B são do <u>mesmo tamanho</u> se existe uma correspondência bi-unívoca entre seus elementos.

<u>S U B C O N J U N T O S</u>

Cada vogal é, naturalmente, uma letra do alfabeto; se chamarmos V o conjunto de tôdas as letras do alfabeto, o conjunto A está incluido no conjunto V.

Semelhantemente, o conjunto B, ao que nos referimos no parágrafo anterior, está incluido no conjunto de todos os números pares.

<u>DEFINIÇÃO</u> - O conjunto A é um cobconjunto do conjunto B se cada elemento de A é um elemento de B. Se B tem elementos que não são elementos de A, então A é um subconjunto próprio de B.

Já que êste conceito é usado frequentemente, é conveniente anotá-lo simbòlicamente por $A \subset B$, o qual lê-se " A é subconjunto de B" ou " A está contido em B.

Assim, $A \subset B$ se e sòmente se $X \in A$ implica $X \in B$

Note-se que qualquer conjunto pode ser considerado como um subconjunto de si mesmo, isto é, para todo A, $A \subset A$.

Retornemos ao conjunto $V = \{ X ; X \text{ é uma letra do alfabeto} \}$

Observamos que A é um subconjunto de V.

Se $C = \{ X ; X \text{ é um consoante} \}$, C é também um subconjunto de V.

Em nossa discussão o conjunto V é um conjunto que contém todos os elementos com os quais vamos trabalhar, e em tôda discussão êle permanecerá fixo.

Um tal conjunto fixo em qualquer discussão é chamado " CONJUNTO UNIVERSAL " e é sempre anotado por U.

Naturalmente, diferentes conjuntos universais podem ser usados para diferentes considerações.

Numa discussão, U pode ser o conjunto de todos os números reais, noutra, o conjunto de todos os pontos de um plano, etc.

No primeiro grau de aritmética, U é o conjunto dos números naturais.

DEFINIÇÃO - O conjunto universal numa discussão é a totalidade de membros considerados como elementos de qualquer conjunto.

Nenhum elementos de A será um elemento de C, e vice-versa. Conjunto relacionados dessa maneira ocorrem frequentemente, e dizemos que êstes conjuntos são DISJUNTOS.

Os conjuntos B e M dos exemplos 2 e 3 do parágrafo anterior forma outra exemplo de conjuntos disjuntos.

DEFINIÇÃO - Dois conjuntos A e B, são disjuntos se e sòmente se A e B não têm elementos comuns.

Exsite um conjunto de importância especial: O conjunto VAZIO ou conjunto NULO, anotado por ϕ, é o conjunto que em qualquer discussão não possue elementos.

Por exemplo, o conjunto de todos os elementos comuns a A e C é o ϕ.

Semelhantemente, o conjunto dos números naturais os quais são quadrados perfeitos e terminam em 7 é ϕ.

A afirmação de que o conjunto de elementos satisfazendo uma certa condição é vazio, é equivalente a afirmação de que não exíste elemento satisfazendo aquela condição.

Por suas varias definições, o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto.

DEFINIÇÃO - Dois conjunto A e B são iguais (A=B) se e sòmente se

$$A \subset B \qquad e \qquad B \subset A$$

Como consequência direta desta definiçõa, se um conjunto possuir um elemento não existente no outro, os dois conjuntos são desiguais. $A \neq B$

EXEMPLOS: O conjunto $X = \{X; X$ é um número natural entre 0 e $10\} =$

$$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,\}$$

O conjunto $Y = \{Y; Y$ é um nº natural par menor que $7\} =$

$$= \{2, 4, 6\}$$

O conjunto $Z = \{Z; Z$ é um nº cujos quadrados estão entre 3 e $40\} =$

$$= \{2, 3, 4, 5, 6,\}$$

Com estas considerações, dizemos: $Y \subset Z$, $Y \subset X$ e $Z \subset X$

Z é um subconjunto próprio de X assim que $Z \neq X$, também $\{3\} \subset X$

$\{3\} \subset Z$ e $3 \in X$ mas não podemos dizer $3 \subset X$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Mais uma vez retomaremos nosso exemplo onde o conjunto universal U é o conjunto de tôdas as letras do alfabeto.

Se, $A = \{a, e, i, o, u\}$ representa o conjunto das vogais, as letras restantes também formam um conjunto (neste caso o conjunto C cujos elemtnso são as consoantes).

Em geral um tal conjunto é chamado o COMPLEMENTAR do conjunto ~~xxxxxxxx~~, originário, isto é, C é o COMPLEMENTAR de A.

