A ESCOLA OPERANTE

PSICOPEDAGOGIA DA ELABORAÇÃO MATEMÁTICA

Michel Margot

Algumas aplicações

Cap. IV - Págs. 125 - 152

1. Convencões e ortografia matemática

Para se ter direito de exigir dos alunos notações e expressões técnicas corretas e precisas em todos os seus trabalhos, // precisa primeiro assegurar-lhes os conhecimentos indispensáveis. Pode haver professôres que pensam que uma longa freqüência de // testos bastou a um aluno para que êle se ponha expontâneamente a escrever, segundo as convensões em uso. É um êrro da mesma ordem aquêle que consiste em crer que é suficiente ler literatura para aprender a ortografia. Os meios de expressão devem ser estudados por êles mesmos, em matemática como em linguagem onde o ditado / semanal não se confunde com os ensaios de composição e de redação. Logo, resolver um problema, inventar uma solução, é mais // próximo de uma composição que de um ditado, e não pode bastar à aquisição das convenções da escrita.

Há verdades mais simples a dizer aos alunos: uma definição (ex.: chama-se vértice ao ponto comum de dois lados retilínios consecutivos de uma figura) ou uma convenção (ex.: a barra de // fração pode substituir o sinal de divisão partitiva) deve ser // aceita e não discutida ou compreendida. Muitas crianças procuram compreender o porquê de uma convenção. Não chegam a compreender o que não pode existir, êles têm um sentimento de inquietação, / que é por vêzes a origem das dificuldades manifestadas em conseqüência. Porque uma couve se chama couve? Nenhuma explicação nos é dada. A etimologia do nome dá a história dêste, mas não mostra porque o objeto leva tal nome.

Estas coisas simples, tão simples que temos qualquer hesitação a introduzí-las neste estudo são de uma importância insuspeita.

Os sistemas de notação, pensados e construidos pelos professôres, devem ser aprendidos pelos alunos, primeiro como tendo um fim em si próprios; mais tarde, serão empregados para exprimir as descobertas feitas. Pois o aluno não deve inventar notações que lhe seriam pessoais; isto não é da sua idade, êle não tem uma bagagem de conhecimentos autorizando uma tal liberdade, que, de resto, lhe é interditado em ortografia. Um filósofo, um homem de letras ou de ciências podem crear um neologismo, se fôr preciso, mas a criança deve primeiro adquirir o vocabilário corrente dos adultos; é da própria matemática onde a tradição assegura a compreensão entre iniciados.

Quando um sistema de notações é perfeitamente construido, êle goza das quatro propriedades seguintes:

1) é completo, pois suficientemente rico para permitir expressar todo o possível;

2) é homogêneo: todos os sinais ou símbolos são da mesma natureza; por exemplo são tôdas as letras, ou tôdas as combinações de letras e de algarismos, obtidas segundo a mesma lei de formação;

3) não é ambíguo: cada sinal só pode ser compreendido de um só modo, o que não é o caso, por exemplo, no sistema usual de notação algébrica;

4) é lógico: a lei de formação do sistema é conhecida e permite escrever os sinais que o formam sem êrro possível.

Quando um sinal tem duas significações possíveis, a criança corre grandes perigos, tão grandes que muitas vêzes, ela não é consciente desta ambigüidade. Por exemplo, é lastimável de ver as duas divisões (divisão partitiva e divisão por medida) indicadas pelas crianças, nos seus escritos, por meio do mesmo sinal, os dois pontos colocados um abaixo do outro.

Num sistema de notação, o sinal, a seus olhos (olhos da criança) faz parte do conceito que êle representa.

O esfôrço de tomada de consciência exigida pela notação aumenta ainda o valor formativo da matemática.

Ao lado do sistema de notação puramente técnico empregado / em matemática, tôda solução faz intervir frases explicativas tiradas da linguagem corrente. Pensamos que, para estas últimas, / as exigências, sob o ponto de vista da ortografia e sintaxe, devem ser também grandes agisse num trabalho preparado numa lição de linguagem. Com efeito, nenhuma razão poderia explicar porque, bruscamente, o aluno negligenciaria a forma, ainda que êle estivesse em classe para aprender a exprimir seus pensamentos. A ~~ix~~ intransigência côbre êste ponto de vista manifesta o desejo de / manter o principal objetivo do ensino.

