Teoria de Funções

a) Noções Fundamentais

História:

A Teoria de Funções, como a de Conjuntos e de Grupos, é uma das fundamentais da Matemática. Naquela teoria, o conceito de função é um dos principais.

Êste conceito tem sua origem com o matemático e filósofo francês do século XVII, René Descartes. A História da Teoria de Funções destaca os nomes do inglês Newton, do suiço Euler, de Cauchy e do alemão Dirichlet.

Bibliografia

Ao leitor interessado em detalhes históricos, sugerimos a leitura do capítulo IX do livro "Breve História de la Matemática" de Francisco Vera e publicado pela Editorial Losada, S.A.B. Ayres.

Apresentamos, a seguir, a lista bibliográfica relativa à parte científica.

"Conceitos Fundamentais da Matemática" de Bento de Jesus Caraça, Tipografia Matemática, Ltda. - Lisboa

"Análise Matemática" volume I, de Ernesto Bruno Cossi - Publicação do Instituto de Matemática da URGS.

"Curso de Análise Matemática" - I parte - de Omar Catunda - Editora Bandeirantes - S. Paulo

Correspondência:

A noção de correspondência é necessária na

Teoria de Conjuntos, porém fundamental na Teoria de Funções. Ela é um conceito primitivo, isto é, não pode ser definida através de outros conceitos matemáticos.

Seja N e Ip os conjuntos dos números naturais e dos inteiros pares, isto é

$N = (1, 2, 3, 4, 5, \text{------}, n, \text{-----})$

$Ip = (2, 4, 6, 8, 10, \text{------}, 2n \text{------})$

É fácil verificar que cada elemento de N está em correspondência com o seu dôbro em Ip

Em geral, numa rua de grande cidade, o conjunto de suas casas ou edifícios está em correspondência com um certo subconjunto dos números naturais. As páginas de um livro estão associadas com números. O conjunto dos automóveis está em correspondência com uma determinada coleção de números

As expressões estar em correspondêcia ou estar associado podemos tomá-las como sinônimas, em sentido matemático.

Tipos de Correspondência

Correspondência Unívoca

Dizemos que, entre dois conjuntos A e B, existe uma correspondência unívoca (do Latim - unus + vocare = chamar um só) no sentido de A para B se qualquer elemento $x \in A$ existir um e sòmente um correspondente $y \in B$

A figura 15 visualiza a correspondência unívoca de A para B

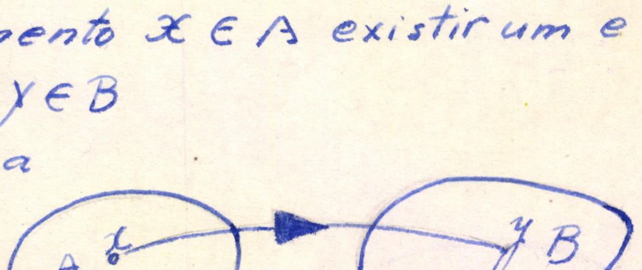


fig 15

É unívoca a correspondência entre os conjuntos N e Ip antes citados, pois, a cada elemento da coleção dos naturais corresponde um só no conjunto dos inteiros pares, isto é, o dôbro de n

Correspondência Biunívoca

Se a correspondência entre dois conjuntos A e B fôr unívoca no sentido de A para B e no de B para A, então nós dizemos que a correspondência é biunívoca.

Para apresentação de um exemplo, observamos que por reta orientada nós entendemos aquela sôbre a qual consideramos o sentido do movimento de um ponto.