DEFINIÇÃO - O complementar de qualquer conjunto A em relação a um conjunto universal dado é o conjunto de elementos do conjunto universal que não pertencem a A.

O complementar é anotado por $\bar{A}$, e é escrito simbolicamente:

$$\bar{A} = \left\{ X ; X \in U \quad e \quad X \notin A \right\}$$ ou mais frequentemente,

já que é sabido que $X \in U$

$$\bar{A} = \left\{ X ; X \notin A \right\}$$

Se $B = \{a, b, c, d, e\}$, onde êste é um subconjunto do conjunto das letras do alfabeto, o conjunto cujos elementos estão no conjunto B ou em A, ou em ambos, é o conjunto

$$F = \{a, b, c, d, e, i, o, u\}$$

Tal conjunto é chamado a UNIÃO de A e B.

O conjunto cujos elementos estão em ambos (B e A) é o conjunto $G = \{a, e\}$

O conjunto G é chamado a INTERSEÇÃO de B e A.

DEFINIÇÃO - A UNIÃO de dois conjuntos A e B é o conjunto de elementos pertencentes a pelo menos um dos conjuntos A e B, isto é, a A ou B.

Simbolizamos a união com $A \cup B$ (lê-se: A <u>união</u> B) e escrevemos:

$$A \cup B = \left\{ X ; X \in A \text{ e, ou } X \in B \right\}$$

DEFINIÇÃO - A INTERSEÇÃO de dois conjuntos A e B é o conjunto de elementos pertencentes a ambos A e B.

Simbolizamos a interseção com $A \cap B$ (lê-se A interseção B) e escrevemos:

$$A \cap B = \left\{ X ; X \in A \quad e \quad X \in B \right\}$$

Relações referentes a subconjuntos pode ser esclarecido por meio de diagramas; com um retângulo representando um conjunto universal, qualquer subconjunto A pode ser represetnado por uma região fechada interna ao retângulo. Então $\bar{A}$, o complementar de A é a região fechada interna ao retângulo e fora de A (fig. 1)

Tais representações são chamadas " DIAGRAMAS DE VENN "

(John Venn, logicista inglês - 1834-1883)

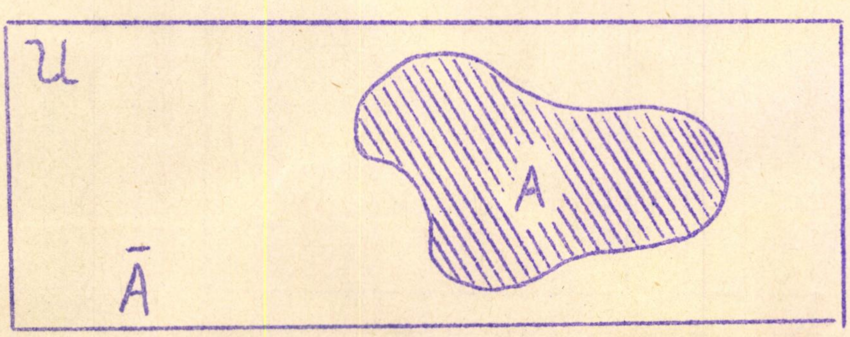


FIG. 1

A figura 2 representa o conjunto universal de tôdas as letras do alfabeto, A o conjunto das vogais, e seu complementar $\bar{A}=C$ o conjunto das consoantes.

FIG. 2

A figura 3 ilustra os conjuntos A e B com os elementos "a" e "e" em comum.

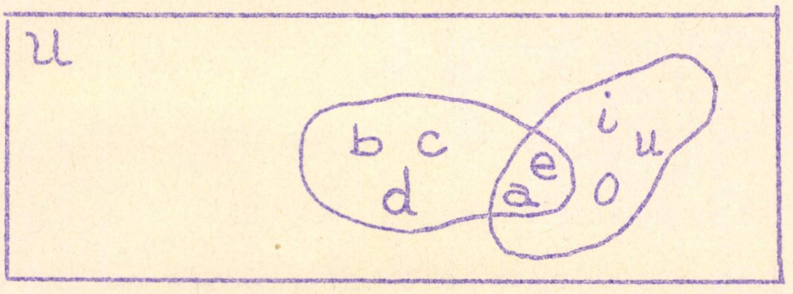


FIG. 3

EXEMPLO: Seja $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\}$ o conjunto universal, e consideremos os sub-conjuntos

$X = \{1,2,3,4,5\}$, $Y = \{1,2,3\}$, e $Z = \{4,6,8\}$.