Só a França citou o auxílio que a linguagem matemática, precisa e concisa, pode trazer ao estudo da língua materna.

Da mesma maneira, mais tarde, as aproximações que inventarem para exprimir seu pensamento matemático nascente poderão ser apreciadas pelo poeta que se oculta em todo o educador, mas não admissíveis pelo~~s~~ matemático~~s~~ que as substituirá pelas notações convencionais.

2. Princípio das diferenças acentuadas

Algumas aplicações:

Para a real e positivo, as convenções empregadas são:

1) $(+\sqrt{a})$ é um número relativo positivo.

2) $(-\sqrt{a})$ é um número relativo negativo.

2) $\sqrt{a}$ é o valor absoluto de um dos dois números precedentes.

Vejamos agora alguns exemplos de diferenças entre noções viz

Vejamos agora alguns exemplos de diferenças entre noções vizinhas em aparência, mas aue não faz confusão:

1) No estudo do vocabulário de línguas estrangeiras ou do latim, os alunos encontram palavras que não diferem muitas vêzes mais de que uma letra e da qual os sentidos são muito afastados. "Ad augusta per angusta" - (Chega-se a resultados sublimes por caminhos estreitos) - êste exemplo, muito comum, a uma f forma e uma significação que convêm particularmente bem a nosso propósito.

Um rápido inquérito nos tem feito pensar que a metade dos // alunos são avantajados e outra metade embaraçados para a comparação destas palavras vizinhas. Há ali uma reação pessoal, revelada igualmente no estudo da leitura pelo método global ou ídeo--visual, mas que não temos observado em matemática. Um estudo // dêste fenômeno nas disciplinas literárias poderia ser muito interessante.

2) Diferença entre fração e relação (rapport); estas duas / noções tendo por infelicidade representações gráficas muito parecidas, de modo que os alunos se espantam ao saber que há uma diferença entre elas.

Em sua origem "fração" significa "parte de" ou "separação".

A fração é, pois, a pare do inteiro, um certo número de vêzes menor que êsse inteiro: $\frac{12 \text{ metros}}{3 \text{ vêzes}} = 4 \text{ metros}$

Mas a relação (ou razão?) é a expressão matemática duma // comparação feita entre duas quantidades concretas; a relação indica quantas vêzes a quantidade menor está contida na maior:

$\frac{12 \text{ metros}}{3 \text{ metros}} = 4 \text{ vêzes}.$

Se a notação das unidades é completa, denominadores e resultados indicam sem dificuldade o que separa uma fração duma relação, mesmo se os numeradores são iguais, como no nosso exemplo.

3. Princípio de totalidade

No curso de um trabalho, quer seja longo e complicado ou curto e esclarecido, exposto a um êrro fácil de cometer, o aluno deve ter a cada instante a idéia geral do conjunto, todo // ocupado no menor detalhe. Desta maneira se anuncia o princípio de totalidade. Noutros têrmos, a análise de todos os casos não deve impedir a síntese consciente de seu conjunto.

A primeira medida prática que é preciso tomar em favor das crianças para lhe permitir aplicar êste princípio gerador de // claridade, é de os tornar capazes de sempre saber quantos casos são possíveis, qual é os que estão a tratar, qual é sua importância em relação aos outros, e qual é sua situação entre êles.

Freqüentemente, basta para atender êste resultado que as / crianças aprendam a trabalhar, sob a direção de um professor // cujo pensamento é claro e metódico; em função do mimetismo, êles poderão passar a pesquisar estas diretrizes gerais. Quando a // questão a tratar é, aos olhos de um iniciado, de uma certa complexidade, é bom recorrer a uma notação manifestando a estrutura do conjunto. Nosso quarto exemplo abaixo é uma ilustração.