Conforme a figura 16, um ponto M pode movimentar-se sôbre r, de A para B ou de B para A. Ao sentido de A para B damos a qualificação de positivo e de negativo para o outro. A seta que colocamos sôbre a reta da fig 16, indica que o sentido positivo da mesma é o de A para B

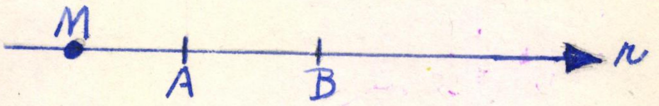
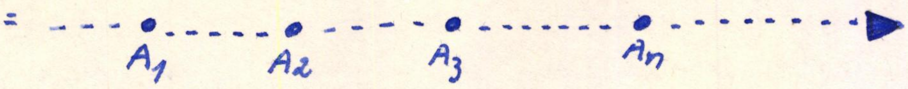


fig. 16

Isto pôsto, afirmamos a demonstrabilidade da proposição: É possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os pontos de uma reta orientada e o dos números reais.

Julgamos ser esta uma das proposições fundamentais da Geometria Analítica e que nos proporciona um exemplo de correspondência biunívoca, isto é, o elementos dos conjuntos

$$R = (a_1, a_2, a_3, \text{-----}, a_n, \text{---}) \text{ e}$$

r = 

se correspondem biunivocamente, ou seja, cada ponto de A_n de r está associado, da maneira recém exposta, com um só número real a_n, isto é,

$$A_n \rightleftarrows a_n$$

Conceito de um Número Natural

A noção de correspondência biunívoca possibilita apresentar o nosso ensaio definitório de número natural, isto é, o ser lógico (ente de razão) que se atualiza na inteligência quando esta verifica que conjuntos quaisquer e finitos têm os seus elementos em correspondência biunívoca.

Aceitamos que não é fácil definir êste conceito. Implica em conhecimentos de Lógica e Filosofia. Propomos uma forma. Gostaríamos que fôsse vivida, criticada e aperfeiçoada pelo leitor.

Sugerimos, para maiores detalhes, os livros de nossa bibliografia: "Conceitos Fundamentais da Matemática", de Bento de Jesus Caraça e "Introducion a la Epistemologia y Fundamentacion de la Matemática", de Fausto Toranzos.

Correspondência Plurívoca

Um terceiro tipo de correspondência que desejamos apresentar é o de correspondência plurívoca, isto é, uma correspondência entre dois conjuntos A e B tais que, se x fôr um elemento qualquer de A, então existem em B, pelo menos, dois elementos y_1 e y_2, correspondentes de x, conforme a figura 17

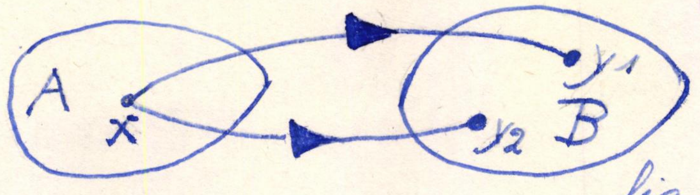


fig 17

Para a nossa exemplificação, sejam R^+ o subconjunto dos reais positivos e R o dos reais. A correspondência que associa cada $x \in R^+$ com $\pm\sqrt{x}$ em R é plurívoca, pois, se x fôr $+4$ então $\pm\sqrt{4}$ é $+2$ e -2, e, como tal, ao elemento $+4$ correspondem $+2$ e -2.

A noção de correspondência e seus principais tipos nos possibilita apresentar alguns conjuntos especiais.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Dizemos que um conjunto é finito se êle satisfizer uma das condições seguintes:

a) ser vazio

b) não sendo vazio, existe um número natural n tal que seja possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os seus elementos e os do conjunto $1, 2, 3, ----, n$.

Exemplifiquemos: O conjunto V das vogais, isto é: $V = (a, e, i, o, u)$ consideradas nesta ordem, é finito, pois existe o número natural 5 tal que entre os elementos de V e os do conjunto $(1, 2, 3, 4, 5)$ podemos estabelecer uma correspondência biunívoca, conforme nos sugere a figura 18.

$$\begin{array}{ccccc} (a, & e, & i, & o, & u) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ (1, & 2, & 3, & 4, & 5) \end{array}$$

fig 18

Esta associação sucessiva e sem repetição de cada elemento de um conjunto finito aos elementos do conjunto (1, 2, 3, 4 ...., n), é exatamente o que chamamos de contagem e anunciamos que o conjunto finito e não vazio tem n elementos. No caso de V, dizemos que êle tem 5 elementos.

