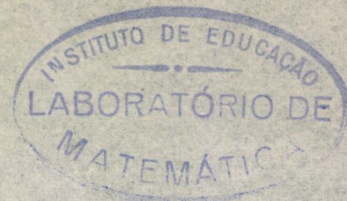




ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA



## AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Lucienne Félix

"Cahiers Pedagogiques D'Enseignement des Mathematiques"

15<sup>e</sup> année n<sup>o</sup> 21 - Pág. 69

15 / 5 / 60

*Tradução de Sandra Acauan*

As noções de relação de equivalência e de classe de equivalência são tão fundamentais, que a sua aquisição constitui a primeira aprendizagem no Jardim da Infância, e que depois são utilizadas constantemente. É porque essas noções tornam-se inconscientes e parecem novas, desde que as tomemos como objeto de estudo num nível superior. Antes de examinar a sua seqüência ao longo da escolaridade, recordemos de que se trata.

### I - Noção de Classe de Equivalência

A noção de classe de equivalência é o princípio fundamental de toda classificação: dentro do conjunto mais ou menos conhecido dos elementos dos quais falamos, conjunto chamado "referencial", certos elementos são considerados análogos, como equivalentes entre eles, sob um certo ponto de vista. Sob este ponto de vista nós os consideramos como pertencentes a uma mesma classe de elementos. Para que esta classe seja definida sem ambigüidade, é preciso poder afirmar o que se segue:

1<sup>o</sup> - Cada vez que nós retomamos um mesmo elemento, (devemos retomamos um mesmo elemento), devemos reconhecer nêle a permanência dos caracteres utilizados para a classificação, de modo que o elemento seja bem equivalente a êle mesmo.

2<sup>o</sup> - Se um segundo elemento é reconhecido como equivalente ao primeiro, o primeiro também deve ser equivalente ao segundo. Não importa a ordem para concluir que os dois elementos devem ser postos na mesma classe.

3<sup>o</sup> - Sendo dois elementos equivalentes, e se um terceiro for equivalente a um dêles, êsse terceiro é equivalente ao outro também. Daí resulta que cada elemento de uma classe determina perfeitamente esta classe.

4<sup>o</sup> - Sendo uma classe definida, todo elemento ou pertence à



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA

-2-

classe, ou determina uma outra classe; assim, todo o referencial é dividido em classes sem elementos comuns: há divisão.

Tomemos um exemplo: Queremos classificar lápis pela cor da sua madeira. Colocamos os lápis amarelos dentro de uma caixa; constituímos assim a classe amarela; da mesma maneira será constituída a classe vermelha, a classe azul, e, se houver lugar, a classe de cor indecisa, para que todos os lápis sejam repartidos.

Esta linguagem, que concerne os subconjuntos chamados "classes de equivalência", pode ser traduzida em outra linguagem, que concerne "relações".

Tomemos um lápis, e depois outro lápis. Todos os dois são da mesma cor? "Terá uma mesma cor" é uma relação entre pares de elementos do referencial; é uma relação binária (entre 2 elementos).

Uma relação é definida sobre o referencial se, por cada par de elementos, à pergunta "O par convém?", pode-se responder "Sim" ou "Não". Se a resposta for "Sim", os elementos são equivalentes, e sob o meu ponto de vista, e eu os colocaria na mesma classe. Esta classificação é possível?

Tomemos o nosso exemplo da classificação dos lápis de cores; apliquemos as 4 condições enumeradas acima:

1ª- Tomo um lápis, e depois o mostro uma segunda vez. Se a classificação for possível eu devo, à pergunta "eles são da mesma cor?" responder "Sim". A relação é dita "reflexiva": qualquer que seja o elemento "a", ele é equivalente a ele mesmo.

2ª- Tomo 2 lápis, se, à mesma pergunta, a resposta for "sim", esta resposta é independente da ordem na qual os elementos são considerados: a relação é dita "simétrica".

3ª- Se a resposta for "Sim" para o par (a, b) de elementos e também para o par (b, c), a resposta também é "Sim" para o par (a, c); a relação é transitiva; ela se propaga de qualquer maneira.