Eis aqui alguns exemplos:

1) Operações simples sôbre frações: encontram-se alunos que, para multiplicar duas frações, transformam-nas ao mesmo denominador, primeiramente; é a confusão muito freqüente entre adição e multiplicação. Como, finalmente, após as dificuldades, êles encontram o resultado, pensam que êste proceder vale bem ao outro e ficam espantados que estão errados. Para fixar definitivamente os diversos mecanismos relativos aos cálculos sôbre frações, empregamos os exercícios seguintes:

Problema 27: Dão-se duas frações desiguais (para cada aplicação, o professor indica os valores numéricos destas frações). Pergunta-se:

a) adicioná-las, d) dividir a maior pela menor,
b) subtraí-las , e) dividir a menor pela maior.
c) multiplicá-las,

Na solução da primeira aplicação, o professor indica o melhor caminho para qualquer um dêstes cinco cálculos. Serão sempre apresentados na mesma ordem afim de que os alunos descubram que é mais simples e mais fácil dividir duas frações uma pela outra que as adicionar, nesse caso em geral, as crianças têm o sentimento contrário. Se êstes cálculos devam se fazer finalmente sem nenhum esfôrço e ràpidamente, é portanto muito importante obter a perfeita compreensão das razões que explicam as muito grandes diferenças que os separam. Êstes aqui são postos em evidência pelo fato de que os cinco cálculos partem das mesmas frações dadas, e as explicações completas evidenciam um automatismo cego ao mecanismo assimilado. Em seguida, se no decurso da solução de um outro problema, um dos cinco cálculos sôbre frações intervir, o aluno o recolocará mentalmente na série bem conhecida que exige obrigatòriamente o denominador comum duas vêzes, para em seguida o suspender três vêzes. Suas oportunidade de tornar-se bom calculador serão aumentadas nêle.

4. As origens de algumas dificuldades encontradas pelos alunos

....

Atacar de frente o ponto de resistência não é sempre melhor método de se tratar de uma perturbação intelectual.

....

O verdadeiro remédio é muitas vêzes de rever as bases, os primeiros elementos, que sendo mal compreendidos e mal assimilados, impedem tôda construção ulterior.

Um exemplo a meditar nos é dado pela educação musical e é resumida pela seguinte imagem geométrica:

Uma montanha cônica é subida por um caminho que o aluno percorre girando em tôrno dela. Êste caminho conduz ao cume até alcançar , mas durante tôda a subida, o viajante pode não ter observado o alvo. Êle ali chega sem sacrifício, se o caminho é bom.

A respeito dos livros, êle faz lembrar o modo de um educador que não era professor, mas conhecia bem as dificuldades das crianças: "Os livros escolares foram escritos por adultos que pensavam mais na <u>opinião</u> <u>des</u> <u>seus</u> <u>colegas</u> que no bem da criança. É por isso que êles são muitas vêzes pedagògicamente falsos".

Assinalamos algumas dificuldades encontradas pelos alunos: notações e expressões que não são empregadas.

1) Multiplicação escrita ao inverso: 2 x 11m = 22m, quando que, segundo a teoria da multiplicação, deve-se escrever:

11m tomados 2 vêzes seguidas = 22m ou 11m x 2 = 22m.

É preciso respeitar esta convenção, em aritmética, para / evitar mais tarde sérias complicações em álgebra.

2) Cálculos em cadeia: 17dm - 4dm = 13dm - 7dm = 6dm - 1dm = = 5dm - 5dm = 0. Evitar que o sinal = esteja entre quantidades desiguais:

17dm - 5dm = 13dm

13dm - 7dm = 6dm

6dm - 1dm = 5dm

5dm - 5dm = 0

3) Faltas em linguagem transformando uma noção matemática:

"Para pintar a cêrca que contorna o jardim, o pintor <u>toma</u> 40 minutos..."; "... a <u>quantidade</u> de rendimento..."

4) Imprecisões:

" Um camponês semeia trigo sôbre um campo de 72m de comprimento e 8m de largura. Quantos m^2 semeia êle?"

5) Enunciado destinado às crianças de 5 a 7 anos, incimpreensível para numerosos adultos: "Eis aqui bolinhas de gude de Luís (o desenho mostra um grupo linear de 5 bolitas). Eis aqui as de João (o desenho mostra 6 grupos lineares de 5 bolitas). Quantas vêzes João tem mais bolitas que Luís?"

Enderessando-se a adultos, pode-se obter as três respostas seguintes: 5 vêzes; 20 bolitas; 4 vêzes. Nossa conclusão será que as dificuldades começam muito cedo para as crianças!

"O preço de um metro de tela: 2,50f

Preço de tôda a tela: 50 f

Número de m de tela: 50 : 2,5 = 20m", pois dividindo francos por francos, acha-se metros! É verdade que o autor do livro (Margot e Buxcel, Arithmetic - grau superior -pág. 19 e 30) para colocar sua consciência ao abrigo, toma a precaução de igualar as unidades do dividendo e do divisor, mas isto é bem ~~//~~ insuficiente para evitar às crianças de continuar a pensar que 50 et 2,5 são expressos em francos. Esta supressão de unidades não é uma simplificação, mas uma ocasião de êrro que o ensino impõe às crianças. Melhor seria notar:

Número de m de tela: <u>50 francos</u> ⁝ <u>3,5 francos</u> = <u>20 vêzes</u>, <u>pois 20 metros</u>. Os três pontos indicam que se fêz uma divisão por medida que, noutros têrmos, chama-se também uma relação. É o fracionamento de 50m em 2,5 partes que poderia dar imediatamente 20 m como resultado. Há aqui pois confusão entre relação e fração, não no autor destas notações, mas na confusão dos // alunos que a empregam.

7) Êrro claro e portanto dado em exemplo:

$$\frac{600}{84} = 7$$

Isto é grave porque de uma parte o cálculo não está terminado, logo nada o indica, e doutra parte, o sinal de igualdade é empregado abusivamente.

8) Repetição de um sinal dentro de um polimônio: quando um polimônio é muito longo para ser escrito sôbre uma linha só, é / perigoso para as crianças repetir ao início da segunda linha, o sinal que termina a primeira. É preciso então pôr o polimônio sob a forma de uma lista ordenada, estando cada monônio ~~p~~ precedido de um só sinal, e jamais escrever de modo algum ao fim da linha.

9) Notações muito abstratas indicadas por um professor: o enunciado era: "Sôbre uma mercadoria , eu obtive uma redução de // 3,5%. Economisei assim 287 francos. Qual era o preço marcado?"

O cálculo indicado foi: 287 francos : 3,5% = ...

O aluno via que o resultado final, era justo, mas não compreendia porque um tal resultado pudesse ter dado. Estava pasmado ao ver dividir francos por % ! A mesma dificuldade é imposta à criança quando se multiplicam entre si; exemplo: "O preço da compra de uma mercadoria vale os 80% do preço da venda. O preço da compra é diminuida de seus 2%. Quanto vale a diminuição, em % do ~~pt~~e preço da venda?"

Se, matemàticamente, pode-se multiplicar as relações entre elas, isto é muito abstrato sob formas de %:

(80% de P. V.) . (2%) = 1,6 do P. V.

Fazendo a notação $\frac{2}{100}$ no lugar de 2% evita-se a multiplicação dos %, o que facilita a compreensão.

5. Os operadores

Chamam-se "operadores" os simais indicando que os elementos, colocados à continuação ou imediatamente adiante, são para submeter a uma operação determinada.

Os primeiros operadores encontrados pelos alunos são os / sinais das operações fundamentais. Como o sistema que êles formam não é perfeito e provoca confusões, vale a pena analisá-los.

Adição	+ mais	aumentado de
Subtração	– menos	diminuído de
Multiplicação	x vêzes	multiplicado por
Divisão	:	dividido por

Tem-se o hábito de ler êstes sinais: mais, menos, vêzes, dividido, o que não é homogênio, como mostra o quadro acima. É também um sistema encompleto, porque há pelo menos, duas divisões fundamentais e fundamentalmente diferentes. Dêste fato, os dois pontos superpostos, representam duas noções diferentes, / formando ambíguo. Estas imperfeições fazem crer que há sòmente quatro operações fundamentais, o que é falso e origina muitos erros.

