L A B O R A T Ó R I O   D E   M A T E M Á T I C A

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLORES DA CUNHA"

Círculo de Estudo de Matemática

2º curso de Matemática promovido pelo Círculo

~~Professôras~~ Bacharéis em Matemática: Adair Vera

Adair Vera

(Maria Agda de O. Freitas) não

1º assunto: Teoria das frações

~~Professôra Adair Vera~~

Bibliografia consultada:

Omar Catunda - Análise Matemática

Sansone - ITÁLIA " "

Monteiro, Antônio Aniceto e Paulo, José da Silva } ARITMÉTICA RACIONAL

Resumo da aula, cedida pela professôra:

TEORIA DAS FRAÇÕES

1. - Introdução

2. - Definição

3. - Propriedades da Igualdade

   a) - Reflexiva

   b) - Simétrica

   c) - Transitiva (Lei de Euclides)

4. - Propriedades das frações

   a) - Frações com mesmo denominador e iguais, têm mesmo numerador.

   b) - Fração igual a um inteiro o numerador é múltiplo do denominador

1. Fração aparente

2. Número inteiro

3. Representação de um número inteiro $\left(\frac{a}{1}\right)$ (a,1)

c) - Fração nula ou fração <u>zero</u>.

d) - Uma fração é nula só se o seu numerador é zero.

e) - Duas frações iguais e de mesmo numerador têm denominadores iguais.

f) - Multiplicando numerador e denominador de uma fração por um número, digo, por um mesmo número, obtém-se uma fração igual à anterior.

g) - O mesmo quando se divide.

5. - Propriedades da Adição

a) - Unívoca (lei)

b) - Associativa (lei)

c) - Lei Modular

d) - Lei do Corte

A - <u>Medida de grandezas</u>

B - <u>Solução ao problema da divisão exata</u>

TEORIA DAS FRAÇÕES

A noção de número inteiro é insuficiente para resolver certos problemas como por exemplo: se quatro indivíduos quiserem repartir uma maçã n~ao utilizam o algorítimo da divisão D=q.d+r que atribui <u>zero</u> maçãs para cada indivíduo, sendo o resto igual a <u>1</u>; o // que êles fazem é cortar a maçã em quatro partes iguais e cada um dêles fica com "um quarto" da maçã (ou seja com uma fração da maçã).

O estudo que faremos a seguir não será pròpriamente uma recapitulação das diversas interpretações concretas da noção de fração, mas ùnicamente o estudo da elaboração de uma teoria das frações formalmente independente dessas interpretações. Nós nos introduziremos assim numa técnica de construção de números fracionários.

Vamos partir então do seguinte: Consideremos a equação do 1º grau: $bx=a$

onde a e b são números inteiros sendo $b \neq 0$. Esta equação nem sempre é resolúvel na classe dos inteiros. (Entendemos aqui "resolver a equação", determinar o valor da incognita x). Só será resolúvel se b fôr fator de a.

Trataremos então de generalizar a noção de número de modo a alterar essa situação.

Vamos partir então da equação de 1º grau:

$$bx=a \qquad b\neq o$$

O conhecimento das equações do 1º grau nos leva a indicar a solução dessa equação pelo símbolo: $\frac{a}{b}$ (lê-se a sôbre b).

O inteiro a tem o nome: numerador.

O inteiro b tem o nome: denominador. (Note-se que aqui não foi levado em consideração o fato de ser ou não b um fator de a. Simplesmente consideramos o símbolo $\frac{a}{b}$.

Pois bem, o nosso objetivo é estudar a classe de todos os // símbolos $\frac{a}{b}$ onde a: inteiro $(0,1,2,\ldots\ldots.)$

b: natural $(1,2,3,\ldots\ldots.)$

Para que ao símbolo $\frac{a}{b}$ se possa dar o nome de fração é ainda necessário definir uma relação de igualdade e duas operações / (adição e multiplicação) sôbre aquêles símbolos.

Apresentaremos pois a seguinte definição:

Definição: A classe F das frações é formada por todos os pares ordenados de inteiros que representaremos por $\frac{a}{b}$, onde $b\neq o$

a = numerador

b = denominador,

desde que se estabeleçam as seguintes definições:

1 - Igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se e só se} \quad ad=bc \qquad b\neq o \qquad d\neq o$$

2 - Adição: Dá-se o nome de soma $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)$ das duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ à fração $\frac{ad+bc}{bd}$ (notamos que $bd\neq o$

3 - Multiplicação : Dá-se o nome de produto $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ das frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ à fração $\frac{ac}{bd}$ (note-se que $bd\neq o$)

Não basta portanto afirmar que um par ordenado de inteiros constitua uma fração; é necessário que estejam satisfeitas as definições / 1,2,3. Essas definições fazem parte integrante da teoria das frações elaborada a partir da noção de número inteiro.

As definições 1,2,3, não são dadas arbitràriamente, mas são fundamentadas na resolução de problemas concretos.

O objetivo da teoria das frações é agora estudar as propriedades da relação de igualdade e das operações de Adição e Multiplicação.

