LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLORES DA CUNHA"

Círculo de Estudo de Matemática

2º curso de Matemática promovido pelo Círculo

2º assunto: Igualdade e Equivalência

Maria Águeda de O. Freitas

Resumo da aula cedido pela professôra:

IGUALDADE E EQUIVALÊNCIA

Nos livros os autores ora usam igualdade, ora equivalência, no caso das frações. Consultando vários professôres de Matemática, houve grande controvérsia entre êles. Para uns, equivalência é caso de igualdade. Para outros, igualdade é completamente $\neq$ de equivalência.

Vamos então tentar explicar porque emprega-se a expressão "frações equivalentes" que para muitos pode ser dita "frações iguais".

Vejamos então o significado de igualdade nas duas grandes áreas da Matemática: Álgebra e Geometria.

O homem não se limita a observar coleções de objetos, a vida leva-o ainda a comparar.

As principais relações algébricas que indicam o resultado da // comparação são a igualdade e a desigualdade.

Os sinais de igualdade mais usados são = que se lê "igual a" e $\equiv$ que se lê "idêntico a".

Assim as relações:

$$A = B \qquad \text{e} \qquad A \equiv B$$

devem ser lidas, respectivamente: A igual a B e A idêntico a B. A relação $A = B$ chama-se "igualdade pròpriamente dita" ou simplismente igualdade. A relação $A \equiv B$ chama-se "identidade".

Nota-se o seguinte:

"Tôda identidade é uma igualdade, mas nem tôda igualdade é uma identidade".

Por isso, é comum. empregar-se o sinal $\equiv$ nas identidades.

Em vista da afirmação acima, a identidade é um caso particular da igualdade. E as igualdades que não são identidades?

Vamos explicar a afirmação: Duas expressões algébricas ligadas pelo sinal = formam uma igualdade algébrica. Ex.:

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \qquad (1)$$

Também se forma uma igualdade algébrica, colocando o sinal = entre uma expressão algébrica e um número ou entre uma expressão algébrica e uma expressão numérica:

$$x + 3 = 0 \qquad (2)$$

$$x + 2 = 5 - 7 \qquad (3)$$

Esta última se reduz ao tipo (2). Daí: Há duas espécies de //// igualdades algébricas: a identidade e a equação.

$$\text{Igualdades algébricas} \begin{cases} \text{Identidade} \\ \\ \text{Equação} \end{cases}$$

A identidade algébrica é uma igualdade incondicional, independe dos valores atribuidos às letras que nela figuram. Assim a igualdade

$$(x + a)(x - a) = x^2 - a^2 \qquad (1)$$

é uma identidade, porque $\forall$ que sejam os valores atribuidos às letras x e a, ela se transforma numa igualdade numérica. (identidade)

Ex.: $(2 + 5)(2 - 5) = 2^2 - 5^2$

$7 \cdot (-3) = 4 - 25$

$-21 \equiv -21$

As expressões

$(x + a)(x - a)$ e $x^2 - a^2$ são idênticas porque têm o mesmo valor numérico para todos os sistemas de valores de a e x.

Para caracterizar as identidades algébricas emprega-se o sinal $\equiv$

$$(x + a)\,(x - a) \equiv x^2 - a^2$$

É preciso notar que o uso dêste sinal não é obrigatório; e o sinal = é empregado freqüentemente nas identidades, quando não há necessidade de destingüí-las de outra espécie de igualdade.

Equação é uma igualdade condicional, depende dos valores atribuídos a certas letras que êla contém, denominadas "incógnitas".

Assim a igualdade

$$2x + 3 = 3x - 2$$

é uma equação, porque ela só é verdadeira para alguns valores das incógnitas que nela figuram . No caso para $x = 5$ as expressões assumem o mesmo valor numérico. Para outro valor atribuído a x seus valores numéricos são diferentes.

Identidade e Igualdade na Geometria

$$\text{Igualdade}\begin{cases}\text{Congruência}\\ \\ \text{Equivalência}\end{cases}$$

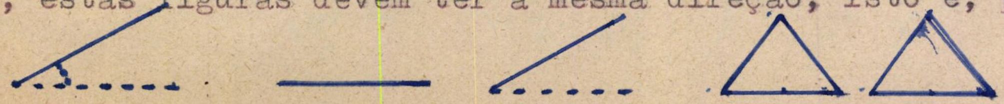
As relações de igualdade entre figuras geométricas são dadas // através da congruência e da equivalência.