Já vimos que (fl. 2) um sistema perfeitamente construído é completo, homogêneo, sem ambigüidade e lógico. Propomos o sistema seguinte que não é inteiramente homogêneo, mas que tem grandes vantagens por relacionar ao precedente.

19 francos + 4 francos = 23 francos - lê-se 19 fr. mais 4 fr. igual a 23 francos

19 francos – 4 francos = 15 francos - lê-se 19 fr. menos 4 fr. igual a 15 francos

19 francos x 4 vêzes = 76 francos - lê-se 19 fr. tomado 4 vêzes igual a 76 francos

18 francos ⁝ 4,5 francos = 5 francos - lê-se 18 fr. contêm 4,5 francos 4 vêzes

20 francos : 4 vêzes = 5 francos - lê-se 20 fr. partilhados em 4 partes dão 5 francos

Estes cinco cálculos formam um sistema de base que as crianças assimilariam, antes de completar por elas mesmas. Observar que cada número e seguido de um nome, sem exceção, o que / força à reflexão e simplifica finalmente, porque sabe-se sempre o que se deve achar como resultado. Para indicar um número abstrato, basta fazer seguir da palavra "vêzes". Veremos então que distinguir as duas divisões prepara a respeitar a diferença entre relação e fração.

Certos livros elementares introduzem a divisão como uma sérei de subtrações e não como a operação inversa da multiplicação. Distinguem-se as duas divisões introduzindo duas operações diferentes, como se vê:

1) a série de subtrações explica muito bem a divisão por medida, mas não a partitiva: 18 francos : 4,5 = ? vêzes pode-se escrever sob a forma de subtrações, porque se eleva então os francos a uma soma expressa em francos;

2) a operação inversa explica muito bem a divisão partitiva e a por medida: 20 francos : 4 vêzes = ? francos tornando a encontrar um número de francos que, tomados 4 vêzes, dão 5 francos; é a partitiva. 18 francos : 4,5 francos = ? vêzes tornando a encontrar quantas vêzes a pequena soma está contida na grande; é a por medida. Uma série de multiplicações feitas a tîtulo de ensaio dá o resultado procurado.

A primeira cousa a ensinar às criancinhas por um material concreto, é que um objeto pode ser dividido, partido em 20 pedaços, 4 pedaços, 2 pedaços, mas que um objeto não pede ser partido em menos de 2 pedaços; em outros têrmos o divisor de uma divisão partitiva é sempre maior que ou eventualmente igual a 2, mas nunca maior que 2.

Supomos aqui três verdades:

a) uma divisão partitiva não se pode fazer por um número menor que dois;

b) uma divisão por medida compara duas quantidades concretas e seu resultadochama-se quociente, é "um número de vêzes". Em latim, quotiens ou quoties significa "quantas vêzes" e sòmente a divisão por medida tem um resultado que se pode chamar, / em todo rigor, um quociente;

c) a barra horizontal indica que êle precisa fazer uma ou outra das duas divisões citadas, ou eventualmente, uma outra ainda.

Se escrevemos nos exemplos de divisão por medida e de divisão partitiva em colunas, obtemos uma relação e uma fração:

Por medida: 18 francos ⁝ 4,5 francos = 4 vêzes; $\frac{18 \text{ francos}}{4,5 \text{ francos}} = 4$ vêzes - Relação

Partitiva: 20 francos : 4 vêzes = 5 francos. $\frac{20 \text{ francos}}{4 \text{ vêzes}} = 5$ francos - Fração

Para uma relação, a barra horizontal é lida "contém" e para uma fração "partido em" ou "sôbre"; isto permite pôr em evidência uma nova diferença entre relação e fração. Se muitos alunos têm tendência a confundir estas duas noções, as definições que se encontram nos seus manuais são em parte responsáveis.

Uma observação ainda antes de resumir esta primeira parte.

Número de metros de tela: 50 francos ⁝ 2,5 francos = 20 vêzes, portanto 20 m. Êste é o momento de chamar a atenção, explicando: "Tantas vêzes 2,5 francos estão contidos em 50 francos, tantas vêzes há i metro de dela na peça, portanto 20 metros." Isto exprime noutros têrmos, a igualdade de duas relações.

