<u>SISTEMÁTICA (NÃO CONVENCIONAL) NA CONSTRUÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL</u>

0. <u>LINGUAGEM-NOMES-OBJETOS</u>. A tecitura da nossa linguagem falada ou escrita subordina-se aos elementos seguintes, aos quais chamaremos <u>princípios de Aristóteles</u>:

1º - <u>Sempre falamos ou escrevemos sôbre alguma coisa.</u>

2º - <u>As frases contêm os nomes dos objetos e não os objetos em si.</u>

3º - <u>Os nomes são diferentes dos objetos ou ideias aos quais estão associados.</u>

Em primeiro lugar, ninguem poderá falar do <u>nada</u> porque o nada é nada mesmo (1º princípio).

Em segundo lugar, se desejarmos ser rigorosos em nossa linguagem, parece ser indispensável distinguir o objeto do nome atribuido a êsse mesmo objeto; geralmente isso não apresenta maiores dificuldades porque seria difícil (parece) confundir os sons ou sinais escritos sôbre o papel com o objeto físico ao qual êle está associado. Entretanto, representando-se um objeto físico por um símbolo, apresenta-se nova dificuldade na linguagem escrita, isto é, o nome do símbolo e o próprio símbolo que são distintos um do outro; para ultrapassar esta dificuldade costuma-se denotar o símbolo entre áspas quando nos referimos ao seu nome. Assim, escrevemos: "x" e x, evitando a complexidade da linguagem.

Tudo isto sugere a conveniência da formulação explícita do 2º e do 3º princípio.

1. <u>O SINAL "="</u>. O sinal "=" é um dos mais úteis na Matemática; quando <u>um</u> objeto tem <u>dois nomes</u> "x" e "y" costuma-se afirmar que

x é y ou então: x é igual a y

e escrevemos simplesmente

$$x = y.$$

Por isso "=" indica a <u>relação de identidade</u> (ou de <u>igualdade</u>) entre os objetos. Arelação oposta é denotada pelo sinal "$\neq$" (diferente de).

É muito útil considerar $x = y$ como exprimindo que x e y são dois nomes de um mesmo objeto e que $u \neq z$ exprime que os nomes u e z são os de duas coisas distintas uma da outra. Note-se que ao escrevermos

"6 = 4 + 2"

não estamos afirmando que os nomes "6" e "4 + 2" são do mesmo objeto pois então deveriamos escrever:

"6" = "4" + "2".

? A fórmula "6 = 4 + 2" contém símbolos que designam certos números e não os nomes dêsses números(símbolos); por isso costuma-se dizer que ela exprime algo sôbre os números e não sôbre os nomes dos números.

2. <u>A IGUALDADE</u>. Certos aspectos do sinal "=" levam-nos a associá-lo com o conceito de "conjunto". Isto é, diremos que x é igual a y quando x pertence ao conjunto do qual y é um elemento; em outros têrmos:

Duas coisas x e y são iguais ($x = y$) tôda vez que, para todo conjunto A, $x \in A$ se, e sòmente se, $y \in A$.

A forma "se e sòmente se" é uma compressão da linguagem matemática equivalente:

"é necessário e suficiênte que" ...

ou então:

"uma condição necessária e suficiênte para que" ...

2_1. <u>LEI DE LEIBNIZ</u>. Sob ponto de vista da propriedade tudo isso está resumido nos seguintes têrmos:

Sejam x e y dois objetos; então, $x = y$ tôda vez que para uma propriedade P, x tem esta propriedade se, e só se, y tem esta propriedade(lei de Leibniz).

2_2. <u>PRINCÍPIO DE SUBSTITUIÇÃO</u>. É consequência da lei de Leibniz e consiste no seguinte:

Seja $x = y$; então, em qualquer fórmula ou em qualquer raciocínio contendo"x", o símbolo "x" poderá ser substituido total ou parcialmente pelo símbolo "y" e reciprocamente.

Êste princípio é largamente empregado no cálculo.

2_3. <u>PROPRIEDADES(POSTULADOS = AXIOMAS) DO SINAL "="</u>.

P_1 - Todo objeto é igual a si mesmo, isto é:

$x = x$ (identidade).

P_2 - Se $x = y$, então $y = x$ (reflexividade).

P_3 - Se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$ (transitividade).

<u>NOTA</u> - Estas propriedades são chamadas também "propriedades igualiformes".

EXERCÍCIO: Demonstrar: Se $a = c$ e $b = c$, então $a = b$.

3. <u>CAMPOS (SISTEMAS) NUMÉRICOS</u>:

Nº int. posit.(nº natur.)
Nº int. negat.
} Sist. dos nº int. relat.
Frac. posit.
Frac. negat.
} Sist. dos nº racion. relat.
Irrac. posit.
Irrac. negat.
} Sistema dos números reais relativos ou campo dos reais.