Dá-se o nome de figuras geométricas a um conjunto formado de // pontos, linhas, superfícies ou volumes.

Na figura geométrica consideram-se a "forma"e a"grandeza".

Assim quando se observa, por ex., se uma linha é curva ou poligonal está se considerando a forma. Quando se procura verificar se / certa figura é maior, igual ou menor do que outra, está se considerando a grandeza.

Chamam-se figuras congruentes duas figuras que se podem transportar uma sôbre outra, de modo que coincidam exatamente em tôdas as suas partes, isto é, que podem coincidir por superposição. Além disso, estas figuras devem ter a mesma direção, isto é, por ex.:



Assim a congruência é uma relação de igualdade entre a forma e grandeza de duas figuras geométricas.

Pode haver igualdade sem que haja congruência. Por ex.: dois seguimentos curvilíneos podem ser iguais, sem que sejam congruentes. Ex.: 

Só com uma rotação êles coincidiriam. A congruência de figuras é vericada pela translação.

Chamam-se figuras equivalentes às figuras que têm o mesma grandeza e formas diferentes. Por ex.: Um triângulo é equivalente a um quadrado quando êles possuem a mesma área. Uma pirâmide é equivalente a um prisma quando tem o mesmo volume.

Embora Estas figuras tenham formas diferentes, suas áreas e seus volumes podem ser expressos pelo mesmo valor numérico. Anotação: $A \backsim B$

A relação de equivalência é mais usada na Geometria.

Certos autores pretendem na Álgebra chamar a identidade de equivzlência, mas o nosso ponto de vista é que o têrmo equivalência é à Geometria.

Na Aritmética surge o caso:

$\frac{1}{2}$ é uma fração equivalente a $\frac{2}{4}$.

$\frac{1}{2}$ é uma fração irredutível; $\frac{2}{4}$ é redutível a $\frac{1}{2}$. Em última análise elas são iguais. Podemos estabelecer a relação de igualdade

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

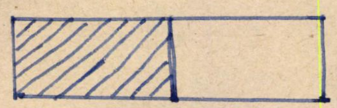
como também a de equivalência:

$$\frac{1}{2} \backsim \frac{2}{4}$$

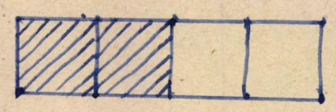
Certo professor disse que não sabe porque empregaram esta terminologia "equivalente" para as frações dêste tipo.

Talvez por analogia com a Geometria: pois a fração $\frac{1}{2}$ representa o inteiro dividido em 2 partes, das quais foi tomada 1. A fração $\frac{2}{4}$ representa o inteiro dividido em 4 partes, das quais foram tomadas 2.

A unidade foi dividida de tal modo, que se apresenta com esta divisão em forma diferente, mas tem a mesma grandeza, isto é, pode ser expressa pelo mesmo valor numérico.



$\frac{1}{2}$



$\frac{2}{4}$

$\downarrow$

$\frac{1}{2}$

Equivalência de figuras
- Formas diferentes
- Valor numérico igual

Equivalência de frações
- Formas diferentes
- Valor numérico igual

Considerando as frações como pares ordenados de números, igualdade e equivalência são diferentes.

Dados os pares ordenados:

$(a\ ,\ b) = (a'\ ,\ b')$ se,e sòmente se, $a = a'$ e $b' = b'$

Um comprimento pode ser representado tomando um certo número de vêzes um outro comprimento. Esta propriedade que possuem os dois comprimentos de serem relacionados por êste número pode ser considerada uma relação de equivalência.

Os conjuntos de pares ordenados, tendo a mesma propriedade, é uma classe equivalência e êles são equivalentes.

P Podemos então formar classes de pares ordenados equivalentes reunindo todos aquêles cujos dois têrmos são iguais ou múltiplos de um comprimento dado. $(a\ ,\ b)$ e $(a'\ ,\ b')$ $a = nb$

$(a\ ,\ b)$ $(a'\ ,\ b')$ $a' = nb$

$$\left\{ (a\ ,\ b) \text{ onde } \begin{array}{l} a = n.c \\ b = m.c \end{array} \quad n \text{ e } m \text{ fixos} \right\}$$