I - Igualdade

A relação de igualdade goza das seguintes propriedades:

1 - Reflexiva:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \therefore ab=ba$$

2 - Simétrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \therefore \qquad \frac{c}{d} = \frac{a}{-b}$$

$ad=bc \therefore bc=ad$

$ad=bc \qquad ad=bc$

3 - Transitiva (ou lei de Euclides)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\qquad$ $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ $\qquad$ $\frac{c}{d} = \frac{e}{f}$

Demonstração:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\qquad\qquad$ $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$

(1) $ad = bc$ $\qquad\qquad$ (2) $af = bc$

Multipliquemos os membros de (1) por f e de (2) por d

$fad = fbc$ $\qquad\qquad$ $daf = dbe$

$$f\cancel{b}c = d\cancel{b}e$$

$$b \neq 0$$

Pela lei de cancelamento:

$$fc = de$$

ou seja $\qquad \boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$

Propriedades das frações

1. - Se duas frações têm o mesmo denominador e são iguais, então os numeradores são iguais.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{b}$ $\qquad$ $a\cancel{b} = c\cancel{b}$ $\qquad$ $b \neq 0$

lei do corte

$$\boxed{a = c}$$

2. - Se uma fração $\frac{a}{b}$ é igual a um inteiro c, então a é múltiplo de b.

$\frac{a}{b} = c$ $\qquad\qquad$ $a = bc$

$c = a : b$

a - Chamamos fração APARENTE àquela cujo numerador é múltiplo do denominador; uma fração aparente é igual ao quociente entre o numerador e o denominador.

$$\frac{a}{b} = a : b = c.$$

b - Um número INTEIRO é igual a uma fração que tem para denominador um inteiro arbitrário diferente de zero ___ e para numerador o produto do inteiro dado pelo inteiro arbitrário.

c - Um número inteiro pode ser representado por (a,1)

3 - Uma fração é nula se é nulo o seu numerador

$$\frac{a}{b} = 0 = \frac{0}{1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{0}{1} \quad \therefore \quad a \times 1 = b \times 0 = 0$$

$$a \times 1 = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

4. - Se duas frações não nulas e têm o mesmo numerador e são iguais, então os denominadores são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \qquad \cancel{a}c = \cancel{a}b \qquad a \neq 0$$

Lei do corte $c = b$

5. - Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um número diferente de zero, obtem-se uma fração // igual à anterior.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times n}{b \times n} \qquad n \neq 0$$

$$a(b \times n) = b(a \times n)$$

$$\boxed{abn = ban}$$

No caso clássico diz-se que as frações assim obtidas são equivalentes; mas de acôrdo com nossa definição inicial de igualdade, / dizemos que as frações são iguais.

6. - Dividindo numerador e denominador de uma fração por um / divisor comum obtem-se uma fração igual à primitiva.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

$$a(b : m) = b(a : m)$$

$$ab : m = ba : m$$

$$\boxed{ab : m = ab : m}$$

II - <u>Adição</u>

A operação de adição goza das seguintes propriedades:

1. - Lei da Unicidade: Se $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$, então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}$$

Demonstração:

(1) $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ $\therefore$ $ab_1 = a_1b$

(2) $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$ $\therefore$ $cd_1 = c_1d$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} \quad \frac{a_1d_1 + b_1c_1}{b_1d_1}$$

Queremos demonstrar que estas duas frações são iguais ou o que equivale a:

$$b_1d_1(ad + bc) = bd(a_1d_1 + b_1c_1) \quad \text{ou ainda:}$$

(3) $$(d_1d)(ab_1) + (b_1b)(cd_1) = (dd_1)(a_1b) + (bb_1)(c_1d)$$

Devemos mostrar que (3) é uma conseqüência de (1) e (2). Das fórmulas (1) e (2) resultam respectivamente as igualdades:

$$dd_1(ab_1) = dd_1(a_1b)$$

$$bb_1(cd_1) = (c_1d)bb_1$$

Somando membro a membro:

$$dd_1(ab_1) + bb_1(cd_1) = dd_1(a_1b) + (c_1d)bb_1$$

o que nos dá a relação (3)

2. - Lei Associativa:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \qquad \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

(1) $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \boxed{\frac{adf + bcf + bde}{bdf}}$$

(2) $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{adf + b(cb + de)}{bdf} =$$

$$= \boxed{\frac{adf + bcf + bde}{bdf}}$$

(1) = (2)

(Lei Modular)

3. - Lei Modular: Existe uma fração 0 tal que $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

Consideremos q fração $0 = \frac{0}{1}$ a qual daremos o nome de fração ZERO.

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + 0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$$

4. - Lei Comutativa:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc + ad}{db}$$

Como ad + bc = cb + ad e bd = db, teremos: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\right)$

$$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

5. - Lei do Corte: Se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$, então $\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{af + be}{bf}$$

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{af + be}{bf}$$

$$(ad + bc)bf = (af + be)bd$$

1.- Pela lei do corte para a multiplicação de inteiros $(b \neq 0)$

$$(ad + bc)f + (af + be)d$$

$$adf + bef = afd + bed$$

2. - Pela lei do cancelamento da adição de números inteiros:

$$bcf = bed$$

Como $b \neq 0$, pode-se cancelar, e se tem cf = ed ou seja

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$$

$(ad + bc)bf = (af + be)bd$

1.- Pela lei do corte para a multiplicação de inteiros $(b \neq 0)$

$$(ad + bc)f = (af + be)d$$

$adf + bcf = afd + bed$

2.- Pela lei do cancelamento da adição de números inteiros:

$$bcf = bed$$

Como $b \neq 0$ pode-se cancelar, e se tem $cf = ed$ ou seja

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$$