Chamamos de conjunto infinito aquêle que não é finito, isto é, não é vazio e nem satisfaz a condição definitória de conjunto finito.

São conjuntos infinitos: o dos números pares, dos ímpares, dos racionais, dos reais e assim por diante.

Conjuntos Equivalentes

Entendemos por conjuntos equivalentes aquêles cujos elementos podem ser postos em correspondência biunívoca

Se $A = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots)$ e

$$B = (b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots b_m, \ldots)$$

forem dois conjuntos e se $a_1 \rightleftarrows b_1$, $a_2 \rightleftarrows b_2$, ... $a_n \rightleftarrows b_m$, isto é, se os elementos estiverem em correspondência biunívoca, então dizemos que A e B são equivalentes e escrevemos

$$A \sim B$$

Como exemplos citamos

$$R \sim r \quad e \quad N \sim Ip.$$

Conjuntos Numeráveis

Quando definimos e exemplificamos conjuntos finitos e não vazios foi verificado que êles podem estar associados biunivocamente com o conjunto $(1, 2, 3, 4, \ldots, n)$.

Assim sendo, dizemos que um conjunto C é numerável se fôr finito, ou, sendo infinito, tivermos $C \sim N$, isto é, os elementos de C e de N podem ser postos em correspondência biunívoca.

São exemplos:

$$Ip = (2, 4, 6, 8, \ldots\ldots, 2n, \ldots\ldots)$$

$$Ii = (1, 3, 5\ 7, \ldots\ldots, 2n\text{-}1, \ldots\ldots)$$

$$Pr = (1, 2, 3, 5, 7, 11\ \ldots\ldots\ldots\ldots)$$ (números primos)

e o conjunto Q dos números racionais.

Não é evidente a numerabilidade de Q. O leitor poderá encontrar uma demonstração elementar no livro "Matemática" - 3º ano - de Tales de Mello Carvalho e publicado pela Companhia Editôra Nacional.

Uma demonstração mais avançada encontramos em "Análise Matemática" - volume I - de Ernesto Bruno Cossi - cuja publicação foi realizada pelo Instituto de Matemática da URGS.

Um contra-exemplo é R. O conjunto dos reais não é numerável como também poderá ser verificado em "Análise Matemática" volume I - acima citado.

Conceito de Função

O matemático alemão Pedro Gustav Dirichlet, falecido em 1859, foi um dos grandes estudiosos da Teoria de Função e afirmava que função é uma correspondência qualquer entre dois conjuntos numéricos quaisquer.

Existem autores que têm uma acepção mais ampla do conceito de função. Para êles, função é uma correspondência entre os elementos de dois conjuntos cujos componentes são de natureza qualquer. É, pois, mero sinônimo de correspondência.

Julgamos que para os iniciantes seja mais conveniente o conceito restrito de Dirichlet, o qual adotaremos por esta razão didática.

Na linguagem matemática, as palavras aplicação e transformação são utilizadas como sinônimas de função.

Sejam D e C dois conjuntos numéricos quaisquer.

Se para qualquer elemento x pertencente a D corresponder, pelo menos, um elemento Y, pertencente a C, então nós dizemos que em D está definida uma função f, tomando valores em C.

Aos conjuntos D e C damos, respetivamente, as denominações de domínio e contradomínio daquela função a qual anotaremos por:

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad f = D \to C.$$

O primeiro símbolo $y = f(x)$, lido por y igual função de x, será para nós chamado de expressão analítica da função; e o segundo, $f = D \to C$ lemos função f definida em D e tomando valores em C.

A figura 19 visualiza os conceitos que acabamos de expôr.