4. <u>PROPR. FORMAIS(REGRAS OPERATÓRIAS) DAS OPERAÇÕES</u>. Predomina aqui um <u>critério de forma</u>. Sejam x,y,z, números reais; então:

$$P_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y = y + x \\ xy = yx \end{array} \right\} \text{ propried. comutativa.}$$

$$P_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x + (y + z) = (x + y) + z, \\ x(yz) = (xy)z. \end{array} \right\} \text{ propried. Associativa.}$$

$$P_3 \quad x(y + z) = xy + xz, \text{ propried. distributiva.}$$

Êstes três postulados também são chamados "leis de composição" (dos números). As propriedades formais são de enorme importância prática e teórica; sendo elas regras operatórias do cálculo (algébrico) convém que seu domínio de validade seja tão extenso quanto possível e, portanto, tôdas as vêzes que fôr necessário (por qualquer motivo) estender a definição de qualquer uma das operações, a nova definição deve ser formulada em têrmos tais que a ela ainda sejam aplicáveis as propriedades formais da operação de que se trata; êste é o <u>princípio da permanência das propriedades formais</u> (devido a H. Hankel) e está implícito nos postulados P_1, P_2, P_3, ~~quanto a validade~~ pois não se fez nenhuma restrição quanto a validade dos mesmos se nas operações com números naturais ou se nas operações com os números fracionários negativos, por exemplo.

5. <u>AXIOMAS DA ORDENAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS.</u>

P_0. Ou $x = y$, ou $x < y$ ou $x > y$ (mutùamente exclusivas).

P_1. Se $x < y$, então $\exists z$, tal que $x + z < y + z$.

P_2. Se $x > 0$ (x é positivo) e $y > 0$, então $xy > 0$.

P_3. Se $x > y$ e $y > z$, então $x > z$ (transitividade do sinal "$>$").

6. <u>FORMAS COMPRIMIDAS.</u>

1ª). "x é positivo <u>ou</u> nulo" <u>e</u> "$x \geq 0$". todo o nº maior que 0 é positivo

2ª). "y é negativo <u>ou</u> nulo" <u>e</u> "$y \leq 0$". todo o nº menor que 0 é negativo.

7. <u>MÓDULO. RELAÇÕES.</u> Quando houver necessidade de considerar um número real independente e expressamente da sua qualificação em positivo ou negativo, dar-se-lhe-á o nome de <u>absoluto</u>; representa-se pelo símbolo $|x|$ e lê-se <u>módulo</u> de x (ou <u>valor absoluto</u> de x). Será portanto,

$$|+x| = |-x| = x$$

isto é

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0, \\ -x, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

<u>TEOREMA DIRETO</u>: Se $a \geq 0$ e $|x| \leq a$, então $-a \leq x \leq a$.

Dem. Ora, $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

ou seja

$$-a \leq x \leq a.$$

<u>TEOREMA RECÍPR</u>: Se $a \geq 0$ e $-a \leq x \leq a$, então $|x| \leq a$.

Dem. Se $x < 0$, então $|x| = -x \leq a$.

Se $x > 0$, então $|x| = x \leq a$.

Ora, em ambos os casos é

$$|x| \leq a.$$

<u>FORMA CLÁSSICA</u>: "Sendo $a \geq 0$, a condição necessária e súficiente para que $-a \leq x \leq a$ é que $|x| \leq a$".

<u>FORMA COMPRIMIDA</u>: "Sendo $a \geq 0$ será $|x| \leq a$ se e só se $-a \leq x \leq a$".

<u>FORMA LÓGICA</u>: "Sendo $a \geq 0$, as desigualdades $-a \leq x \leq a$ e $|x| \leq a$ são (lògicamente) equivalentes".

<u>OBSERVAÇÃO.</u> A característica essencial da equivalência lógica de duas proposições é a reflexividade da implicação e está caracterizada(simbòlicamente) pelo sinal $\longleftrightarrow$ como se indica no esquema:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Se } a \geq 0 \\ -a \leq x \leq a \longleftrightarrow |x| \leq a \end{array}}$$

7'. <u>MÓDULO DA SOMA.</u> <u>TEOREMA</u>: "O módulo da soma de várias parcelas não supera a soma dos módulos das parcelas".

Dem. Pelo teorema precedente, segue-se:

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|,$$

cuja soma é $$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| .$$

Ora, ainda em face do mesmo teorema precedente, esta dupla desigualdade leva à relação: $$|x + y| \leq |x| + |y|$$

que é precisamente o enunciado do teorema.

CONSEQUÊNCIAS. a) - Mudando y por -y na desigualdade acima:

$$|x - y| \leq |x| + |-y|$$

e como $$|-y| = |y| ,$$

virá $$|x - y| \leq |x| + |y| ,$$

ou seja: "O módulo da diferença não supera a soma dos módulos do minuendo e do subtraendo".

b) - Mudando x por y - x na desigualdade acima, segue-se sucessivamente:

$$|y - x - y| \leq |y - x| + |y| ,$$

$$|- x| \leq |y - x| + |y| ,$$

$$|x| \leq |x - y| + |y| ,$$

$$|x - y| \geq |x| - |y| .$$

Logo, ...

7º. GENERALIZAÇÕES. 1ª). $|x + y| \leq |x| + |y| .$

2ª). $\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| .$

;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;

Recapitular: Desigualdades e inequações do 1º grau