Aplicando as definições deste parágrafo, temos

$X \cup Y = \{1,2,3,4,5\}$, $Y \cup Z = \{1,2,3,4,6,8\}$

$Z \cup X = \{1,2,3,4,5,6,8\}$ $X \cap Y = \{1,2,3\}$

$Y \cap Z = \Phi$ $Z \cap X = \{4\}$

Podemos, naturalmente tomar os complementares desses conjuntos, uniões e interseções de complementares, etc... Por exemplo

$\bar{X} = \{6,7,8\}$ $\bar{Y} = \{4,5,6,7,8\}$ $\bar{Z} = \{1,2,3,5,7\}$

$\overline{X \cup Y} = \{6,7,8\}$ $\overline{Y \cap Z} = \bar{\Phi} = U$ $\bar{X} \cup \bar{Y} = \{4,5,6,7,8\}$

$\bar{X} \cap \bar{Y} = \{6,7,8\}$

Na figura 4 os conjuntos X, Y Z tomados em pares, são ilustrados pelos diagramas de Venn.

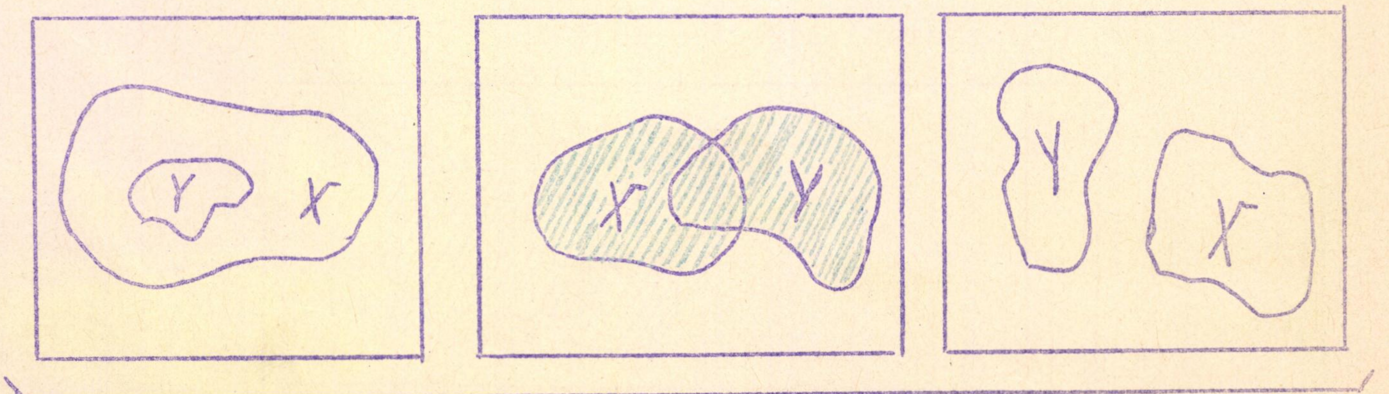
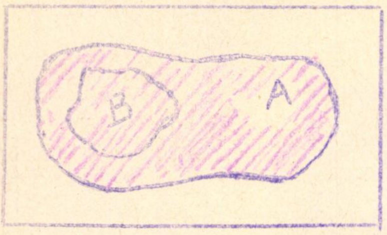
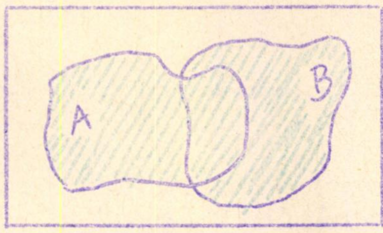


FIG. 4

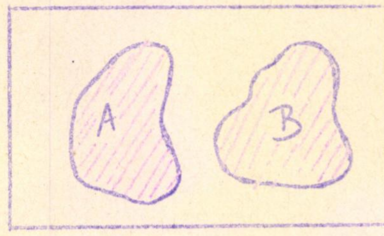
a) caso; $B \subset A$



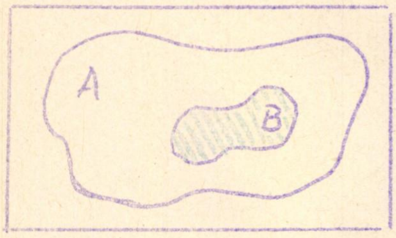
b)



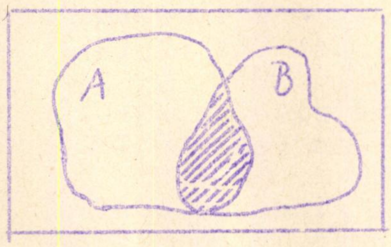
c) A e B disjuntos



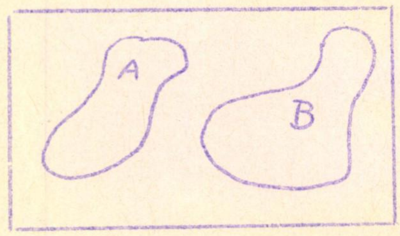
$A \cup B$



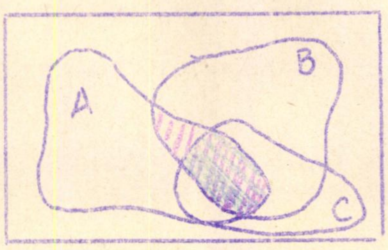
$A \cap B = B$



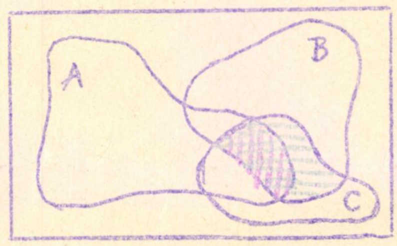
$A \cap B$



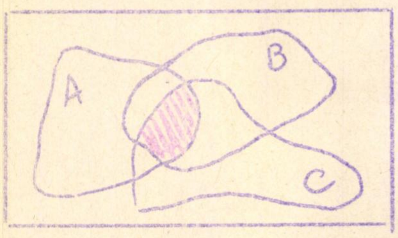
$A \cap B = \Phi$



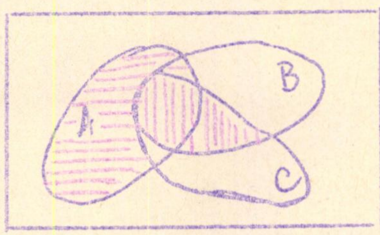
$(A \cap B) \cap C$



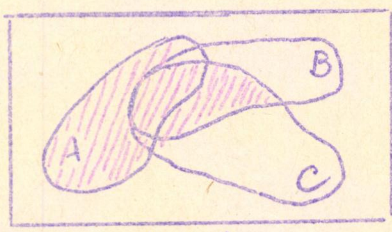
$A \cap (B \cap C)$



$A \cap B \cap C$



$A \cup (B \cap C)$



$(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$

QUADRO DE ALGUMAS PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

$$\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$$

$$A \cap B = \Phi$$

$$\bar{A} = \{x;\ x \in \mathcal{U} \text{ e } x \notin A\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{array}\right\}$$

ELEMENTOS IDENTIDADE DA $\cup$ e $\cap$

$$A \cup \Phi = A$$
$$A \cap \mathcal{U} = A$$

ORIENTAÇÃO BIBLIOGRÁFICA

1. Alvércio de Oliveira Gomes - Introdução à Álgebra Moderna Faculdade Nacional de Filosofia - R. Janeiro-1962

√ 2. GEEM - Matemática Moderna para o Ensino Secundário - Publicação do IBECC.- São Paulo 1963.

√ 3. M. Queysanne e A Delachet - A Álgebra Moderna - Coleção " Saber Atual". São Paulo. 1962. -Tradução.

4. André Delachet - A Geometria Contemporânea- Coleção "Saber Atual" - São Paulo - Tradução.

5. B. L. Van der Waerden - Álgebra Moderna. - Lisboa 1948- Tradução do alemão.

6. G. Birkhoff and S. Mac Lane- A survery on Modern Algebra. Mac-Millan - N.Y.- 1944 . Há tradução espanhola .

7. Cabrera y Medici - Matemática Moderna. - Libreria Atheneu. Buenos Aires.

√ 8. Bento de Jesus Caraça - Conceitos Fundamentais da Matemática - Lisboa.

9. Ernesto Bruno Cossi - Análise Matemática (1º volume)

√ 10. Lucienne Felix - Exposé Moderne des Mathématiques élementaires. - Paris.

√ 11. Lucienne Felix - Mathématiques Modernes. Enseignement Élementaire. - Paris.

12. C. Mac. Duffee - An Introduction to abstract Álgebra. - Wiley & Sons - London - 1940

13. Schreier and Sperner - Introduction to Modern Algebra and matrix Theory.

14. N. Jacabson - Lectures in Abstract Algebra .- D. Van Nostrand. - N.Y. - 1951

15. A. Monyallon - Introduction aux Mathématiques Modernes - Vuibert.- Paris. 1960

=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=-=