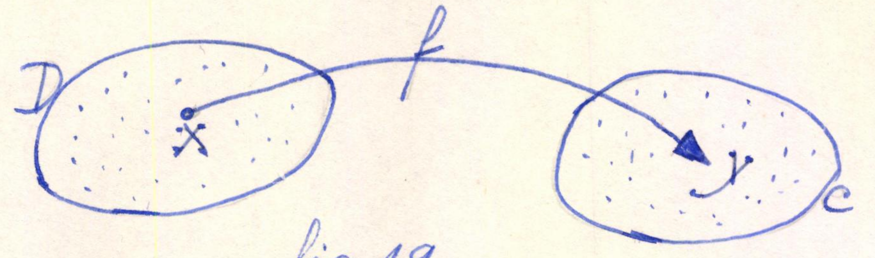


fig 19

O elemento y do contradomínio C é chamado **imagem** de x pela f.

Duas funções f e g são ditas iguais e anotamos $f = g$, se para qualquer x pertencente ao domínio comum de ambas tivermos imagens iguais, isto é, $f(x) = g(x)$

Exemplos de Funções

a) – A função de expressão analítica $y = x$ é chamada **função identidade**. Nesta função, x é auto-imagem; isto é, imagem de si mesmo o que implica na igualdade do domínio com o contradomínio.

b) – Chamamos de **função constante** aquela que faz corresponder a qualquer x de seu domínio, sempre o mesmo y, isto é,

$$f(x_1) = f(x_2) = \ldots\ldots\ldots\ldots = f(x_n) = \ldots\ldots = y$$

conforme visualiza a figura 20.

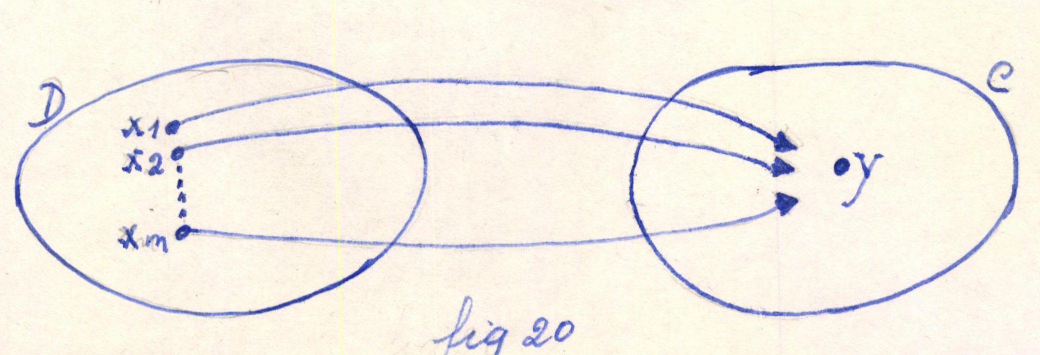


fig 20

c)- A função de expressão analítica $y = x^2$ é uma correspondência que associa cada $x \in R$ com seu quadrado.

Acreditamos ser interessante observar que, se o domínio desta função fôr R, então seu contradomínio é o subconjunto C de R, constituido do zero e de R^+, isto é, dos reais positivos.

É unívoca no sentido de R para C, porém, plurívoca no de C para R, pois nêste último caso.

$$x = \pm\sqrt{y}.$$

As funções, cujo domínio fôr o conjunto R ou qualquer dos seus subconjuntos, são chamados de funções reais de variável real. Observamos que variável é uma denominação tradicional dada aos símbolos x e y.

As funções reais são as primeiras que encontramos na Matemática e a coleção delas constitui mais um exemplo de conjunto.

Sucessões

As sucessões constituem mais um notável e fundamental tipo de funções. Podemos defini-las como funções cujo domínio, também chamado campo de definição ou de existência, é o conjunto dos números naturais

Geralmente, a expressão analítica das sucessões é $a_n = f(n)$ onde n assume valores no domínio N e a_n no contradomínio

São exemplos de sucessões as caracterizadas pelas expressões analíticas.

$a_n = \frac{n+1}{n}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = 1 - n^2$, $a_n = (-1)^n$ e $a_n = (-1)^n + 2n$.