Em resumo:

Adição	+	<u>mais</u>	aumentado de	
Subtração	-	<u>menos</u>	diminuído de	
Multiplicação	x	<u>tomado</u>	multiplicado por	
Div. por medida	⁝	<u>contém</u>		Relação
" partitiva	:		partido em	Fração

Êste primeiro sistema de base é destinado às crianças de 8 a 11 anos. Pela prática temos estabelecido que isto permite ao aluno melhor saber o que é feito com o sistema habitual parecendo mais simples. Sôbre êste ponto sòmente, a experiência de controle não pôde ser feita: para evitar o emprêgo de um sinal que os professôres não conhecem geralmente não introduzimos o sinal de "contém" (três pontos superpostos); os pais dos alunos também ficaram muito espantados de ver aparecer êste sinal, porque "êles nunca tinham feito nada com isso"! Precisam então que nos graus primário e secundário, os resultados sejam satisfatórios.

A partir dos llanos, é preciso que os alunos comecem o estudo da multiplicação e da divisão generalizadas, e um pouco mais tarde a da multiplicação e da divisão físicas. Êstes quatro cálculos formam o sistema complementar:

1) Multiplicação generalizada: tôdas as unidades são suprimidas:

$$9,42 \times 0,64 = 6,0288$$

Não é portanto qualquer cálculo que deve ser interpretado em função do texto matemático onde êle se coloque.

2) Divisão generalizada: todas as unidades são suprimidas. A isto se devem portanto uma relação entre números absolutos, relação a interpretar como divisão partitiva ou por medida, conforme o contexto.

$$6,0288 : 0,64 = 9,42$$

Procura-se aqui im número que multiplicado por 0,64, dê ... 6,0288. Os três números são então expressos sem unidades. O divisor pode ser agora, qualquer um.

3) Multiplicação física: 3,5 kg . 6,2m = 21,7 kgm

É um cálculo fundado sôbre uma definição das unidades.

4) Divisão física: 14,921 m : 4,3 s = 3,47 m/s

Esta divisão cria as unidades derivadas.

Êste sistema complementar é tão bem empregado que o sistema de base é mais seguro. Com os dois, formam ao todo 9 operações fundamentais.

A prática da divisão detem freqüentemente os alunos. Ao observar que seus livros contêm boas cousas que êles não empregam nunca, embora sabendo que existem. Ex.: Na divisão 212 : 27 = ? observar-se-á que 27 está mais perto de 30 que de 20. Em vez de dizer "em 21, quantas vêzes há 2?", para obter ràpidamente o / quociente, dir-se-á "em 21 quantas vêzes há 3?". De outra parte, podemos estabelecer que é melhor tracar as unidades que os valores para explicar a mudança da vírgula:

4,75f : 0,46f = ? vêzes, será substituído por 475c : 46c = =? vêzes, de tal maneira que as importâncias em comparação não trocam. Comparando 475f a 46f, acrescenta-se uma dificuldade suplementar para as crianças porque as importâncias são trocadas, nesse caso os adultos acham esta forma muito simples. É preciso portamto trocar os números e as unidades e obter assim a invariabilidade dos valores.

Em face das frações, relações e porcentagem podemos ainda fazer quaisquer observações:

1) Etimològicamente, uma fração é uma parte de um todo; ela não deveria portanto jamais ser superior à unidade. É bom atrair a atenção das crianças sôbre a extensão dada a esta palavra em matemática.

2) A teoria completa das operações sôbre frações deveria ser refeita em álgebra com uma notação literal, porque os valores numéricos ajudam demais o aluno em aritmética; não pode entretanto tomar inteiramente consciência das propriedades empregadas. Felizmente, o tempo deixa freqüentemente para refazer êste estudo a fundo, no momento em que êle é verdadeiramente útil, isto é, aos 14 anos e meio.

3) Um êrro corrente é de chamar "fração" uma relação escrita, / por meio de uma barre horizontal; exemplo:

"Exprimir em fração irredutível a razão ou relação seguinte: 7 $^1/2$ %"

$7^1/2\% = \frac{7,5}{100} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$; êste último valor é também uma relação!

4) Para ser inteiramente claro, é preciso sempre voltar, novamente às definições seguintes: Uma relação é o quociente de duas quantidades concretas da mesma espécie; êste quociente exprime quantas vêzes uma das quantidades está contida na outra. Uma fração é uma quantidade concreta, menor ou maior que a unidade concreta empregada e obtida por um seccionamento desta

última.

Assim: 5 % é uma relação e (5% de 40) é uma fração. Neste último exemplo, o seccionamento é dado pela relação, mas a expressão entre parênteses é uma fração.

5) O problema seguinte dá como exemplo o mesmo número, primeiro como relação, depois como fração:

Um tarro de leite está cheio sucessivamente com água , depois com leite. Um litro de leite pesa 1,032kg. O pêso do tarro cheio dágua é de 3,6666kg; e cheio de leite pesa 3,753kg. Pergunta-se:

a) o pêso do tarro vazio,

b) o número de litros que pode conter o tarro .

Solução:

A diferença total é de: 3,753kg - 3,6666kg = 0,0864kg

A diferença parcial calculada sôbre um litro é de:

1,032kg - 1kg = 0,032kg

A relação dêsses pesos é: $\frac{86,4\text{kg}}{32\text{ kg}}$ = 2,7 vêzes (Relação)

Conteúdo do tarro:1kg . 2,7 vêzes = 2,7kg (Fração)

Pêso da água que enche o tarro:

1kg . 2,7 vêzes = 2,7kg (Fração)

Pêso do tarro vazio: 3,6666kg - 2,7kg = 0,9666kg = 966,6g

O número decimal 2,7 pode-se escrever $\frac{27}{10}$ e entrar no texto desempenhando funções de fração ou de relação. É o que êste // exemplo devia mostrar. A natureza dessas duas noções sendo diferente, a notação deve revelar.

Alguns professôres terão hesitações antes de introduzir no seu ensino de nítidas distinções entre fração e relação, como entre divisão partitiva e divisão por medida, para seus alunos mais jovens.

Tôdas as crianças, qualquer que seja sua idade, preferem um grande número de noções simples e bem compreensíveis a um pequeno número de armadilhas ambíguas e vagas, as quais êles não saibam jamais explicar com segurança. O adulto benevolente crê facilitar-lhe a tarefa, evitando de introduzí-los num labirinto de casos múltiplos, tais como as prentendidas simplificações que incomodam o espírito em curso de formação. Ter a coragem de ver as realidades face a face, que, sem nenhuma deformação arbitrária, é a atitude que finalmente cpnduz ao "simples" e como tal ao sucesso.

Para poder distinguir, é preciso ter à sua disposição uma notação que objetive as diferenças. Já a demos, mas achamos útil de resumirmos, mas uma vez, afim de fixar a vista do conjunto.

Divisão pa rtitiva: 1t5,5francos : 2 vêzes = 8,75 francos;

Fração $\frac{17,5 \text{ francos}}{2 \text{ vêzes}} = 8,75$ frs.

Divisão por medida: 6,5l ⁝ 0,4l = 16,25 vêzes;

Relação $\frac{6,5 \text{ litros}}{0,4 \text{ litro}} = 16,25$ vêzes

Como isto já era o caso nos nossos outros exemplos, cada número é sefuido de uma palavra, sostematização esta que tem grandes vantagens na prática.

Enfim, alguns pensarão que o sinal de contido (3 pontos superpostos) não é indispensável. Em todo caso. evita uma confusão grave, e seria muito interessante introduzir a um grande número de crianças para fazer a prova de sua utilidade até aos 11 ou 12 anos, utilidade da qual não duvidamos porque permite à criança de satisfazer sua necessidade de clareza.

Todos os sinais que empregamos eram relativamente recentes nada se opõe a que o sistema habitual seja completado. Os sinais + e − foram introduzidos por Widmann, em 1489; os sinais x e ÷ por Record em 1577; quanto ao sinal de"contido em" ⁝ foi empregado por Wittmann desde 1933. Sua introdução ajudava os jovens e permitia de voltar às noções simples pqrq definir mais tarde Fração e Relação.