Assim, as condições 1ª, 2ª e 3ª exprimem propriedades da relação; a 4ª exprime que a comparação se estende a todos os elementos do referencial, que a resposta "Sim" ou "Não" pode ser dada para todos os pares. Quando estas condições são realizadas, diz-se que se trata de uma relação de equivalência definida sobre o referencial.

Insistamos um pouco sobre os dois aspectos da questão: nós podemos pensar nos sub-conjuntos, nas classes de equivalência, ou pe



-3-

sar na relação. Se o referencial é repartido em classes, sub-conjuntos sem elementos comuns, pode-se formular uma relação de equivalência que descreve o princípio de classificação. De maneira inversa, uma relação de equivalência é um princípio de classificação e determina as classes de equivalência.

Portanto, a todo estudo feito sobre as classes corresponde um estudo sobre as relações. Por exemplo: consideremos dois princípios de classificação sobre um mesmo referencial; em relação aos lápis, esses princípios podem ser: quanto à cor da madeira e quanto à cor do grafite. Seja E o conjunto de lápis de madeira amarela, e F o conjunto de lápis de grafite preto. A operação de "interseção" sobre E e F o conjunto G de lápis comuns às duas classes. Eles são caracterizados como tendo ao mesmo tempo a madeira amarela e o grafite preto; há "conjunção" das duas qualidades: é uma operação sobre as duas relações de equivalência (ver Dubreil: "As relações de equivalência", conferência no Palácio da Descoberta, 1954).

Lembremos disto apenas que nós temos duas maneiras de nos exprimir. -- um elemento é de tal classe (pertence a esta classe), é o aspecto da teoria dos conjuntos -- ou ele tem tal qualidade (possui esta qualidade, satisfaz a relação).

Acrescentemos que nós temos uma necessidade imperiosa de nomear as classes de equivalência, porque somos levados a considerá-las como elementos de um tipo superior; esta hierarquia de tipos é bem conhecida nas Ciências Naturais (Zoologia ou Botânica), mas é também essencial para as outras matérias de estudo.

Ser uma bilha amarela, ser um polígono trilátero, ser um animal herbívoro, ser contemporâneo de Augusto (considerado como a população que viveu na época de Augusto). Assim, designa-se a classe por um substantivo que pode ser o nome de uma qualidade) (o amarelo), um nome indefinido (o triângulo), um nome no plural (os herbívoros), ou cita-se um elemento particularmente notável da classe (Augusto, evidentemente o mais notável dos homens de seu tempo, sob o ponto de vista onde nos colocamos).

É um caso muito favorável para a classificação que aquele onde, dentro de cada classe de equivalência, um elemento particular, um representante bem reconhecível se impõe como protótipo, como elemento standard: ele é chamado (na técnica das matemáticas elevadas) "ele-



-4-

mento canônico". Se está num caso como este, é necessário precisá-lo; veremos exemplos depois.

✓ Mas se pretende-se estudar uma classe por apenas um dos seus representantes é preciso ter-se cuidado. Assim, para estudar os herbívoros, uma criança tomará como tipo "a vaca" (o que já é melhor do que "uma vaca". Mas a vaca pertence a outras classes de equivalências determinadas por outros princípios de classificação: é necessário considerar interseções de conjuntos.

Está claro que estudando as matemáticas elementares, nós estamos nas situações privilegiadas onde a classificação é particularmente simples.

## II - As Classes de Equivalência no Ensino

Abramos o programa e reconhecamos as relações e classes de equivalência onde elas estão, isto é, quase que em todo lugar.

### No Jardim da Infância

É o momento privilegiado para a álgebra dos conjuntos e das ~~elas~~ classes de equivalência (antes do número), como também para a topologia (antes da medida). Se a criança classificar objetos por cor e procurar os amarelos, se ela perguntar: "Este ou aquele?", em lugar de responder: "É a mesma coisa", respondamos: "É equivalente" e falemos sobre a classe dos objetos amarelos.

### No Curso Elementar e no Curso Ginásial

O número aparece. Contar, medir: novas operações.

O que é o número natural? Trata-se de diversos referenciais: o conjunto dos meus dedos, um conjunto de ovos, um porta-ovos, um conjunto de etiquetas com sinais que as distingam. Consideremos um sub-conjunto de cada um, por ex. um (panier) de ovos e um cartão com orifícios para colocar ovos, um pacote de etiquetas. Poderei eu estabelecer correspondências bi-unívocas, por cada ovo num orifício, de modo que não sobrem nem ovos sem lugar para serem postos, nem lugares sem ovos? E o mesmo com as etiquetas? Se a experiência responder "Sim", o cesto, o cartão, o pacote são da mesma classe. A classificação é possível, há transitividade. Eu dou um nome a esta classe, por exemplo, digo "cinco", como diria "amarelo", se eu colorir o cesto, o cartão e o pacote de amarelo.

O difícil aqui é que eu estabeleci a relação de equivalência



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA

-5-

entre elementos de tipo superior, cesto, cartão, pacote, entre os sub-conjuntos e não entre os objetos primitivos. As barrinhas coloridas do material Cuisenaire simbolizam perfeitamente o mais simples dessas classes que nós chamamos de números, e sobre as quais definem-se as operações.

Contar é, depois de ter aprendido de cor uma lista de palavras, um, dois, três, quatro, cinco, ..., atribuir a cada classe umas dessas palavras. Dêste modo, nós voltamos à correspondência bi-unívoca entre os elementos de um protótipo de classe estudada (por ex., o conjunto dos meus dedos) e as palavras da lista tomadas em ordem a partir de "um". A última palavra pronunciada é o nome do número. Eu digo "cinco", mas se havia tomado a lista "violeta, azul, verde, amarelo"..., eu teria dito "amarelo".

Tudo isto é certamente muito complexo, mas a criança é tão inteligente que lhe bastam um ou dois anos para ter um conhecimento dos 100 primeiros números, suficiente para utilizá-los e fazer algumas operações. No 1º ano elementar, ela ainda não esqueceu que se trata de classes <sup>de</sup> equivalência dentro dos conjuntos que ela manipula ou desenha.

Medir: Trata-se, em 1º lugar, de definir, por uma experiência conveniente, uma relação de equivalência entre (des tiges), (des fielles tendues), para considerar como da mesma classe os objetos que nós dizemos terem o mesmo "comprimento". Da mesma maneira, a balança indica os objetos que têm a mesma massa, etc. Em seguida, é preciso associar a cada classe um elemento do conjunto dos números, de modo que haja correspondência biunívoca.

Não somente o conjunto dos números naturais não basta mais, e é preciso, no curso ginásial, introduzir os números decimais, mas ainda uma classe de equivalência definida por "ter a mesma medida", torna-se terrivelmente rica: 5 metros, 5 gramas, 5 horas, 5 francos, é bem mais variado do que 5 ovos, 5 porta-ovos, 5 dedos, e isso não pode realmente, ser desenvolvido, digo, desenhado. Deve-se fazer intervir uma outra relação de equivalência: "ser de grandezas da mesma espécie". Mas logo o espírito não segue mais: o sinal 5 substitui toda a idéia; o cálculo torna-se mecanismo, a álgebra dos conjuntos é esquecida e dá lugar à álgebra dos números, que a traduz. É talvez um progresso técnico e uma consciência, o abandono de todo



um domínio matemático. Precisemos bem em toda ocasião a correspondência biunívoca entre o conjunto de grandezas e o conjunto de números

Estudo Sérió da Medida

Sobretudo, não confundir "relação de equivalência" e "correspondência biunívoca". Se, por exemplo, a criança vê em seu livro:

preço de 3 metros = Cr\$300,00

ela escreverá em abreviado:  $3m = 300cr$ , e depois, um dia,  $3 = 300$ .

Habitue-mo-la a traduzir a relação completa pelo esquema:

comprimento em metro	↔	preço em Cr
3		300

A flecha curva indica a correspondência.