O domínio comum para tôdas é:

$N = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots)$

e os contradomínios são respectivamente:

$C_1 = \left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots\ldots\ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\ldots\right)$

$C_2 = \left(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots\right)$

$C_3 = (0, -3, -8, -15, \ldots\ldots\ldots, 1 - n^2, \ldots\ldots)$

$C_4 = (-1, 1, -1, 1 \ldots\ldots\ldots, (-1)^n, \ldots\ldots)$

$C_5 = (1, 5, 5, 9, 9, 13, 13 \ldots\ldots\ldots, (-1)^n + 2n, \ldots\ldots)$.

Seqüências

Seqüência ou sucessão finita é a função cujo domínio é o conjunto dos n primeiros números naturais.

Usamos como expressão analítica das seqüências o simbolismo

$a_i = f(i)$ cujo domínio é $D = (1, 2, 3, 4, \ldots\ldots, n)$

e o contradomínio

$C = (a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots\ldots, a_n)$.

O símbolo $n!$, que lemos fatorial de n, é definido pelo produto dos n primeiros números naturais, isto é:

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots \times n$

e, também, por definição $1! = 1$.

Isto pôsto, apresentamos como exemplo de seqüência a caracterizada pela expressão $a_i = i!$ cujo contradomínio é:

$$C = (1!, 2!, 3!, 4!, \ldots\ldots, n!) \quad \text{ou}$$

$$C = (1, 2, 6, 24, \ldots\ldots, 1 \times 2 \times 3 \times 4 \ldots\ldots \times n)$$

Progressões Aritméticas e Geométricas

Entendemos por progressão aritmética o contradomínio de uma sucessão ou seqüência cuja expressão analítica é $a_n = a_1 + (n-1)r$ onde a_1 e r são constantes dadas e conhecidas pela denominação de 1.º têrmo e razão, respectivamente.

Como o domínio de qualquer sucessão é N, então, a progressão aritmética (P_A) será:

$$P_A = (a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, a_1 + 3r, \ldots\ldots a_1 + (n-1)r, \ldots)$$

ou:

$$P_A = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots)$$

Se o domínio de $a_n = a_1 + (n-1)r$ fôr o conjunto dos n primeiros números naturais, então a P_A é chamada de progressão aritmética finita.

Os elementos da P_A são chamados de têrmos e de acôrdo com a expressão analítica a partir do segundo, qualquer um dêles vale o 1.º somado ao produto do número de têrmos precedentes pela razão.

Semelhantemente, o contradomínio da suces-

- são ou seqüência dada por $a_n = a_1 q^{n-1}$ é chamado de progressão geométrica.

Os símbolos a_1 e q são constantes e chamados, respectivamente, de primeiro têrmo e razão da progressão.

Se em $a_n = a_1 . q^{n-1}$ associamos a $\underline{n}$, sucessivamente, os elementos do domínio N, então, apresentaremos a progressão geométrica P_G por uma das notações

$$P_G = (a_1, a_2, a_3, \text{------}, a_n, \text{------})$$

ou $$P_G = (a_1, a_1 q, a_2 q_2, \text{------} a_1 q^{n-1}, \text{----})$$

Acreditamos que o leitor tenha verificado o fato das progressões aritméticas e geométricas da Álgebra Clássica estarem perfeitamente fundamentadas nas Teorias de Conjuntos e Funções.

Como o nosso propósito é apresentar sòmente uma introdução aos fundamentos científicos da Matemática Moderna, vamos permanecer nesta parte de conceituação dos elementos básicos da Teoria das Funções.

Sugerimos ao leitor que deseja prosseguir nos estudos da Teoria de Funções consultar a bibliografia indicada, dando maior atenção aos trabalhos de Ernesto Bruno Cossi e Leopoldo Nachbin, intituladas "Análise Matemática" e "Conjuntos e Funções."

Maiores detalhes sôbre conjuntos e funções serão apresentados na Teoria de Grupos.

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -